



Lista Extra - Ondas

1. A equação de onda unidimensional estabelece uma relação entre variação temporal e de posição para uma função $f(z, t)$ da forma

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2},$$

onde c é a velocidade da onda. f pode representar um perfil de onda que se move numa corda ao longo do tempo, por exemplo. Verifique que qualquer função f da forma $f(z, t) = g(z \pm ct)$ é solução da equação de onda unidimensional. Em particular, mostre que $f(z, t) = g(z + ct) + h(z - ct)$ é solução.

2. Verifique quais das funções abaixo são solução da equação de onda unidimensional. ($A, a, b \in \mathbb{R}$ são constantes)

$$\begin{aligned} f_1(z, t) &= Ae^{-b(z-ct)^2}; \\ f_2(z, t) &= A \sin [b(z - ct)]; \\ f_3(z, t) &= A \sin(bz) \cos^3(act). \end{aligned}$$

3. Ondas senoidais são ondas que podem ser resumidas pela forma

$$f(z, t) = A \cos [kz - \omega t + \delta],$$

onde A é sua amplitude, $k = 2\pi/\lambda$ é o número de onda, $\omega = 2\pi\nu$ é a frequência angular da onda (com ν sendo sua frequência linear) e δ é sua fase.

- (a) Desenhe $f(z, t_1)$ e $f(z, t_2)$ no plano $z \times f$, com $t_1 < t_2$ e verifique que essa onda se move para a direita ao longo do tempo (sentido crescente de z).
- (b) Mostre que $f(z, t) = \text{Re} [Ae^{i(kz - \omega t + \delta)}]$.

4. A generalização da equação de onda para três dimensões é dada pela equação

$$\nabla^2 \varphi(x, y, z, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(x, y, z, t),$$

onde $\nabla^2 = (\partial_x^2, \partial_y^2, \partial_z^2)$ é o operador laplaciano e $\varphi(x, y, z, t)$ é uma função de várias variáveis suficientemente suave (duplamente diferenciável em cada uma das variáveis). Num caso em que um vetor $\vec{A} = A_x(x, y, z, t) \hat{x} + A_y(x, y, z, t) \hat{y} + A_z(x, y, z, t) \hat{z}$ é tal que todas as suas componentes satisfazem à equação de onda tridimensional, compactamos a notação dizendo que

$$\nabla^2 \vec{A}(x, y, z, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}(x, y, z, t)$$

- (a) Verifique que, no vácuo, os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ satisfazem à equação de onda tridimensional.
- (b) Mostre que $\vec{E} = E_0 \cos(kz - \omega t + \delta) \hat{x}$ é solução da equação de onda.