

Quarta Lista de Exercícios - SEL 5739 Sistemas Não Lineares

Prof. Luís Fernando Costa Alberto

14 de Outubro de 2019

EXERCÍCIO 1) Seja a seguinte equação diferencial

$$\dot{x} = x + x^2.$$

Estude a estabilidade dos pontos de equilíbrio, esboce as órbitas do sistema em $\mathbb{R}$ e calcule os conjuntos α -limite e ω -limite das órbitas deste sistema.

EXERCÍCIO 2) Verifique que

$$x(t) = 1 - \left(\frac{1 - e^t}{1 + e^t} \right)^2$$

é solução da equação diferencial de segunda ordem $\ddot{x} - x + \frac{3}{2}x^2 = 0$. Transforme esta equação num sistema planar de primeira ordem, esboce a órbita correspondente à solução $x(t)$ e determine o α -limite e o ω -limite correspondente a esta solução.

EXERCÍCIO 3) Seja o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + \left(1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)x \\ \dot{y} &= x + \left(1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)y \\ \dot{z} &= -z\end{aligned}$$

Mostre que o cilindro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ é invariante com relação ao sistema anterior. Estude o conjunto ω -limite de todas as órbitas deste sistema.

EXERCÍCIO 4) Mostre que todo sistema gradiente, ou seja, todo sistema na forma

$$\dot{x} = \text{grad}V(x)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe $\mathcal{C}^2$, não possui órbitas periódicas. Além disto, para todo x_o , $\omega(x_o)$ é um ponto de equilíbrio isolado ou o conjunto vazio. Forneça uma condição suficiente sobre V para garantir que $\omega(x_o)$ é não vazio para todo x_o .

EXERCÍCIO 5) Encontre os pontos de equilíbrio do sistema abaixo, classifique-os e mostre que este sistema não possui órbitas periódicas.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -b \sin x - ay, \quad a, b > 0\end{aligned}$$

EXERCÍCIO 6) Considere o sistema $\dot{x} = -\arctan(x)$ Deseja-se calcular os equilíbrios deste sistema. Utilize o método de Newton Raphson para o cálculo dos equilíbrios. Use como estimativa inicial $x_o = 4$.

EXERCÍCIO 7) Considere o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 1 - 2\sin(x) - 2\sin(x - y) \\ \dot{y} &= 1 - 3\sin(y) - 2\sin(y - x)\end{aligned}$$

Calcule os pontos de equilíbrio deste sistema. Estude o tipo de cada um deles. Mostre que este sistema pode ser escrito como um sistema gradiente e portanto todos os conjuntos limites são pontos de equilíbrio.

EXERCÍCIO 8) Considere o sistema não linear

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= ax + by - x^2y - x^3.\end{aligned}$$

Encontre condições sobre os parâmetros a e b para que este sistema não exiba órbitas periódicas.

EXERCÍCIO 9) Considere o sistema não linear

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= -2x + y - y(x^2 + y^2).\end{aligned}$$

Mostre a existência de pelo menos uma órbita periódica neste sistema.