



IFSC USP
Instituto de Física de São Carlos

Laboratório de Física III
Livro de Práticas

Universidade de São Paulo
Instituto de Física de São Carlos
Laboratório de Ensino de Física

Laboratório de Física III: livro de práticas

São Carlos
2014

© 2013 IFSC/USP

Todos os direitos reservados ao Instituto de Física de São Carlos

Ficha catalográfica elaborada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do IFSC

Universidade de São Paulo. Instituto de Física de São Carlos. Laboratório de Ensino de Física.
Laboratório de Física III : livro de práticas/ compilado por Tiago Barbim Batalhão [et al]. São Carlos: Instituto de Física de São Carlos, 2013.
326p.

ISBN 978-85-61958-07-7

1. Física. I. Batalhão, Tiago B. comp. II. Cobo, Marcio F., comp. III. Azevedo, Eduardo Ribeiro de, comp. IV. Nunes, Luiz Antonio de Oliveira, comp. V. Marcassa, Luis Gustavo, comp. VI. Título.

CDD 530

Agradecimentos

Esse livro de práticas foi elaborado com base na disciplina de Laboratório de Física III- Eletricidade e Magnetismo oferecida pelo Instituto de Física de São Carlos. Neste sentido, os autores agradecem aos técnicos do laboratório de ensino do Instituto de Física de São Carlos Hélio Nineli, Jae Antônio de Castro Filho e Antenor Fabbri Petrilli Filho, Marcos José Semenzato e aos técnicos da oficina mecânica do Instituto de Física de São Carlos pela ajuda com a elaboração dos equipamentos e testes dos experimentos explorados neste livro. Os autores também são gratos pelo apoio dos Profs. Lidério Citrângulo Ioriatti Jr., Valmor Roberto Mastelaro e Antonio José da Costa Filho, respectivamente, presidentes da comissão de graduação e coordenador dos lab. de ensino do IFSC no período de elaboração deste material. Agradecemos também ao Prof. Antonio Carlos Hernandez que, enquanto diretor do IFSC, apoiou efetivamente a confecção deste material e a biblioteca do IFSC pelo auxílio na formatação e padronização do texto.

Lista de Figuras

Figura 1.1 - Bastão carregado induzindo uma distribuição de cargas sobre um condutor.....	34
Figura 1.2 - Procedimento para eletrizar um condutor por indução.....	34
Figura 1.3 - Procedimento para eletrizar um condutor por indução (usando o aterramento)	35
Figura 1.4 - Eletroscópio de folhas de ouro.....	36
Figura 1.5 - Pêndulo eletrostático, detectando carga de mesmo sinal e carga oposta	37
Figura 1.6 - Verificação da eletrização de um canudo de plástico por atrito.....	42
Figura 1.7 - Eletrização por indução.....	44
Figura 1.8 - Poder das pontas	45
Figura 1.9 - Blindagem eletrostática.....	46
Figura 2.1 - Padrão do campo elétrico gerado por duas cargas de sinais opostos e mesmo módulo (dipolo elétrico).....	50
Figura 2.2 - Diagrama, esquemático, da cuba eletrolítica a ser utilizada	52
Figura 2.3 - Fotografia da cuba eletrolítica, mostrando o papel milimetrado	52
Figura 2.4 - Dois eletrodos cilíndricos mergulhados na cuba eletrolítica	53
Figura 2.5 - Medindo o potencial em um ponto da cuba eletrolítica.....	54
Figura 2.6 - Um eletrodo cilíndrico e um em forma de placa mergulhados na cuba eletrolítica	56

Figura 2.7 - Dois eletrodos em forma de placa mergulhados na cuba eletrolítica	58
Figura 2.8 - Eletrodo cilíndrico oco mergulhado na cuba eletrolítica	59
Figura 2.9 - Cilindro metálico oco mergulhado na cuba eletrolítica junto a um divisor de tensão.....	62
Figura 2.10 - Cilindro plástico oco mergulhado na cuba eletrolítica	63
Figura 3.1 - Placa de montagem de circuitos. O verso da placa mostra as conexões	66
Figura 3.2 - Fonte de tensão DC	67
Figura 3.3 - (a) Multímetro digital. (b) Multímetro analógico.....	69
Figura 3.4 - Exemplos de um voltímetro conectado corretamente e incorretamente em um circuito	71
Figura 3.5 - Exemplos de um amperímetro conectado corretamente e incorretamente em um circuito	71
Figura 3.6 - Exemplos de um ohmímetro conectado corretamente e incorretamente em um circuito	72
Figura 3.7 - Exemplo de três modelos de resistores. Em ordem, da esquerda para a direita, quanto à potência que podem dissipar	73
Figura 3.8 - Código para leitura do valor nominal da resistência de um resistor	73
Figura 3.9 - (a) Exemplo de potenciômetro. (b) Símbolo elétrico do potenciômetro.	75
Figura 3.10 - (a) Símbolo elétrico de um diodo semicondutor. (b) Diodo polarizado diretamente, conduzindo corrente. (c) Diodo polarizado reversamente; nesse caso, a corrente não pode fluir.....	76

Figura 3.11 - Circuito divisor de tensão utilizado para observar o efeito da resistência interna do voltímetro nas medidas de tensão	82
Figura 3.12 - Circuito utilizado na obtenção da curva V_{xl} de um resistor	84
Figura 3.13 - Circuito para traçar uma curva V_{xl} de uma lâmpada	86
Figura 3.14 - Circuito para traçar uma curva V_{xl} de um diodo (polarizado diretamente). A faixa escura representa a marca branca presente no diodo	87
Figura 4.1 - Conductor submetido à diferença de potencial.....	96
Figura 4.2 - (a) Fita condutora de alumínio. (b) Circuito para estudar a tensão sobre a fita condutora...	103
Figura 4.3 - Fita condutora de alumínio (experimento opcional)	105
Figura 5.1 - Associação de resistores: (a) em série; (b) em paralelo	108
Figura 5.2 - Circuito para ilustrar a aplicação das regras de Kirchoff	112
Figura 5.3 - Três resistores em série.....	114
Figura 5.4 - Três resistores em paralelo.....	116
Figura 5.5 - Circuito para experimento sobre as leis de Kirchoff	117
Figura 6.1 - Fonte de tensão real	120
Figura 6.2 - Teorema de máxima transferência de potência.....	120
Figura 6.3 - Balanço de potência para um gerador que alimenta uma carga resistiva.....	122
Figura 6.4 - Eficiência da transferência de potência.....	124

Figura 6.5 - Circuito para demonstração do teorema de máxima transferência de potência	125
Figura 7.1 - Capacitor de Placas Paralelas.....	129
Figura 7.2 - Cargas de polarização no dielétrico. σ_b é a densidade de cargas de polarização no dielétrico, e σ_f é a densidade de cargas livres nas placas metálicas.	132
Figura 7.3 - Capacitor cilíndrico: (a) vista lateral, mostrando o capacitor e a superfície gaussiana; (b) vista por cima, mostrando a distribuição de carga e as linhas do campo elétrico	135
Figura 7.4 - Associação de capacitores. (a) em série; (b) em paralelo.....	138
Figura 7.5 - Descarga de um capacitor.....	140
Figura 7.6 - Circuito para carregar um capacitor	142
Figura 7.7 - Curvas de carga e descarga de um capacitor	143
Figura 7.8 - Descarga de um capacitor pela resistência interna de um voltímetro	145
Figura 7.9 - Carga de um capacitor	146
Figura 7.10 - Circuito para estudar a conservação da energia eletrostática em capacitores	148
Figura 8.1 - Desenho esquemático de um galvanômetro	152
Figura 8.2 - Circuito elétrico de um voltímetro	155
Figura 8.3 - Circuito elétrico de um amperímetro.....	157
Figura 8.4 - Circuito elétrico de um ohmímetro.....	160
Figura 8.5 - Circuito de um multímetro analógico comercial ..	166
Figura 8.6 - Circuito equivalente ao multímetro analógico da figura 8.5, com a chave na posição 1	167
Figura 8.7 - (a) Circuito para caracterização do galvanômetro; (b) Galvanômetro da marca Minipa. ..	169

Figura 8.8 - (a) Circuito do amperímetro. (b) Circuito para calibração de um amperímetro com fundo de escala de 5mA.	171
Figura 8.9 - Circuito para calibração do voltímetro construído	173
Figura 8.10 - Circuito para monitorar o efeito da resistência interna do voltímetro	174
Figura 8.11 - Circuito elétrico do ohmímetro a ser construído	175
Figura 9.1 - Desenho esquemático do tubo de raios catódicos: a - filamento aquecido; b - filtro de velocidades; c - placas defletoras horizontais; d - placas defletoras verticais; e - feixe de elétrons; f - tela fosforescente.....	178
Figura 9.2 - Sistema de deflexão vertical. O feixe de elétrons é desviado devido à aplicação de uma tensão V nas placas defletoras verticais	179
Figura 9.3 - Botões de seleção: (a) Escala vertical; (b) Base de tempo	180
Figura 9.4 - Onda dente de serra aplicada no sistema de deflexão horizontal (base de tempo)	181
Figura 9.5 - Painel do osciloscópio Tektronix 2205	184
Figura 9.6 - Sinal alternado (de amplitude 0,1) somado a um sinal constante (de amplitude 8), como visto em um osciloscópio nos acoplamentos DC (a) e AC (b).	187
Figura 9.7 - Exemplos de medidas elétricas realizadas com um osciloscópio. (a) Tensão contínua. (b) Tensão alternada.	191
Figura 9.8 - Circuito utilizado para medir a curva V-I característica de componentes eletrônicos.	196
Figura 10.1 - Geometria para calcular o campo magnético de um fio infinito	206

Figura 10.2 - Geometria para calcular o campo magnético de uma espira circular	209
Figura 10.3 - Geometria para calcular o campo magnético de uma bobina de Helmholtz	211
Figura 10.4 - Campo magnético (normalizado) gerado por uma bobina de Helmholtz. As bobinas estão localizadas em $z / a = \pm 0,5$	213
Figura 10.5 - Geometria para calcular o campo magnético de uma bobina anti-Helmholtz	214
Figura 10.6 - Campo magnético (normalizado) gerado por uma bobina anti-Helmholtz. As bobinas estão localizadas em $z / a = \pm 0,5$	215
Figura 10.7 - Solenóide. (a) Vista em perspectiva. (b) Vista por cima.	216
Figura 10.8 - Campo magnético (normalizado) no interior de um solenóide, para dois valores de R / L . As extremidades do solenóide estão localizadas em $z / L = \pm 0,5$	217
Figura 10.9 - Efeito Hall. (a) Cargas livres negativas. (b) Cargas livres positivas	219
Figura 10.10 - Especificações do sensor de campo magnético do chip CSA-1V	222
Figura 10.11 - Fotografia do Sensor Hall adaptado para medidas de campo magnético	223
Figura 10.12 - Sonda Hall. À direita está o conector BNC, e à esquerda o botão de acionamento	224
Figura 10.13 - Configuração para calibração da sonda Hall ..	226
Figura 10.14 - (a) Bobina quadrada utilizada no experimento de Lei de Ampère. (b) Detalhe da Medida do campo magnético com o sensor Hall.	228
Figura 10.15 - Medida do campo magnético gerado pela bobina usando uma sonda Hall	231

Figura 10.16 - Configuração para mapeamento do campo magnético de uma bobina de Helmholtz	233
Figura 11.1 - Sentido da tensão positiva e do fluxo positivo em um circuito	239
Figura 11.2 - Lei de Lenz aplicada a um ímã em movimento próximo a uma espira. (a) ímã se aproxima da espira, e é repelido. (b) ímã se afasta da espira, e é atraído.....	241
Figura 11.3 - Dois solenóides coaxiais.....	247
Figura 11.4 - Circuito para alimentar um indutor com corrente alternada	252
Figura 11.5 - Configuração para medir o campo magnético no interior de um solenoide	254
Figura 11.6 - (a) Montagem para observação da f.e.m induzida em uma bobina de prova soleinoidal. (b) Bobina de prova.....	258
Figura 12.1 - Esquema elétrico de um circuito puramente resistivo	263
Figura 12.2 - Esquema elétrico de um circuito puramente capacitivo	265
Figura 12.3 - Esquema elétrico de um circuito puramente indutivo.....	267
Figura 12.4 - Circuitos de corrente alternada. (a) RC; (b) RL.....	272
Figura 12.5 - Representação de um filtro elétrico.....	275
Figura 12.6 - Resposta de filtros RC e RL em função da frequência. (a) Função de transferência. (b) Relação entre potência de saída e potência de entrada.....	279
Figura 12.7 - Circuito utilizado para medir as tensões nos terminais de componentes eletrônicos.....	286

Figura 12.8 - Circuito para determinar a curva característica de um filtro RC	291
Figura 12.9 - Circuito para determinar a curva característica de um filtro RL.....	292
Figura 13.1 - Esquema elétrico de um circuito RLC série.....	298
Figura 13.2 - Diagrama da impedância no plano complexo...	300
Figura 13.3 - Diagramas de tensões e correntes no plano complexo, em diferentes instantes	301
Figura 13.4 - Uma tensão elétrica com $V_0 = 100$ volts e frequência variável aplicada em um circuito RLC série.....	305
Figura 13.5 - Corrente em um circuito RLC série	308
Figura 13.6 - Diferença de fase entre a tensão na fonte e a corrente em um circuito RLC série	308
Figura 13.7 - Potência média dissipada em um circuito RLC série.....	309
Figura 13.8 - Diagramas de um circuito RLC com o capacitor carregado.....	310
Figura 13.9 - Comportamento da corrente em um circuito RLC série nos diferentes regimes de amortecimento	315
Figura 13.10 - Circuito RLC	318
Figura 13.11 - Formas de onda para a excitação e a resposta transiente do circuito RLC. Sugere-se que o pulso tenha uma largura $t_p \sim 15\text{ms}$ e que o tempo entre pulsos $t_e \sim 80\text{ms}$	323

Lista de Tabelas

Tabela 2.1 - Mapeamentos das equipotenciais de duas cargas pontuais.....	56
Tabela 2.2 - Mapeamentos das equipotenciais de um carga pontual próxima a uma placa carregada.	57
Tabela 2.3 - Mapeamentos das equipotenciais entre duas placas planas e paralelas.....	59
Tabela 2.4 - Mapeamentos das equipotenciais de um cilindro condutor entre duas placas planas e paralelas	60
Tabela 2.5 - Medida do potencial ao entre duas placas paralelas ao longo do eixo de simetria.....	61
Tabela 2.6 - Medida de $V(P)$ entre duas placas paralelas (com divisor de tensão) ao longo do eixo de simetria	62
Tabela 2.7 - Mapeamentos das equipotenciais de um cilindro isolante entre duas placas planas e paralelas	63
Tabela 2.8 - Medida de $V(P)$ entre duas placas paralelas (com cilindro de plástico) ao longo do eixo	64
Tabela 3.1 - Código de cores de resistores.....	74
Tabela 3.2 - Resultados das medidas de resistência utilizando um Ohmímetro	79
Tabela 3.3 - Resultados das medidas das características de um potenciômetro	80
Tabela 3.4 - Resultados das medidas de tensão	80
Tabela 3.5 - Resultados das medidas de tensão do circuito da figura 3.11 com $R = 1\text{ k}\Omega$	83
Tabela 3.6 - Resultados das medidas de tensão do circuito da figura 3.11 com $R = 100\text{ k}\Omega$	83

Tabela 3.7 - Resultados das medidas de tensão e corrente para obtenção da curva V_{xl} de um resistor.....	84
Tabela 3.8 - Resultados das medidas de tensão e corrente para obtenção da curva V_{xl} de uma lâmpada.....	86
Tabela 3.9 - Resultados das medidas de tensão e corrente para obtenção da curva I_xV de um diodo polarizado diretamente	88
Tabela 3.10 - Resultados das medidas de tensão e corrente para obtenção da curva I_xV de um diodo polarizado reversamente	88
Tabela 4.1 - Resistividade de alguns materiais. Observe a diferença nas ordens de grandeza.	93
Tabela 4.2 - Resultados das medidas de tensão versus posição em uma fita metálica em forma de escada	104
Tabela 4.3 - Características geométricas da fita.....	106
Tabela 4.4 - Resultados das medidas de tensão versus posição em uma fita metálica em forma trapezoidal	106
Tabela 5.1 - Resultados da medida da resistência equivalente em um circuito da figura 5.3.....	115
Tabela 5.2 - Resultados da medida de tensões em um circuito da figura 5.3	115
Tabela 5.3 - Resultados da medida da resistência equivalente no circuito da figura 5.4.....	116
Tabela 5.4 - Resultados da medida de tensões em um circuito da figura 5.4	117
Tabela 5.5 - Resultados da medida das correntes no circuito da figura 5.5	118

Tabela 5.6 - Resultados da medida das correntes no circuito da figura 5.5 com a bateria V_2 invertida	118
Tabela 6.1 - Resultados das medidas decorrente e tensão no circuito da figura 6.5.	127
Tabela 7.1 - Resultados da medida das tensões durante a descarga de um capacitor	146
Tabela 7.2 - Resultados da medida das tensões durante a carga de um capacitor.....	147
Tabela 7.3 - Resultados da medida da energia eletrostática em capacitores	148
Tabela 8.1 - Caracterização do galvanômetro.....	169
Tabela 8.2 - Calibração de um amperímetro com fundo de escala de 5mA	172
Tabela 8.3 - Calibração de um voltímetro com fundo de escala de 5V	173
Tabela 8.4 - Efeito da resistência interna na medida de tensão	175
Tabela 8.5 - Calibração de um voltímetro com fundo de escala de 5V	176
Tabela 9.1 - Resultados da medida da tensão e frequência de um transformador	193
Tabela 9.2 - Resultados da medida da tensão e frequência de um gerador de funções.....	194
Tabela 9.3 - Curva V-I de um resistor	197
Tabela 9.4 - Resistência de termo-resistores em diferentes temperaturas	198
Tabela 9.5 - Curva V-I de um LED vermelho.....	198
Tabela 9.6 - Curva V-I de um LED azul.....	199
Tabela 9.7 - Resistência de LDR em diferentes situações de luminosidade	199

Tabela 9.8 - Curva V-I de um diodo	200
Tabela 10.1 - Resultado das medidas de calibração da sonda Hall.....	227
Tabela 10.2 - Resultado das medidas do campo magnético de um fio infinito (1).....	229
Tabela 10.3 - Resultado das medidas do campo magnético de um fio infinito (1).....	229
Tabela 10.4 - Resultado das medidas do campo magnético de uma bobina	231
Tabela 10.5 - Resultado das medidas do campo magnético de uma bobina de Helmholtz	233
Tabela 10.6 - Resultado das medidas do campo magnético de uma bobina anti-Helmholtz	234
Tabela 11.1 - Medida do campo magnético de um solenóide percorrido por uma corrente que varia no tempo.....	254
Tabela 11.2 - Lei de Indução de Faraday	257
Tabela 11.3 - Indutância Mútua entre dois solenóides- Onda senoidal no solenóide maior	259
Tabela 12.1 - Função de transferência de um filtro RC	294
Tabela 12.2 - Função de transferência de um filtro RL.....	295
Tabela 13.1 - Parâmetros em sistemas mecânicos e circuitos elétricos.....	316
Tabela 13.2 - Tensões em um circuito RLC série (solução estacionária).....	319
Tabela 13.3 - Ressonância em um circuito RLC.....	321
Tabela 13.4 - Transiente RLC-indutor com núcleo de ar ($L = 10 \text{ mH}$, $C = 47 \text{ nF}$: item g).....	324
Tabela 13.5 - Transiente RLC-indutor com núcleo de ar ($L = 44 \text{ mH}$, $C = 47 \text{ nF}$: item h).....	325

Tabela 13.6 - Transiente RLC-indutor com núcleo de ferro ($C = 47 \text{ nF}$: item i)	325
Tabela 13.7 - Transiente RLC-indutor com núcleo de ar ($L = 44 \text{ mH}$, $C = 6.6 \text{ }\mu\text{F}$: item k).....	325

Capítulo 3 Introdução a Circuitos de Corrente Contínua	65
3.1 Componentes e Equipamentos	65
3.2 Lei de Ohm macroscópica	77
3.3 Experimentos	78
3.3.1 Medidas com ohmímetro	78
3.3.2 Medidas com voltímetro	80
3.3.3 Divisor de tensão	80
3.3.4 Curva tensão versus corrente (V_{xl}) de um resistor	83
3.3.5 Curva V_{xl} de uma lâmpada incandescente	85
3.3.6 Curva tensão versus corrente (V_{xl}) de um diodo	86
3.3.7 Curva tensão versus corrente (V_{xl}) de LEDs	88
Capítulo 4 Resistência e Corrente Elétrica	91
4.1 A Lei de Ohm	91
4.2 O modelo de Drude	94
4.3 Experimentos	101
4.3.1 Um condutor em forma de escada percorrido por corrente	102
4.3.2 Um condutor trapezoidal percorrido por corrente	105
Capítulo 5 Circuitos de Corrente Contínua	107
5.1 Associação de Resistores	107
5.2 Regras de Kirchoff	109
5.3 Experimentos	114
5.3.1 Associação de Resistores em Série	114
5.3.2 Associação de Resistores em Paralelo	116
Capítulo 6 Transferência de Potência em Circuitos de Corrente Contínua	119
6.1 Teorema da Máxima Transferência de Potência	119
6.2 Eficiência da Transferência de Potência	123
6.3 Experimentos	124
6.3.1 Teorema da Máxima Transferência de Potência	125
Capítulo 7 Capacitância e Capacitores	129
7.1 Capacitor de placas paralelas e capacitância	129
7.2 Capacitor Cilíndrico	134
7.3 Associação de Capacitores	137

7.4 Carga e descarga de capacitores	140
7.5 Experimentos	144
7.5.1 Descarga de um Capacitor	145
7.5.2 Carga de um Capacitor	146
7.5.3 Associação de um capacitor carregado com um descarregado	147
Capítulo 8 Instrumentos de Medidas I: voltímetros, amperímetros e ohmímetros.	151
8.1 Galvanômetro d'Ansonval	151
8.2 Voltímetros	154
8.3 Amperímetros	157
8.4 Ohmímetros	159
8.5 Utilização de Voltímetros e Amperímetros em Medidas de Corrente Alternada	162
8.6 Multímetro analógico comercial	165
8.7 Experimentos	168
8.7.1 Caracterização do galvanômetro	168
8.7.2 Adaptação do galvanômetro para funcionar como amperímetro	170
8.7.3 Adaptação do galvanômetro para funcionar como amperímetro	172
8.7.4 Medidas de tensão com o voltímetro construído	173
8.7.5 Adaptação de um galvanômetro para funcionar como ohmímetro	175
Capítulo 9 Instrumentos de Medidas II: Osciloscópios	177
9.1 O osciloscópio analógico	177
9.1.1 Deflexão vertical	179
9.1.2 Deflexão Horizontal (Base de tempo)	180
9.1.3 As entradas do osciloscópio	182
9.1.4 Modo X-Y	182
9.1.5 O painel do osciloscópio	183
9.1.6 Acoplamento AC e DC (Botão 14)	186
9.1.7 Observação simultânea de dois canais (funções Alt, Chop e Add) (Botão 11)	188
9.1.8 Função CH2 Invert (Botão 10)	188

9.1.9 Sincronização dos sistemas de varredura vertical e horizontal (<i>trigger</i>) (Botões 22 a 28).....	189
9.1.10 Medidas de tensões alternadas utilizando o osciloscópio.....	191
9.2 Experimentos	192
9.2.1 Medida da tensão nos terminais de um transformador.....	193
9.2.2 Medida da tensão de um Gerador de Funções	194
9.2.3 Observação da curva V-I de componentes eletrônicos (Modo X-Y).....	194
Capítulo 10 Campo Magnetostático	201
10.1 Campo Magnético-Leis de Ampère e Biot-Savart	201
10.2 Aplicações da lei de Biot-Savart.....	205
10.3 Efeito Hall	218
10.4 Sonda Hall.....	221
10.5 Experimentos	225
10.5.1 Calibração da sonda Hall	225
10.5.2 Medida do campo magnético de um fio retilíneo.....	227
10.5.3 Medida do campo magnético de uma bobina.....	229
10.5.4 Medida do campo magnético para um par de bobinas na configuração de Helmholtz.	232
10.5.5 Medida do campo magnético de uma bobina anti-Helmholtz.	234
Capítulo 11 Lei de Indução de Faraday.....	237
11.1 Leis de Indução de Faraday.....	237
11.2 Indutância mútua e auto-indutância	242
11.3 Armazenamento de energia em indutores	243
11.4 Indutância de algumas configurações simples	246
11.5 Experimentos	249
11.5.1 Caracterização dos solenoides a serem utilizados.	250
11.5.2 Medida do campo magnético de um solenóide percorrido por uma corrente que varia no tempo	251
11.5.3 Caracterização da tensão induzida em uma bobina ...	255
11.5.4 Lei de Indução de Faraday-Lenz e indutância mútua entre dois solenóides	258
Capítulo 12 Circuitos de Corrente Alternada I.....	261

12.1 Definições Gerais.....	261
12.2 Circuitos Resistivos, Capacitivos ou Indutivos.....	263
12.3 A notação complexa	269
12.4 Circuitos RC e RL série	271
12.5 Filtros RC (“passa-alta”) e RL (“passa-baixa”).....	275
12.6 Formulação do Modelo de Drude para correntes alternadas	279
12.7 Experimentos.....	284
12.7.1 Tensão e corrente em resistores, capacitores e indutores em circuitos de corrente alternada.....	285
12.7.2 Curva V_{xl} de resistores, capacitores e indutores.....	289
12.7.3 Filtro RC (passa-alta).....	291
12.7.4 Filtro RL (passa-baixa).....	292
Capítulo 13 Circuitos de Corrente Alternada II	297
13.1 Circuito RLC série (Análise estacionária)	297
13.2 Ressonância	302
13.3 Análise do comportamento transiente.....	309
13.4 Solução geral do circuito RLC	315
13.5 Analogia eletro-mecânica	316
13.6 Experimentos.....	317
13.6.1 Circuito RLC-solução estacionária.....	317
13.6.2 Circuito RLC-ressonância	320
13.6.3 Circuito RLC-solução transiente	321

Apresentação

Esse livro de práticas é destinado a cursos de óptica básica com enfoque experimental, incluindo sugestões de roteiros de experimentos e o suporte teórico necessário para realização dos mesmos. É indicado para cursos de ciências básicas e engenharias. Este material foi escrito baseado na apostila escrita inicialmente pelo Profs. Luis Gustavo Marcassa e Fernando Fernandes Paiva em 2004. Deste então a apostila passou por inúmeras reformulações, que incluíram a reformulação completa dos roteiros existentes e a inclusão de novos. Tais atividades fizeram parte da reformulação do laboratório de Física III do IFSC, realizada pelos Prof. Eduardo Azevedo e Luiz Antonio de Oliveira Nunes e pelos técnicos Ércio Santoni, Hélio Nineli, Jae Antônio de Castro Filho e Antenor F. Petrilli Filho entre 2005 e 2009. Além disso, um conjunto de introduções teóricas foi adicionado em 2007 e revisado em 2010 por Tiago Barbim Batalhão. Finalmente em 2013, os professores Luiz Gustavo Marcassa e Eduardo Ribeiro de Azevedo, juntamente com o Dr. Marcio Fernando Cobo realizaram uma nova revisão dos roteiros e introduções. Por fim foi feito um trabalho de padronização e formatação com o auxílio da biblioteca do IFSC que resultou neste material. O conteúdo corresponde a um curso de 13 experimentos, o que se encaixa dentro de um semestre letivo com aulas semanais. No modo de ver dos autores, os experimentos e conceitos discutidos neste material formam a base de conhecimentos em óptica em nível básico de graduação que estudantes das áreas de ciências exatas devem adquirir para se capacitar adequadamente para atuar tanto na área de científica quanto tecnológica.

Por fim, gostaríamos de receber comentários, atualizações, sugestões e correções de todos aqueles que usarem esse material para que possamos melhorar as futuras edições.

*Tiago Barbim Batalhão
Marcio Fernando Cobo
Eduardo Ribeiro de Azevêdo
Luiz Antônio de Oliveira Nunes
Luiz Gustavo Marcassa*

Capítulo 1 Introdução à eletrostática

Neste capítulo vamos estudar os princípios básicos da eletrostática, como carga elétrica, formas de eletrizar um corpo, lei de Coulomb e “poder das pontas”, além de aplicações como o pára-raios e a gaiola de Faraday

Importante: O conteúdo da introdução teórica é apenas um guia para os conceitos necessários para a realização dos experimentos. Você deve aprofundar os conceitos consultando os livros citados na bibliografia ou outros de sua preferência.

1.1 Eletricidade e carga elétrica

A eletricidade é um fenômeno conhecido desde a Grécia Antiga. Tales de Mileto descreveu como alguns materiais, como o âmbar, ao serem atritados adquiriam a propriedade de atraírem pequenos objetos como fios de cabelo. Em 1600, a palavra “eletricidade” foi cunhada por William Gilbert para se referir a esse efeito; a palavra é derivada do termo grego para “âmbar”, “elektron”.

Os experimentos realizados até o século XVII concluíram que outros materiais como o vidro e peles de animais também apresentavam essa propriedade. Nessa época, o físico francês C. F. du Fay observou que dois objetos, após serem atritados, podiam se repelir ao invés de se atrair. Suas observações podem ser resumidas tomando dois pedaços de vidro e dois de plástico (um canudo de

refrigerante, por exemplo) e atritando todos com papel macio*. Ao aproximar os dois pedaços de vidro, eles se repelem; ao aproximar os dois pedaços de plástico, o mesmo acontece. Entretanto, ao aproximar um pedaço de vidro e um de plástico, eles se atraem.

Em 1733, du Fay propôs que a eletricidade existia em dois tipos, e o atrito entre dois corpos (vidro e papel) podem fazer com que eles troquem esses tipos entre si. Corpos com o mesmo tipo de eletricidade se repelem, e corpos com tipos diferentes se atraem. O tipo de eletricidade presente no vidro atritado por lã foi chamado de “eletricidade vítrea“, e o presente no âmbar de “eletricidade resinosa“.

Na segunda metade do século XVIII, Benjamin Franklin, físico e estadista americano, tratou a eletricidade como um fluido único, presente em toda a matéria, que deveria conter uma quantidade precisa desse; se o houvesse em excesso, a matéria estaria positivamente carregada, e se o houvesse em falta, a matéria estaria negativamente carregada. De forma arbitrária, Franklin definiu que a eletricidade vítrea é positiva (excesso de fluido), e a eletricidade resinosa é negativa (falta de fluido), convenção que é usada até os dias atuais. De acordo com Franklin, quando dois corpos são atritados, o fluido elétrico (que corresponde ao conceito atual de carga elétrica) pode passar de um corpo para o outro, deixando um com excesso e outro com falta, mas não era nunca criado nem destruído. Hoje essa hipótese se converteu na *lei da conservação da carga elétrica*.

Na virada do século XIX, descobriu-se que a carga elétrica é quantizada, o que significa que ela sempre aparece em múltiplos de uma carga elementar, que foi medida por Robert Millikan no seu

experimento com gotas de óleo. Nas unidades do SI, esse valor é $e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$, que é muitas ordens de grandeza menor do que a carga que costuma se acumular nos objetos macroscópicos, de modo que a natureza discreta da carga pode ser desprezada na maioria das vezes.

1.2 Condutores e isolantes

Em 1729, Stephen Gray dividiu os materiais em dois tipos: os condutores e os isolantes. Os condutores eram aqueles que podiam transmitir a eletricidade, e os isolantes eram aqueles nos quais a eletricidade ficava retida. Na visão de Franklin, nos condutores o fluido elétrico podia fluir livremente, enquanto nos isolantes o fluido elétrico ficava preso. Na visão atual, nos condutores as cargas podem se movimentar livremente pelo material, enquanto nos isolantes as cargas quase não têm mobilidade.

Os metais são exemplos de condutores e papéis, madeira e plástico são exemplos de isolantes. O ar é um bom isolante quando está seco, mas tem a sua condutividade aumentada quando úmido.

1.3 Formas de eletrização

Eletrizar um corpo significa torná-lo portador de carga elétrica líquida, seja positiva ou negativa, e é sinônimo de carregar o corpo. As maneiras mais comuns de se fazer isso são: atrito, contato ou indução.

1.3.1 Eletrização por atrito-Efeito triboelétrico

Quando dois corpos são atritados, os átomos mais externos de cada corpo entram em contato intenso e podem trocar carga elétrica, mesmo que um deles seja um isolante. Esse fenômeno é conhecido como *efeito triboelétrico*. Através de experimentos, foi descoberto, por exemplo, que o vidro ao ser atritado com lã sempre adquiria carga positiva, enquanto a lã sempre adquiria carga negativa. Dessa forma, foi possível construir a série triboelétrica mostrada a seguir. Quando dois corpos dessa lista são atritados, o que aparece primeiro ganhará carga positiva, enquanto o último ganhará carga negativa.

Quadro 1.1 - Série triboelétrica

Pele humana
Couro
Vidro
Quartzo
Cabelo humano
Nylon
Seda
Alumínio
Papel
Madeira
Âmbar
Metais (alumínio, cobre, prata, ouro)
Plásticos
Teflon

Fonte: Elaborado pelos compiladores.

1.3.2 Eletrização por contato

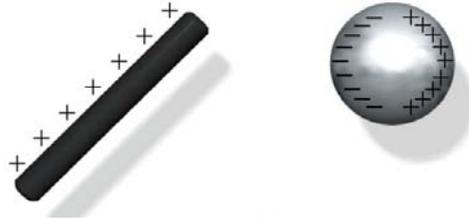
Quando um corpo condutor carregado é posto em contato com outro condutor neutro, parte da carga do primeiro se transfere para o segundo, tornando-o também eletrizado. O primeiro corpo continua eletrizado, mas com uma carga menor. Ao fim do processo, ambos os corpos ficam com carga do mesmo sinal.

Em algumas situações, tomamos um choque quando tocamos em um objeto metálico. O que ocorre nesse caso é que o objeto estava carregado e parte de sua carga passa para o nosso corpo ou o usa como meio de migrar para a terra. A carga que os objetos podem acumular é popularmente chamada de “eletricidade estática”.

1.3.3 Eletrização por indução

Essa forma de eletrização é a única que pode ocorrer sem que o corpo precise entrar em contato com outro. Quando uma carga é colocada próximo de um condutor (sem tocá-lo), induz uma distribuição de cargas no mesmo. Por exemplo, se a carga é um bastão com carga positiva, a parte do condutor mais próximo do bastão ficará com carga negativa, enquanto a parte mais distante ficará positivamente carregada (de modo que o condutor como um todo continue neutro), como mostrado na figura 1.1.

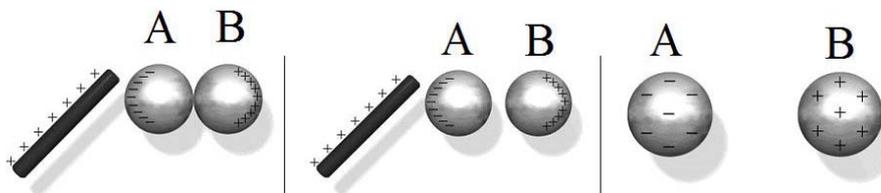
Figura 1.1 - Bastão carregado induzindo uma distribuição de cargas sobre um condutor



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Se, em seguida, o condutor esférico da figura 1.1 for conectado a outro condutor, conforme ilustrado na figura 1.2, haverá uma migração de cargas negativas (elétrons) do segundo condutor (condutor B) para o primeiro (condutor A). Se o bastão for afastado, os condutores voltam a ficar neutros. Entretanto, se a conexão entre eles for cortada antes disso, as cargas não podem mais se transferir de um para outro: o primeiro adquiriu uma carga negativa permanente e o segundo uma carga positiva permanente. Esse processo está mostrado na figura 1.2.

Figura 1.2 - Procedimento para eletrizar um condutor por indução

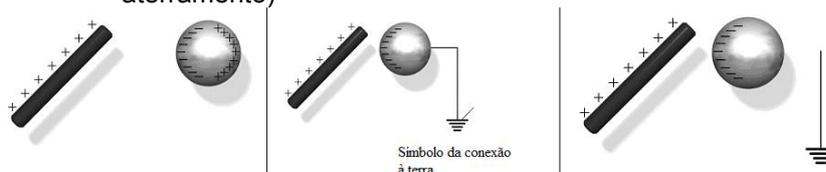


Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Na prática, o segundo condutor pode ser substituído por uma conexão com a terra (aterramento), que pode ser considerada um condutor infinitamente grande que está sempre neutro. Ao fazer isso,

há uma migração de cargas negativas da terra para o condutor, deixando-o com carga negativa. Assim, se conexão à terra for interrompida ainda na presença do bastão o condutor adquirirá permanentemente uma carga negativa. Esse processo é mostrado na figura 1.3.

Figura 1.3 - Procedimento para eletrizar um condutor por indução (usando o aterramento)



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Note que, na eletrização por contato e por indução, há necessidade de um corpo externo já eletrizado. No entanto, na eletrização por contato o condutor adquire a *mesma* carga do corpo externo, enquanto na eletrização por indução o condutor adquire uma carga *oposta* à do corpo externo. Ambas só podem ocorrer em condutores, porque as cargas têm liberdade para se moverem. Num corpo isolante, as cargas têm pouca mobilidade, e por isso eles só podem ser eletrizados por atrito.

1.4 Eletroscópio e pêndulo eletrostático

O eletroscópio é um instrumento usado para detectar carga elétrica. É composto por duas folhas metálicas muito finas posicionadas dentro de uma caixa e ligadas eletricamente a uma esfera metálica fora da caixa, figura 1.4.

Figura 1.4 - Eletroscópio de folhas de ouro



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Quando uma carga (positiva, por exemplo) é colocada próxima à esfera, aparece uma carga oposta (negativa) na esfera devido ao efeito de indução. Conseqüentemente, as folhas ficam com excesso de cargas positivas e se repelem, indicando que o objeto está carregado. Quando a carga externa for afastada, as folhas ficam neutras novamente e voltam para a posição original.

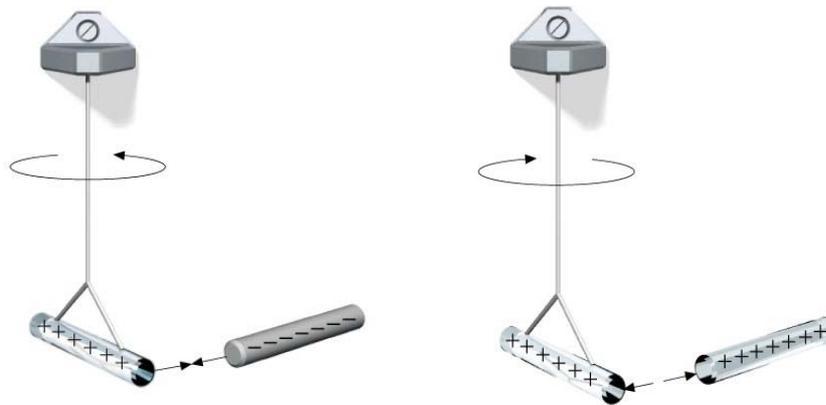
Se a carga tocar a esfera (ao invés de simplesmente estar próxima), o eletroscópio ficará permanentemente carregado, com as suas folhas afastadas, até que seja aterrado (encostando a mão na esfera, por exemplo). Nesse caso, as folhas se eletrizam por contato, e não por indução.

Um eletroscópio só tem a capacidade de diferenciar carga positiva e negativa se ele estiver carregado. Suponha que o eletroscópio está carregado com carga positiva, e aproximamos uma outra carga positiva. Então as cargas negativas da folha migram para

a esfera, deixando as folhas ainda mais positivas e fazendo com que a separação delas aumente. De forma análoga, se aproximarmos uma carga negativa a separação entre as folhas irá diminuir.

Outro arranjo usado para detectar carga elétrica é o pêndulo eletrostático, que consiste de um bastão carregado (com carga de sinal conhecido) pendurado por um fio ou barbante, como na figura 1.5. Se a carga desconhecida é de mesmo sinal, o bastão irá se afastar; se for do sinal oposto, irá se aproximar.

Figura 1.5 - Pêndulo eletrostático, detectando carga de mesmo sinal e carga oposta



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

1.5 Lei de Coulomb e campo elétrico

Em 1766, Joseph Priestley eletrizou um recipiente metálico e notou que toda a carga ficava na superfície externa, e que os corpos dentro do recipiente não sofriam qualquer força elétrica. Newton havia demonstrado que uma casca não cria campo gravitacional dentro dela, e que isso é uma característica única de campos que

variam com o inverso do quadrado da distância. Priestley então propôs que a força elétrica também seria proporcional ao inverso do quadrado da distância, com a frase: “Não podemos inferir desse experimento que a atração elétrica está sujeita às mesmas leis da gravitação, variando com o inverso do quadrado da distância, uma vez que se demonstra facilmente que, se a Terra tivesse a forma de uma casca, um corpo dentro dela não sofreria atração nenhuma?”.

Mais tarde, em 1785, Charles Augustin de Coulomb fez experimentos quantitativos usando uma balança de torção (que havia sido usada por Cavendish para medir a constante gravitacional). Com isso, Coulomb confirmou que a força elétrica é proporcional ao inverso do quadrado da distância, e proporcional à carga das partículas envolvidas, da mesma forma que a força gravitacional é proporcional às massas. Hoje, esse resultado é expresso na chamada lei de Coulomb:

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r} \quad (1)$$

Coulomb foi também capaz de medir a constante eletrostática, que nas unidades atuais do Sistema Internacional é:

$$k = 9.10^9 \text{ Nm}^2 / \text{C}^2 \quad (2)$$

A força elétrica que uma partícula é submetida é diretamente proporcional a sua carga elétrica. Podemos então definir o campo elétrico, como sendo a força por unidade de carga que uma partícula

carregada qualquer (corpo de teste) sofreria quando colocada em cada ponto, isto é:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_2} = k \frac{q_1}{r^2} \hat{r} \quad (3)$$

1.6 Distribuição de cargas em condutores, poder das pontas

Em um condutor carregado, devido à repulsão coulombiana e à alta mobilidade, as cargas livres tendem a ficar o mais afastado possível uma das outras, e por isso se distribuem apenas na superfície, se acumulando nas regiões mais pontiagudas, o que torna o campo elétrico nessas regiões mais intenso. Esse é o fenômeno conhecido como “*poder das pontas*”.

O poder das pontas explica o funcionamento do pára-raios, inventado por Benjamin Franklin em meados de 1750, que demonstrou seu invento em uma experiência famosa, erguendo uma pipa em um dia chuvoso. As nuvens são carregadas, e isso causa um campo elétrico no ar. O ar é normalmente isolante, mas, se for submetido a um campo elétrico muito intenso, pode ser ionizado e tornar-se condutor. Quando isso acontece, ocorre uma descarga elétrica entre a nuvem e o chão, ou entre nuvens, que é popularmente chamada de raio.

O pára-raio é ligado a terra, possui uma ponta fina e é colocado em um ponto alto (normalmente no alto de um prédio). A ponta do pára-raios concentra muitas cargas e gera um alto campo elétrico. Então o ar se ioniza primeiro nessa região e a nuvem se

descarrega através do pára-raios, que proporciona um caminho para a descarga elétrica.

1.7 Blindagem eletrostática

Quando uma casca esférica condutora é carregada, toda a carga fica concentrada na superfície externa, e o campo elétrico dentro da casca é nulo (isso não vale apenas para a casca esférica, mas a toda superfície condutora oca). Se houver uma carga externa próxima, a carga na casca se distribuirá de modo desigual, mas o campo interno continuará nulo. Se a casca for neutra, uma carga oposta deve se acumular na superfície interna, mas ainda assim o campo interno é nulo. A região interna é completamente livre de influências elétricas externas. Qualquer campo elétrico de origem externa produz uma distribuição de cargas na superfície externa da parede da gaiola que cancela o campo na parte interna.

Uma superfície metálica condutora que engloba um volume, como descrito acima, é chamada de *gaiola de Faraday*. Todo o campo elétrico dentro de uma gaiola de Faraday é devido apenas a cargas internas.

O nome é devido a Michael Faraday, que demonstrou esse fato e construiu a primeira gaiola desse tipo em 1836. A discussão acima se refere os campos estáticos, mas a gaiola de Faraday pode também bloquear campos elétricos alternados, dependendo da frequência. Estruturas como túneis e elevadores funcionam como gaiolas de Faraday, e podem bloquear sinais de celular e rádio.

1.8 Experimentos

A seguir são propostos experimentos passíveis de serem realizados no contexto deste tópico. Fica a critério de cada docente a definição de quais itens realizar.

Em todos os experimentos realizados, os valores encontrados experimentalmente deverão ser comparados com valores tabelados ou especificados pelos fabricantes dos componentes.

Sempre que surgir uma dúvida quanto à utilização de um instrumento, consulte o professor para esclarecimentos.

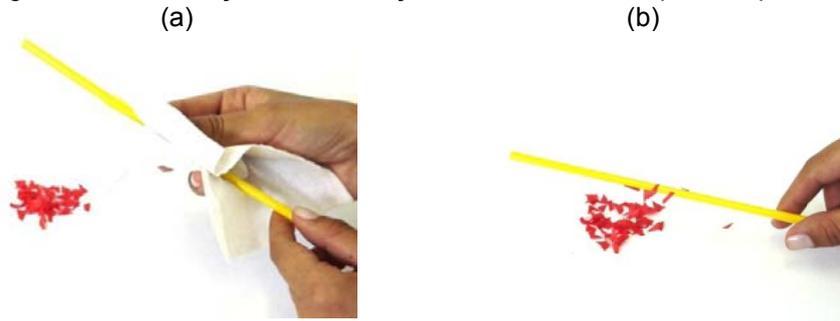
1.8.1 Eletrização por atrito

a) Pegue dois canudos de plástico e um pedaço de papel higiênico. Para eletrizar os canudos, atrite-os com o papel higiênico, tomando o cuidado de **atritar fortemente e sempre na mesma direção**, figura 1.6a.

b) Aproxime um canudo de pequenos pedaços de papel picado. Observe e explique o que acontece.

c) Segure os dois canudos paralelamente entre si e tente aproximá-los lentamente um do outro. O que você percebe quando eles estão bem próximos?

Figura 1.6 - Verificação da eletrização de um canudo de plástico por atrito.



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

1.8.2 Canudo contra a parede

a) Atrite um canudo de refrigerante com papel macio e jogue-o na parede. O que acontece? Explique o fenômeno descrevendo as forças envolvidas na situação.

1.8.3 Eletroscópio

a) Na sua bancada existem alguns eletroscópios de folhas, note que a esfera metálica foi substituída por um disco metálico. Pegue um canudo de refrigerante, e atrite-o com papel higiênico. Aproxime-o e afaste-o do disco metálico com papel alumínio, sem tocá-lo. Observe o que acontece com as tiras de alumínio.

b) Deslize o canudo no disco, e depois afaste o canudo. Observe e explique o que acontece com as tiras de alumínio.

c) Aterre o eletroscópio tocando o disco metálico com o dedo. Em seguida, pegue agora um bastão de vidro, atrite-o com um novo papel higiênico, e repita os dois passos anteriores. Quais são as diferenças entre o plástico e o vidro?

d) Aterre o eletroscópio tocando o disco metálico como o dedo. Em seguida deslize o bastão de vidro eletrizado ao longo de toda superfície do disco metálico. Aproxime o bastão sem tocar novamente. O que acontece?

e) Sem aterrar, aproxime sem tocar o canudo de plástico do disco. O que acontece com o eletroscópio?

f) Atrite o bastão de acrílico (composto por um material plástico conhecido como PMMA) com papel higiênico e aproxime-o do eletroscópio sem tocá-lo nem aterrâ-lo. Compare o que acontece quando se aproxima o canudo plástico (constituído por um material plástico conhecido como PS). Feito isso, faça a mesma comparação com o que ocorre ao aproximar-se o vidro. A partir dessas observações, qual seria a posição do acrílico na série triboelétrica? Justifique.

1.8.4 Eletrização por indução

a) Corte um pedaço de cartolina na forma de um quadrado de cerca de 10 cm de lado. Prenda essa cartolina em um canudo, e fixe o conjunto em um suporte (para que o quadrado fique na vertical). Caso necessário, utilize fita crepe ao redor do suporte para melhor fixar o conjunto.

b) Cole uma tira fina de papel de seda na extremidade superior do quadrado, figura 1.7a.

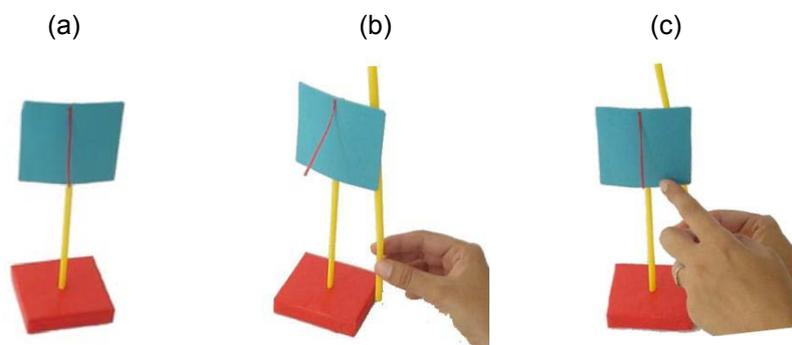
c) Pegue um canudo atritado com papel higiênico, e aproxime-o do lado oposto ao que está o papel de seda, Figura 1.7b. Observe o que acontece e explique.

d) Mantendo o canudo próximo do quadrado, encoste o dedo na parte da frente da cartolina (a parte que tem o papel de seda), Figura 1.7c.

e) Afaste o dedo e, em seguida, o canudo. O que acontece com o papel de seda? Explique.

f) A partir dessas observações, o papel poderia ser classificado como condutor ou isolante? Justifique sua resposta.

Figura 1.7 - Eletrização por indução



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

1.8.5 Poder das pontas

a) Corte uma cartolina em forma de gota, com cerca de 10 cm de comprimento. Cole duas tiras de papel de seda, com cerca de 5 cm de comprimento, uma na ponta e outra no meio da gota.

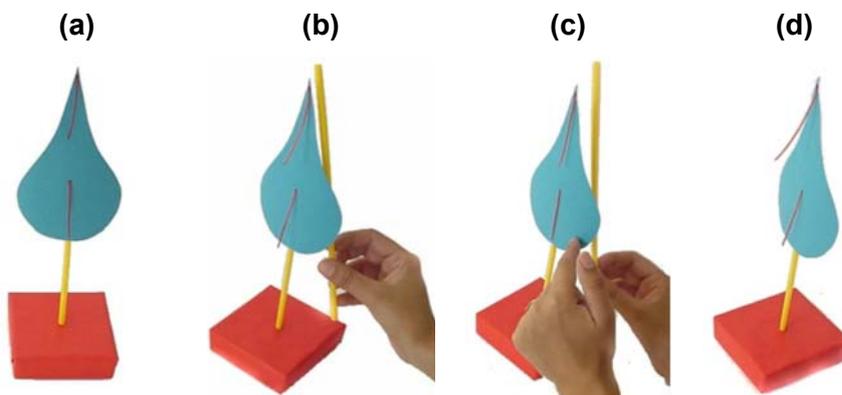
b) Fixe o pedaço de cartolina em um canudo e coloque-o na vertical em um suporte.

c) Atrite um canudo com papel higiênico e aproxime o canudo verticalmente da parte de trás da cartolina (parte onde não

estão as fitas), como ilustrado na Figura 1.8c. Mantendo o canudo aí, encoste o dedo na parte da frente da cartolina.

d) Afaste o dedo e o canudo e observe o que acontece com as fitas. Qual das fitas se levanta mais? Por quê?

Figura 1.8 - Poder das pontas



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

1.8.6 Blindagem eletrostática

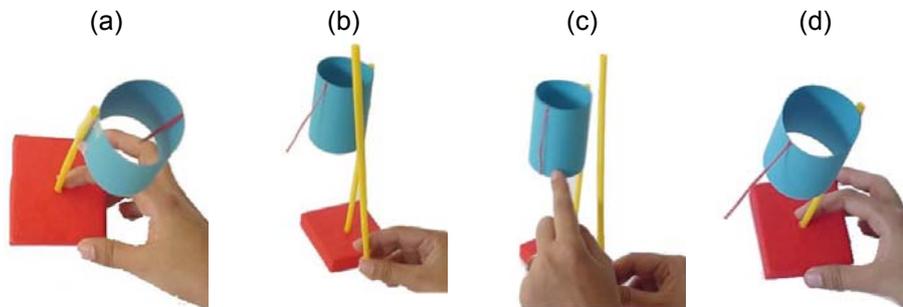
a) Corte uma cartolina na forma de um retângulo de 7 cm por 15 cm. Cole duas folhas de seda em cada face do retângulo. Cole as extremidades do retângulo para formar um cilindro de altura 7 cm. Use um canudo para fazer o suporte desse conjunto, figura 1.9a.

b) Eletrize o cilindro por indução, aproximando um canudo eletrizado da parte de fora do cilindro e colocando o dedo na parte externa do outro lado, figuras 1.9b e 1.9c.

c) Retire primeiro o dedo e depois o canudo. Observe e explique o que acontece com as fitas? Explique o comportamento observado, figura 1.9d.

d) Eletrize o cilindro internamente por indução. Explique o comportamento observado.

Figura 1.9 - Blindagem eletrostática.



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Bibliografia

HALLIDAY, D.; RESNICK, R. **Física III**. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1974.

NUSSENZVEIG, H.M. **Curso de física básica**: eletricidade e magnetismo. São Paulo: Edgard Blucher, 1998. v. 3.

TIPPLER, P.A. **Física**: para cientistas e engenheiros. 3. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 1991. v. 3.

YOUNG, H. D.; FREEDMANN, R. A. **Sears e Zemanski física III**: eletricidade e magnetismo. São Paulo: Pearson, c2004.

Capítulo 2 Eletrostático e mapeamento de equipotenciais

Neste capítulo vamos estudar o comportamento de grandezas como campo elétrico e potencial elétrico. Determinaremos as superfícies equipotenciais e linhas de campo elétrico, além de observar o fenômeno de blindagem eletrostática.

Importante: O conteúdo da introdução teórica é apenas um guia para os conceitos necessários para a realização dos experimentos. Você deve aprofundar os conceitos consultando os livros citados na bibliografia ou outros de sua preferência.

2.1 Potencial e campo eletrostático

Uma propriedade do campo eletrostático é ser um campo *conservativo* (seu rotacional é nulo). A força elétrica é simplesmente o campo multiplicado por uma constante (a carga de prova) e também é conservativa. É conhecido da mecânica que as forças conservativas são muito mais simples de se analisar, porque o trabalho que elas realizam depende apenas dos pontos inicial e final, e não da trajetória. Isso permite definir uma função escalar, chamada energia potencial, de tal forma que, se apenas a força conservativa atuar, a soma da energia cinética com a energia potencial permanece constante (essa constante é denominada energia total).

$$U(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_o}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -q \int_{\vec{r}_o}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (1)$$

Da mesma forma que a força é proporcional à carga elétrica, a energia potencial também é. Podemos então definir a energia potencial por unidade de carga, que é chamado de potencial elétrico:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{q} U(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_o}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (2)$$

A equação 2 dá o potencial se o campo for conhecido. No entanto, é mais fácil medir o potencial, porque esse é uma função escalar, enquanto o campo é vetorial; ou seja, para determinar o potencial, precisamos apenas de um número, enquanto que para determinar o campo precisamos saber a intensidade, a direção e o sentido. Para calcular o campo supondo conhecido o potencial, precisamos da relação inversa da equação 2, que é:

$$\vec{E} = -\nabla V \quad (3)$$

Uma superfície equipotencial é aquela sobre a qual o potencial é constante: a diferença de potencial entre dois pontos quaisquer da superfície é nula. Portanto, sobre uma equipotencial:

$$-\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (4)$$

Sendo $\vec{\Delta S}$ o vetor unitário perpendicular a uma superfície equipotencial, temos, de forma aproximada:

$$\vec{E} = -\frac{\Delta V}{\Delta s} \vec{\Delta S} \quad (5)$$

2.2 Medidas de potenciais e campos eletrostáticos

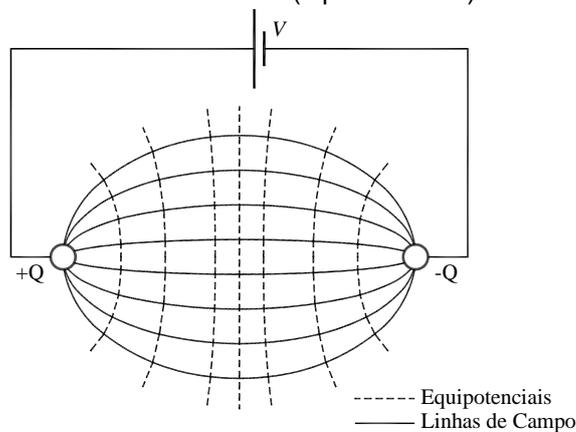
As medidas de potenciais e campos eletrostáticos são experimentos difíceis de serem realizados em laboratório convencionais de ensino. Isto ocorre porque o meio no qual o campo é gerado é altamente isolante, e a resistência equivalente entre dois pontos é grande, comparável ou até maior do que a resistência interna dos voltímetros comerciais, de modo que a leitura seria totalmente errônea. Tais medidas exigiriam instrumentos de altíssima resistência interna, como voltímetros eletrostáticos ou eletrômetros e condições ambientais especiais, tais como baixo teor de umidade, atmosfera inerte ou alto vácuo.

Contudo, podemos contornar esta situação fazendo o mapeamento em um meio com baixa resistividade como, por exemplo, uma solução aquosa de CuSO_4 . Este eletrólito possui cargas que podem se deslocar quando sujeitas à ação de um campo

elétrico, que surge quando conectamos uma fonte de tensão a eletrodos metálicos mergulhados no eletrólito. A distribuição de cargas nas superfícies dos eletrodos dá origem a um campo eletrostático no meio eletrolítico. Dessa forma, o potencial $V(P)$ nos diferentes pontos do eletrólito pode ser mapeado e possibilita o estudo do campo eletrostático bidimensional correspondente. Esse método é muito usado na prática para determinar as figuras de potencial de objetos de diferentes formatos, e pode inclusive ser usado para estudar um campo elétrico tridimensional, mergulhando o objeto totalmente no meio eletrolítico.

Para ilustrar o método de mapeamento, a figura 2.1 ilustra as linhas de campo e as superfícies equipotenciais de dois eletrodos simulando cargas pontuais, opostas e de mesmo módulo (dipolo elétrico). Uma bateria cria a diferença de potencial entre os eletrodos e faz com que um fique com carga positiva e o outro fique com carga negativa.

Figura 2.1 - Padrão do campo elétrico gerado por duas cargas de sinais opostos e mesmo módulo (dipolo elétrico)



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

As equipotenciais podem ser traçadas ligando um conjunto de pontos que possuem o mesmo valor de potencial, os quais podem ser determinados utilizando um voltímetro convencional. Uma vez traçado um conjunto de linhas equipotenciais, as linhas de campo podem ser encontrada traçando-se linhas perpendiculares as mesmas. O valor do campo elétrico em cada ponto pode ser encontrado de forma aproximada utilizando a equação 5.

2.3 Experimentos

A seguir são propostos experimentos passíveis de serem realizados no contexto deste tópico. Fica a critério de cada docente a definição de quais itens realizar.

Em todos os experimentos realizados, os valores encontrados experimentalmente deverão ser comparados com valores tabelados ou especificados pelos fabricantes dos componentes.

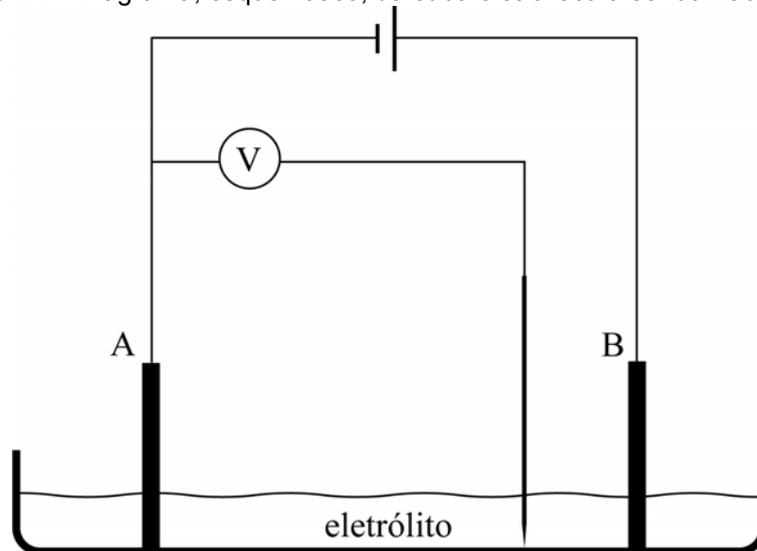
Sempre que surgir uma dúvida quanto à utilização de um instrumento, consulte o professor para esclarecimentos.

2.3.1 Medidas do potencial entre cargas pontuais utilizando uma cuba

a) A figura 2.2 ilustra um esquema da montagem experimental a ser utilizada nesta prática. Na cuba é colocado um eletrólito constituído por uma solução aquosa de CuSO_4 . Na parte de baixo da cuba há uma folha de papel milimetrado, para servir de guia para as medidas (figura 2.3). Os eletrodos A e B são ligados a uma

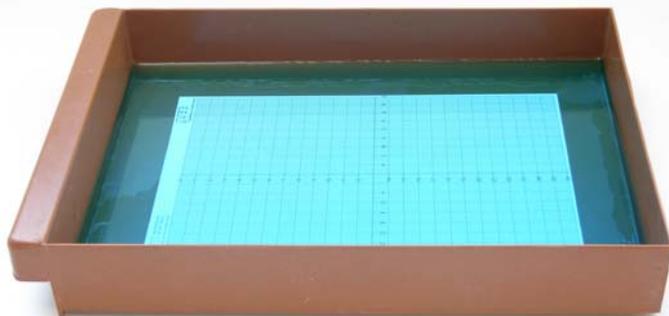
fonte de corrente contínua e um voltímetro é utilizado para monitorar a diferença de potencial entre o eletrodo A e um ponto no interior do eletrólito.

Figura 2.2 - Diagrama, esquemático, da cuba eletrolítica a ser utilizada



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

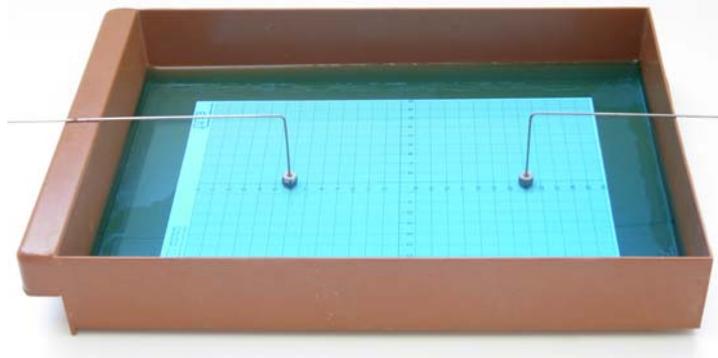
Figura 2.3 - Fotografia da cuba eletrolítica, mostrando o papel milimetrado



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

b) Nesta parte, vamos utilizar dois eletrodos cilíndricos para simular um dipolo formado por duas “cargas pontuais” de sinais opostos. Posicione os eletrodos na cuba como mostrado a figura 2.4 (Sugestão: coloque os eletrodos separados por uma distância de 12 cm um do outro). Configure o voltímetro para medidas de tensão contínua (DC) e conecte o terminal comum do mesmo ao eletrodo ligado ao terminal negativo da fonte (eletrodo de referência, marcado como A na figura 2.2), ao qual será atribuído o valor de potencial $V_A = 0$ V. Dicas: i) Os eletrodos devem permanecer fixos durante a realização do experimento (se necessário, utilize fita adesiva para fixá-los na cuba); ii) cheque se o papel milimetrado e os eletrodos estão corretamente posicionados; iii) utilize o protoboard para facilitar as ligações, principalmente para conectar o terminal negativo da fonte ao eletrodo de referência e ao terminal comum do voltímetro.

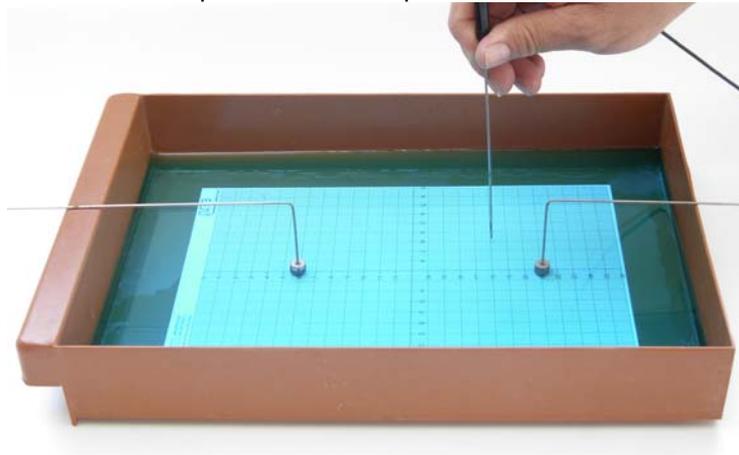
Figura 2.4 - Dois eletrodos cilíndricos mergulhados na cuba eletrolítica



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

c) O outro terminal do voltímetro servirá como “sonda móvel”, a ser posicionada em qualquer ponto do líquido. Ele será acoplado a uma ponta metálica fina, que, ao ser imersa em um ponto qualquer do eletrólito, fará com que o voltímetro indique a tensão entre o ponto de imersão (P) e o eletrodo de referência (A), permitindo a medida do valor do potencial, $V(P)$, em qualquer coordenada do eletrólito. O valor do potencial será, então, dado pela leitura do voltímetro, uma vez que por convenção $V_A = 0$ V.

Figura 2.5 - Medindo o potencial em um ponto da cuba eletrolítica



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

d) O mapeamento de uma determinada superfície equipotencial será feito movendo-se a “sonda móvel” de forma tal forma a encontrar o conjunto de pontos em que a leitura do voltímetro permaneça constante. As coordenadas dos pontos pertencentes das superfícies equipotenciais serão obtidas com auxílio do papel milimetrado localizado dentro da cuba eletrolítica. Essas coordenadas, bem como os contornos dos eletrodos, deverão ser transferidas para outro papel milimetrado no decorrer da medida.

O procedimento deverá ser repetido para um número de equipotenciais suficientes para o mapeamento do campo elétrico. Para tal, sugere-se que essas equipotenciais estejam espaçadas por pelo menos 2 cm uma da outra. Além disso, cada superfície equipotencial deve conter, aproximadamente, 10 pontos equidistantes.

e) Com base no conjunto de pontos medidos para cada superfície equipotencial, esboce no papel milimetrado uma linha tracejada representando cada uma das superfícies equipotenciais medidas.

f) Desenhe o conjunto de linhas ortogonais às equipotenciais de modo a obter as linhas de campo elétrico.

g) Determine, utilizando a equação 5, o valor do campo ao longo do eixo que une os eletrodos em três pontos, sendo um próximo de cada eletrodo e o outro no centro. Determine, também, o valor do campo elétrico em um ponto fora do eixo. Obviamente, este procedimento fornece apenas um valor aproximado para o campo, já que ΔS não é uma quantidade infinitesimal.

h) Desenhe uma curva fechada qualquer interceptando várias equipotenciais, ou seja, N intervalos. Calcule, então, o valor de

$\sum_{i=1}^N (V_{i+1} - V_i)$ ao longo do circuito e relacione com a equação 4.

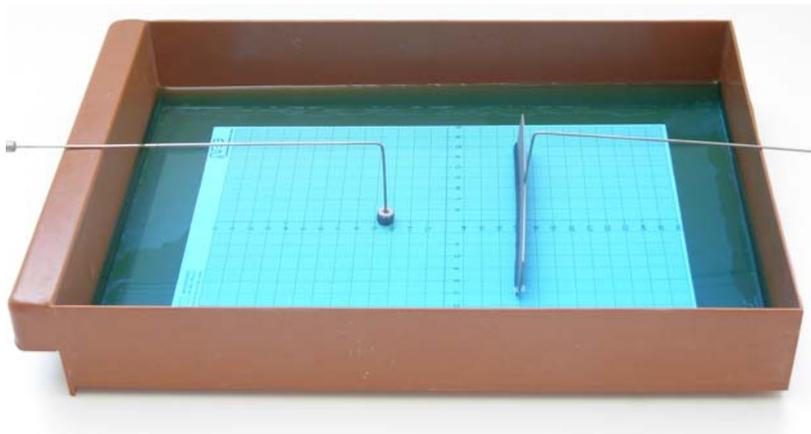
Tabela 2.1 - Mapeamentos das equipotenciais de duas cargas pontuais

x(cm)	y(cm)	V(V)	x(cm)	y(cm)	V(V)	x(cm)	y(cm)

2.3.2 Medida do potencial entre uma carga pontual e uma placa

a) Vamos utilizar agora um eletrodo cilíndrico e um eletrodo em forma de placa, simulando uma carga pontual e um plano carregado. Mergulhe os dois eletrodos com uma distância de cerca de 5 cm um do outro, como na figura 2.6.

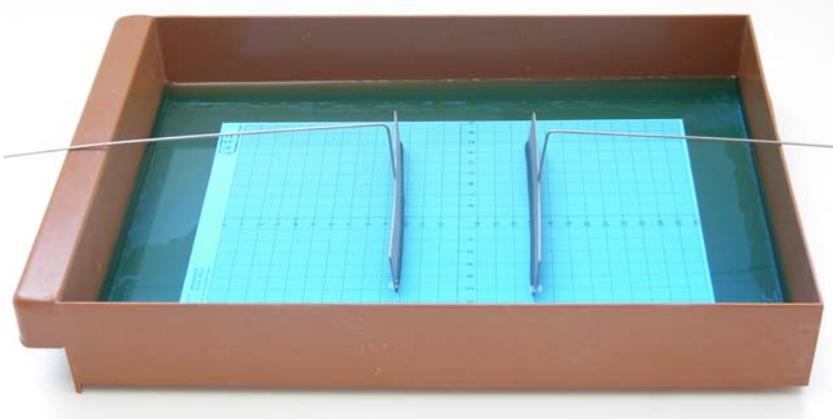
Figura 2.6 - Um eletrodo cilíndrico e um em forma de placa mergulhados na cuba eletrolítica



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Posicione os dois eletrodos na cuba como mostrado na figura 2.7 (Sugestão: coloque os eletrodos separados por uma distância de 12 cm um do outro e para verificar se estão corretamente alinhados verifique se a equipotencial no ponto médio entre os dois eletrodos é uma reta perpendicular ao eixo que os liga.).

Figura 2.7 - Dois eletrodos em forma de placa mergulhados na cuba eletrolítica



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

b) Mapeie as superfícies equipotenciais dessa configuração na região entre as placas. Nessa região, as equipotenciais devem estar espaçadas entre si de 2 cm; anote pelo menos 10 pontos por equipotencial.

c) Com base no resultado do item b, calcule o campo elétrico (usando a equação 5) em diferentes pontos ao longo do eixo entre as placas.

d) Investigue como são as equipotenciais e o campo elétrico em torno das bordas das placas.

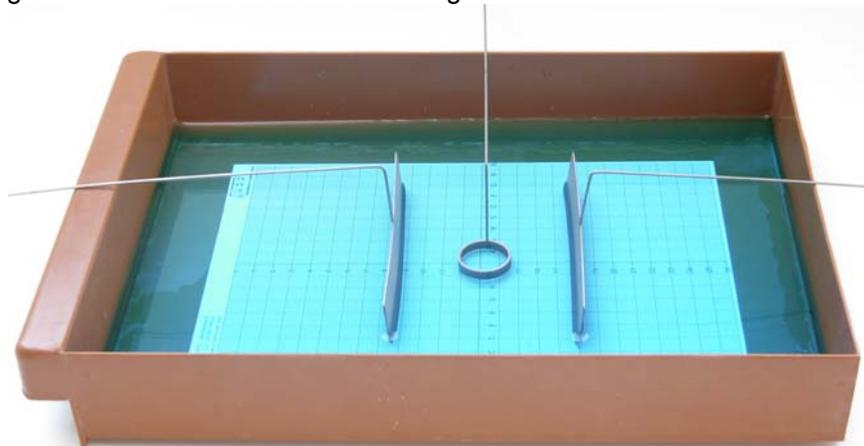
Tabela 2.3 - Mapeamentos das equipotenciais entre duas placas planas e paralelas

x(cm)	y(cm)	V(V)	x(cm)	y(cm)	V(V)	x(cm)	y(cm)	V(V)

2.3.4 Determinação do potencial em torno de um condutor oco

a) Mantendo a mesma configuração de eletrodos do item 3, insira um eletrodo cilíndrico metálico oco no centro da cuba, como na figura 2.8. Seguindo o mesmo procedimento anterior, determine as curvas equipotenciais que passam próximas (a ~ 1 cm) aos dois lados do eletrodo cilíndrico e a 1cm das duas placas condutoras.

Figura 2.8 - Eletrodo cilíndrico oco mergulhado na cuba eletrolítica



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

b) Meça também o potencial em pelo menos 5 pontos no interior do cilindro oco e explique o comportamento observado baseado na equação 4.

c) Baseado nas superfícies equipotenciais medidas no item a) e em seu conhecimento geral de linhas de campo elétrico, esboce as linhas de campo elétrico no interior da cuba e discuta por que as linhas de campo são normais às superfícies metálicas.

Tabela 2.4 - Mapeamentos das equipotenciais de um cilindro condutor entre duas placas planas e paralelas

x(cm)	y(cm)	V(V)	x(cm)	y(cm)	V(V)	x(cm)	y(cm)	V(V)

d) Meça o potencial ao longo do eixo perpendicular às placas e que passa pelo centro do anel, em intervalos de 1 cm. Por meio dessa medida, estime o módulo do campo elétrico ao longo desse eixo. Faça gráficos do potencial e do campo elétrico como função da distância à placa de referencia e discuta o comportamento das curvas.

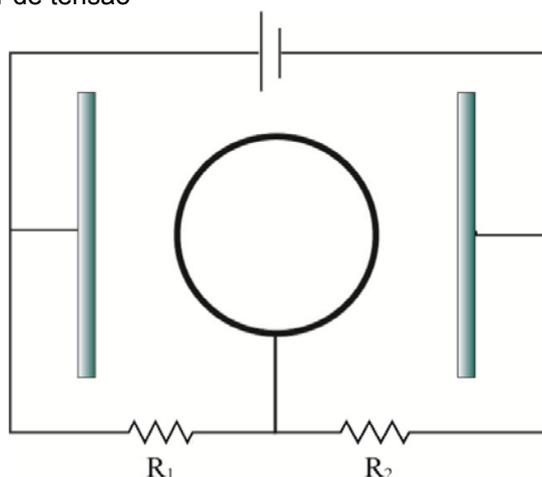
Tabela 2.5 - Medida do potencial ao entre duas placas paralelas ao longo do eixo de simetria.

x(cm)	V(V)	x(cm)	V(V)	x(cm)	V(V)

e) Utilizando o cilindro metálico, monte o circuito indicado na Figura 2.9, que é conhecido como divisor de tensões. Usando $R_1 = 100 \Omega$ e $R_2 = 47 \Omega$ ajuste a tensão da fonte para obter uma corrente total em torno de 20 mA.

f) Meça o potencial elétrico ao longo do eixo perpendicular às placas e que passa pelo centro do anel, em intervalos de 1cm. Por meio dessa medida, estime o módulo do campo elétrico ao longo desse eixo. Faça gráficos do potencial e do campo elétrico como função da distância à placa de referencia e discuta o comportamento das curvas, discutindo e justificando as diferenças observadas em relação ao item d.

Figura 2.9 - Cilindro metálico oco mergulhado na cuba eletrolítica junto a um divisor de tensão



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Tabela 2.6 - Medida de $V(P)$ entre duas placas paralelas (com divisor de tensão) ao longo do eixo de simetria

$x(\text{cm})$	$V(\text{V})$	$x(\text{cm})$	$V(\text{V})$	$x(\text{cm})$	$V(\text{V})$	$x(\text{cm})$	$V(\text{V})$

g) Substitua o cilindro metálico oco por um cilindro plástico oco, como na figura 2.9. Assim como no item e), meça o potencial ao longo do eixo perpendicular às placas e que passa pelo centro do anel, em intervalos de 1cm. Por meio dessa medida, estime o módulo do campo elétrico ao longo desse eixo. Faça gráficos do potencial e do campo elétrico como função da distância à placa de referencia e discuta o comportamento das curvas, comparando com o resultado obtido no caso do cilindro metálico.

Tabela 2.8 - Medida de $V(P)$ entre duas placas paralelas (com cilindro de plástico) ao longo do eixo

$x(\text{cm})$	$V(\text{V})$	$x(\text{cm})$	$V(\text{V})$	$x(\text{cm})$	$V(\text{V})$

Bibliografia

HALLIDAY, D.; RESNICK, R. **Física III**. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1974.

NUSSENZVEIG, H.M. **Curso de física básica: eletricidade e magnetismo**. São Paulo: Edgard Blucher, 1998. v.3.

TIPPLER, P.A. **Física: para cientistas e engenheiros**. 3. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 1991. v. 3.

YOUNG, H. D.; FREEDMANN, R. A. **Sears e Zemanski física III: eletricidade e magnetismo**. São Paulo: Pearson, c2004.

Capítulo 3 Introdução a circuitos de corrente contínua

Neste capítulo vamos nos familiarizar com os componentes e instrumentos que serão utilizados durante o curso. Também faremos a verificação experimental da Lei de Ohm e discutiremos alguns casos em que ela não é obedecida. Para tal, faremos uso da placa de montagem, fonte de tensão, resistores, lâmpada incandescente, diodo e instrumentos de medida como voltímetro, amperímetro e ohmímetro.

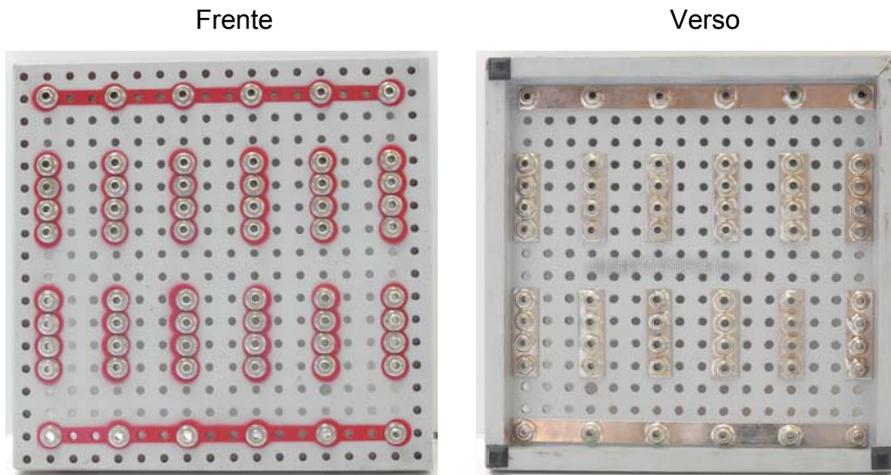
Importante: O conteúdo da introdução teórica desta apostila é apenas um guia para os conceitos necessários para a realização dos experimentos. Você deve aprofundar os conceitos consultando os livros citados na bibliografia ou outros de sua preferência.

3.1 Componentes e equipamentos

O material necessário para execução de cada prática estará disponível na bancada. A seguir discutiremos as características daqueles que são comuns a todas as práticas do curso. Instrumentos e materiais específicos de uma determinada prática serão descritos em detalhes durante a realização da mesma.

a) Placa de Montagem

Figura 3.1 - Placa de montagem de circuitos. O verso da placa mostra as conexões



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

A principal função da placa de montagem é permitir a fixação e interligação dos componentes. Esta placa é constituída por conectores (conhecidos como conectores “bananas fêmeas”), que podem ou não estar interligados eletricamente entre si. Cada conjunto de 4 conectores lado a lado está conectado entre si, e os conectores isolados de cada lado da placa também são conectados. Para verificar a existência de tais conexões observe o lado oposto da placa. Recomenda-se que, sempre que se montar um circuito, conferir atentamente todas as ligações antes de conectá-lo à fonte de alimentação.

b) Fontes de Tensão Contínua

Na maioria dos experimentos serão utilizadas fontes de tensão contínua para a alimentação dos circuitos. Elas poderão ser pilhas convencionais (1,5 ou 9V) ou uma fonte especial, que transforma a tensão alternada da rede (110 ou 220V, 60Hz) em tensão contínua, que pode ser variada entre 0 e 30 V. Essas fontes possuem três conectores, [+], [-] e [terra]. O conector [terra] está ligado à carcaça do equipamento, e os demais [+] e [-] são usados para alimentar o circuito.

Figura 3.2 - Fonte de tensão DC



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

A fonte que será utilizada é o modelo MPL-1303 da Minipa, mostrada na figura 3.2 . Ela contém dois mostradores digitais, de corrente e de tensão. No lado direito, dois cursores (um para ajuste fino e outro para ajuste grosso) permitem limitar a corrente máxima que a fonte pode fornecer. Do lado esquerdo, dois cursores controlam a tensão que a fonte fornece entre os conectores [+] e [-].

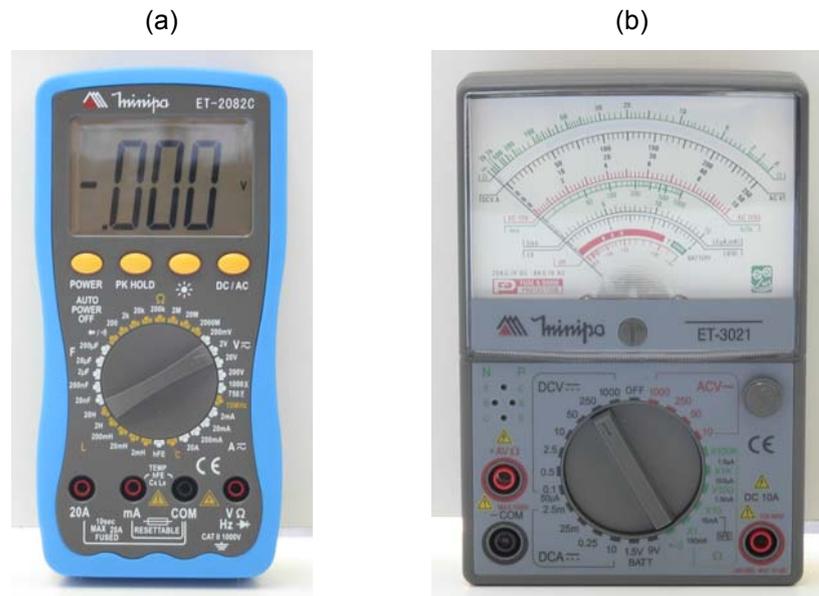
Para simplicidade da montagem (e conferência) recomenda-se que se usem fios vermelhos ligados ao terminal [+] e fios pretos ao terminal [-]. Para utilizar esse tipo de fonte recomenda-se o seguinte procedimento: i) com a fonte desligada zerar todos os cursores; ii) conectar os cabos para alimentação do circuito nas saídas da fonte (terminais [+] e [-]); iii) ligar a fonte; iv) girar o cursor de ajuste de corrente (grosso) $\frac{1}{4}$ do curso máximo; v) ajustar a tensão desejada utilizando os cursores de ajuste de tensão.

c) *Multímetros*

São instrumentos de múltiplas funções e servem para medir grandezas elétricas como tensão, corrente e resistência. O multímetro apresenta, normalmente, quatro terminais de entrada e uma chave seletora de função, que o permite operar como voltímetro, amperímetro ou ohmímetro. Como voltímetro e amperímetro pode-se escolher ainda os modos de operação em regime de corrente contínua (DC) ou de corrente alternada (AC). A seleção de AC ou DC costuma ser feita em um botão, separado da chave seletora. No entanto, é possível que essas configurações variem de acordo com o fabricante do instrumento, sendo então muito importante consultar o manual do instrumento antes de usá-lo.

A figura 3.3 mostra um multímetro digital e um analógico dos modelos que serão utilizados no curso. O digital é um modelo ET-2082C, e o analógico é um modelo ET-3021, ambos da Minipa.

Figura 3.3 - (a) Multímetro digital. (b) Multímetro analógico



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

O procedimento mais seguro, quando se vai medir tensão ou corrente, é escolher uma escala de máxima tensão ou corrente, ligar o equipamento no circuito e só aí, se for possível, aumentar a sensibilidade, escolhendo escalas de mais baixa tensão ou corrente. O amperímetro deve ser conectado em série com o ramo do circuito que se deseja medir a corrente. **Nunca conecte um amperímetro em paralelo com qualquer fonte de tensão ou corrente.**

Quando usado como ohmímetro, **a medida não deve ser realizada com a fonte de tensão ligada.** Também não pode haver nenhum outro caminho entre os dois terminais do ohmímetro além daquele que se deseja medir a resistência. Deve-se cuidar para que os dedos não toquem os terminais durante a medida, pois a

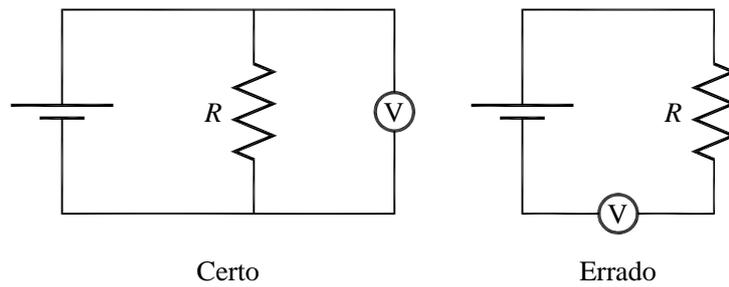
condução elétrica através da pele pode alterar a medida de resistências de valores altos ($\sim 100 \text{ K}\Omega$).

O multímetro digital tem quatro entradas. Uma delas, chamada de COM, é uma entrada comum a todas as funções do instrumento, e, portanto, sempre é usada. Em circuitos de corrente contínua, ela é o pólo negativo dos voltímetros, amperímetros. Outra entrada é chamada de $V\Omega$, e é usada como pólo positivo quando o multímetro é operado como voltímetro. Por fim, temos duas entradas positivas para a operação como amperímetro, uma para medir correntes da ordem de mA e outra para correntes de até 10 A ou 20 A.

O multímetro analógico possui um controle chamado Ω ADJ, que serve para zerar a escala do ohmímetro. Antes de qualquer medida de resistência, é preciso ligar os dois terminais em curto e girar o controle de ajuste até posicionar o ponteiro na posição zero da escala (que corresponde à deflexão máxima).

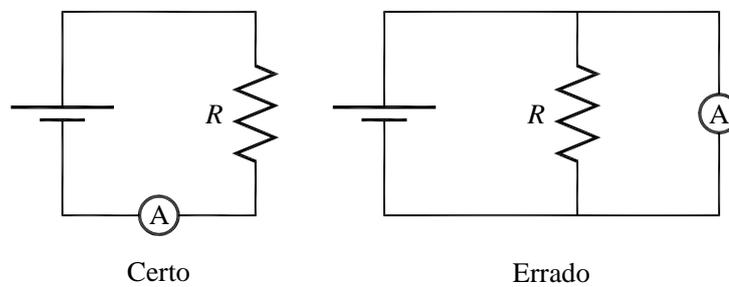
As figuras 3.4, 3.5 e 3.6 mostram exemplos de voltímetros, amperímetros e ohmímetros conectados de modo correto ou incorreto nos circuitos:

Figura 3.4 - Exemplos de um voltímetro conectado corretamente e incorretamente em um circuito



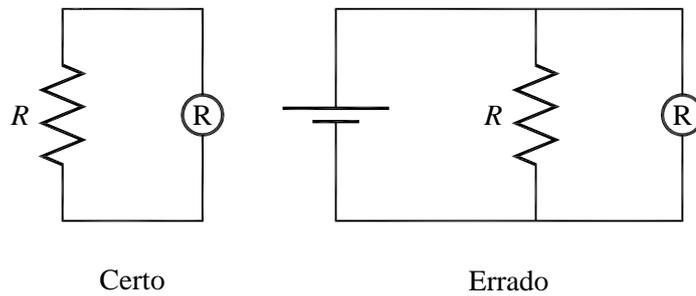
Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Figura 3.5 - Exemplos de um amperímetro conectado corretamente e incorretamente em um circuito



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Figura 3.6 - Exemplos de um ohmímetro conectado corretamente e incorretamente em um circuito



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

d) Resistores

De maneira geral, podemos dizer que um resistor é um elemento de circuito elétrico que produz uma oposição à passagem da corrente elétrica. Os resistores ôhmicos são aqueles cuja resistência elétrica independe da diferença de potencial aplicada entre os terminais. Existem resistores ôhmicos comerciais com diversos valores e poder de dissipação. A figura 3.7 mostra três modelos de resistores, cuja principal diferença está na potência que eles podem dissipar. As especificações disponibilizadas pelos fabricantes para essas características são usualmente denominados valores nominais.

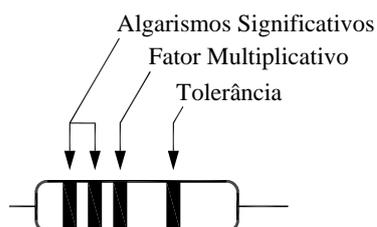
Figura 3.7 - Exemplo de três modelos de resistores. Em ordem, da esquerda para a direita, quanto à potência que podem dissipar



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

O valor nominal de alguns resistores comerciais é marcado com barras coloridas, de acordo com um código ilustrado na tabela 3.1. A leitura é feita tomando-se o componente de forma que a faixa mais próxima de um de seus terminais fique à sua esquerda (essa é a primeira faixa). A figura 3.8 mostra a ordem das faixas, e a tabela 3.1 mostra o código de cores.

Figura 3.8 - Código para leitura do valor nominal da resistência de um resistor



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

As duas primeiras faixas representam os dois algarismos significativos do valor da resistência. A terceira faixa dá o fator multiplicativo, em potência de dez. Por exemplo, se as duas primeiras faixas forem, respectivamente, vermelho (2) e violeta (7), lê-se 27. Se a terceira faixa for amarela (4), o fator multiplicativo é 10^4 . Multiplica-se, então, 27 por 10000 e obtém-se o valor nominal da

resistência de 270000Ω , ou $270 \text{ k}\Omega$. A quarta faixa corresponde à precisão com que o fabricante garante o valor nominal, chamada tolerância. Outra indicação é o tamanho físico do resistor, que, para resistores fabricados utilizando o mesmo processo e material, determina a máxima potência que ele pode dissipar sem alterar suas características. No curso usualmente utilizaremos resistores capazes de dissipar potências de $1/8$, $1/4$, $1/2$, 1 e 5 W (Watt).

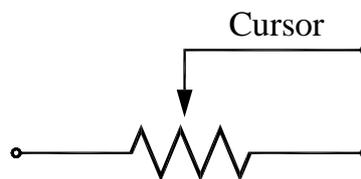
Tabela 3.1 - Código de cores de resistores

Cor	1º Faixa	2º Faixa	3º Faixa	4º Faixa
Preto	-	0	x1	-
Marrom	1	1	x10	1%
Vermelho	2	2	x10 ²	2%
Laranja	3	3	x10 ³	-
Amarelo	4	4	x10 ⁴	-
Verde	5	5	x10 ⁵	-
Azul	6	6	x10 ⁶	-
Violeta	7	7	-	-
Cinza	8	8	-	-
Branco	9	9	-	-
Ouro	-	-	-	5%
Prata	-	-	-	10%

e) Reostatos e Potenciômetros

Reostatos e potenciômetros são resistores cujo valor da resistência pode ser ajustado externamente. Um potenciômetro típico está mostrado na figura 3.9, assim como o seu símbolo elétrico. Eles apresentam três terminais, sendo que dois deles estão ligados às extremidades de um resistor fixo. O terceiro terminal pode deslizar ao longo do resistor fixo. A resistência entre esse terminal e qualquer um dos outros dois é determinada pela posição do conector móvel, que pode ser alterada girando (ou transladando em alguns tipos de potenciômetros) um cursor. O valor indicado no potenciômetro corresponde à resistência entre os terminais fixos, que também é a maior resistência que pode ser ajustada entre um terminal fixo e um móvel.

Figura 3.9 - (a) Exemplo de potenciômetro. (b) Símbolo elétrico do potenciômetro.

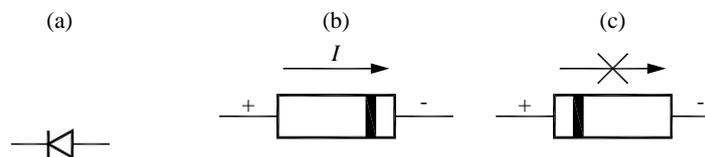


Fonte: Elaborada pelos compiladores.

f) Diodos

O diodo é um elemento de circuito que só deixa passar corrente em um único sentido. O diodo que será usado no laboratório tem um dos seus terminais marcado com uma faixa branca; esse terminal é o cátodo. A corrente só pode fluir do ânodo para o cátodo.

Figura 3.10 - (a) Símbolo elétrico de um diodo semicondutor. (b) Diodo polarizado diretamente, conduzindo corrente. (c) Diodo polarizado reversamente; nesse caso, a corrente não pode fluir.



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Quando o potencial no cátodo é mais baixo que o do ânodo, é dito que o diodo está polarizado *diretamente*, e pode conduzir. Caso contrário, o diodo está polarizado *reversamente*. Em uma abordagem mais precisa, a relação entre tensão e corrente em um diodo é dada por:

$$I = I_o (e^{eV/k_B T} - 1) \quad (1)$$

Onde k_B é a constante de Boltzmann e T é a temperatura em Kelvins. O parâmetro I_o é da ordem de nA. Nas situações de interesse, a corrente é muito maior que I_o , o que significa que a

exponencial do segundo membro é muito maior do que a unidade. Assim, podemos simplificar a equação anterior para:

$$I = I_0 e^{eV/k_B T} \quad (2)$$

3.2 Lei de Ohm macroscópica

Uma das consequências básicas das leis da eletrostática é que o valor do potencial elétrico é o mesmo em todos os pontos de um condutor. Em outras palavras, não há diferença de potencial entre dois pontos quaisquer de um metal. Isto é característico da situação de equilíbrio em que as cargas se encontram. Entretanto, na presença de um campo elétrico surge uma força sobre essas cargas, colocando-as em movimento. Uma análise preliminar nos leva a imaginar que, sob a influência desta força, a velocidade das cargas aumente indefinidamente. Na verdade, isso não ocorre, pois os íons que compõem o material impõem resistência ao movimento ordenado dessas cargas, o que é caracterizado macroscopicamente pela resistência elétrica do material, R .

Existe um modelo simples, denominado *modelo de Drude*, que permite relacionar grandezas macroscópicas, como corrente elétrica, tensão e resistência, com propriedades microscópicas, como velocidade de migração das cargas, densidade específica dos átomos, etc. Esse modelo será discutido em detalhes em outra oportunidade. Uma consequência direta da aplicação do modelo é a relação entre a corrente elétrica que atravessa certo material, sua resistência elétrica e a tensão aplicada, que é dada por:

$$V = RI \quad (3)$$

Essa expressão é a conhecida forma macroscópica da lei de Ohm, e será verificada experimentalmente nesta prática. No caso de resistores ôhmicos o valor da resistência R é independente de V e de I . No entanto, como veremos nos experimentos a seguir, existem muitos tipos de resistores que não obedecem à lei de Ohm, os chamados resistores não ôhmicos.

3.3 Experimentos

A seguir são propostos experimentos passíveis de serem realizados no contexto deste tópico. Fica a critério de cada docente a definição de quais itens realizar.

Em todos os experimentos realizados, os valores encontrados experimentalmente deverão ser comparados com valores tabelados ou especificados pelos fabricantes dos componentes.

Sempre que surgir uma dúvida quanto à utilização de um instrumento, consulte o professor para esclarecimentos.

3.3.1 Medidas com ohmímetro

a) Sobre sua bancada existem 8 resistores de valores distintos. Anote as cores e use o código para determinar o valor nominal dessas resistências. Note que alguns resistores são identificados pelo valor da resistência já impressa no resistor. No entanto, devido a dificuldade que alguns fabricantes possuem em

imprimir a letra Ω , convencionou-se a utilização da letra R, K, M para indicar Ohms, kiloOhms e MegaOhms, respectivamente. Assim, resistores onde está impresso 10R, 47K, 47M têm valores de resistência 10Ω , $47k\Omega$ e $47M\Omega$, respectivamente. No caso de valores não inteiros, a letra substitui a vírgula; ou seja, resistores onde estão impressos 4R7, 4K7, e 4M7, correspondem a resistências de $4,7\Omega$, $4,7k\Omega$ e $4,7M\Omega$.

b) Fixe os resistores na placa de circuitos e meça os valores das resistências com o ohmímetro. Compare os valores obtidos e verifique se a medida está dentro do intervalo de tolerância fornecido pelo fabricante.

Tabela 3.2 - Resultados das medidas de resistência utilizando um Ohmímetro

Valor nominal	Tolerância	Leitura do Ohmímetro analógico	Desvio	Leitura do Ohmímetro digital	Desvio

c) Pegue o potenciômetro e fixe-o na placa, com o ohmímetro ligado entre o terminal móvel e um terminal fixo. Gire o cursor do potenciômetro totalmente para um lado e meça a resistência. Gire totalmente para o outro lado e meça a resistência novamente. Esses são os valores extremos de resistência que podem ser obtidos. Gire o cursor para uma posição arbitrária e meça

a resistência. Como varia a resistência à medida que o botão é girado?

Tabela 3.3 - Resultados das medidas das características de um potenciômetro

Valor Nominal	Resistência máxima	Resistência mínima	Cursor na posição arbitrária

3.3.2 Medidas com voltímetro

a) Ajuste o voltímetro digital para uma escala superior a 30 V. Conecte-o à fonte de tensão variável e meça os valores para posições do botão de tensão correspondentes a 5, 10, 15 e 20V. Verifique se o valor indicado pelo mostrador da fonte de tensão confere com o valor lido no voltímetro. Repita o procedimento para o voltímetro analógico.

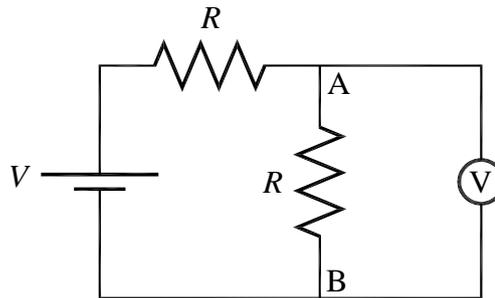
Tabela 3.4 - Resultados das medidas de tensão

Leitura da fonte	Leitura do voltímetro digital	Leitura do voltímetro analógico
	Escala de Medida:	Escala de Medida:

3.3.3 Divisor de tensão.

a) Os instrumentos de medidas elétricas como voltímetros e amperímetros não são ideais pois possuem resistência interna. Isto faz com que quando esses instrumentos são inseridos no circuito, eles alterem as correntes e as tensões, pois suas resistências internas passa a fazer parte do circuito elétrico em questão. Como os amperímetros são ligados em série com os resistores no circuito (para medir as correntes que os atravessam) eles devem ter baixa resistência interna para influenciar o mínimo possível no valor da corrente medida. Já os voltímetros são ligados em paralelo com os elementos sobre os quais se deseja medir a tensão e por isso devem ter alta resistência interna para que altere o mínimo possível a tensão que se deseja medir. No entanto, é bom frisar que o fato do voltímetro ou amperímetro não serem ideais não significa que realizem medidas incorretas ou menos precisas. O que acontece é que você deve conhecer o valor dessa resistência interna de modo que, quando for necessário, possa corrigir a medida apropriadamente. Para ilustrar o efeito da resistência interna em medidas com voltímetros a figura 3.11 ilustra um circuito denominado divisor de tensão. Em seu relatório, justifique esse nome e explique o funcionamento do mesmo utilizando as equações adequadas. Monte o divisor de tensão utilizando $R = 1 \text{ k}\Omega$. Calcule a tensão esperada entre os terminais A e B, para uma tensão de alimentação de 1 V.

Figura 3.11 - Circuito divisor de tensão utilizado para observar o efeito da resistência interna do voltímetro nas medidas de tensão



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

b) Verifique o valor nominal da resistência interna do voltímetro analógico nas escalas DC de 0,5 e 10 V (valor indicado como $k\Omega/V$ impresso no voltímetro). Meça também a resistência interna nas escalas DC 0,5 e 10 V utilizando o multímetro digital e compare com os valores nominais.

c) Ajuste a saída da fonte para 1 V. Meça a tensão entre os pontos A e B usando o voltímetro digital analógico nas escalas de 0,5 e 10 V.

d) Para o mesmo circuito da figura 3.11, calcule a tensão esperada entre os terminais A e B se $R = 100\text{ k}\Omega$. Repita as medidas do item c usando $R = 100\text{ k}\Omega$. Compare as medidas realizadas com os dois valores de R e justifique as diferenças observadas.

e) Utilizando as informações das tabelas abaixo, faça uma análise qualitativa dos resultados obtidos, justificando os comportamentos observados.

Resistência interna do voltímetro, escala de 0,5 V: _____

Resistência interna do voltímetro, escala de 10 V: _____

Tabela 3.5 - Resultados das medidas de tensão do circuito da figura 3.11 com $R = 1 \text{ k}\Omega$

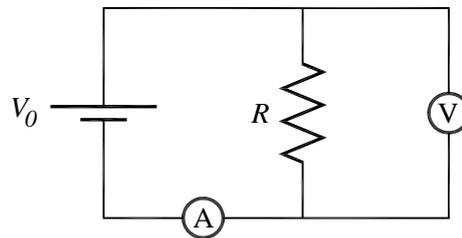
Escala do voltímetro analógico	Leitura direta com voltímetro analógico	Leitura com voltímetro digital
0,5 V		
10 V		

Tabela 3.6 - Resultados das medidas de tensão do circuito da figura 3.11 com $R = 100 \text{ k}\Omega$

Escala do voltímetro analógico	Leitura direta com voltímetro analógico	Leitura com voltímetro digital
0,5 V		
10 V		

3.3.4 Curva tensão versus corrente ($V \times I$) de um resistor

Os componentes eletrônicos são geralmente caracterizados por suas curvas $V \times I$. Para obter a curva $V \times I$ de um componente, devemos montar um circuito como o da figura 3.12. Usando um amperímetro em série com o componente, medimos a corrente que o atravessa; usando um voltímetro ligado em paralelo com o componente, medimos a tensão em seus terminais. Assim é possível se obter uma curva que relaciona a tensão e a corrente a que está submetido o componente a ser caracterizado.

Figura 3.12 - Circuito utilizado na obtenção da curva $V \times I$ de um resistor

Fonte: Elaborada pelos compiladores.

a) Monte o circuito da figura 3.12 com $R = 1 \text{ k}\Omega$. Use o voltímetro na escala de 20 V e o amperímetro na escala de 20 mA.

b) Varie a tensão da fonte no intervalo de 0 V a 10 V para obter diversos valores de corrente e tensão, e faça um gráfico em escala linear com os pontos. A partir do gráfico, determine a resistência e compare com o valor medido com o ohmímetro.

Obs: antes de ligar a fonte, coloque o cursor de limitação de corrente em meio curso e o cursor de tensão em zero. Ligue a fonte somente quando todo o circuito estiver conectado, e então aumente gradativamente a tensão.

Tabela 3.7 - Resultados das medidas de tensão e corrente para obtenção da curva $V \times I$ de um resistor

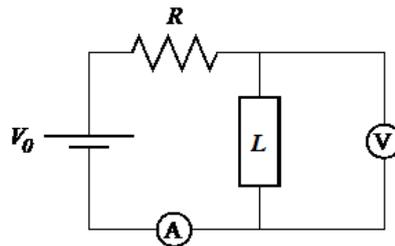
Corrente	Tensão	Corrente	Tensão

3.3.5 Curva $V \times I$ de uma lâmpada incandescente

a) Meça a resistência da lâmpada disponível na sua bancada com um ohmímetro. Monte o circuito da figura 3.13, usando $R = 100 \Omega$, onde L representa uma lâmpada incandescente. Siga o mesmo procedimento anterior. Os pontos que você deve coletar devem cobrir toda a faixa de 0 a 10 V (sugestão: varie a tensão de 0,2 em 0,2 V até 1 V e a partir daí varie de 0,5 em 0,5 V até 10V) . Não aplique mais de 10 V sobre a lâmpada, pois isso pode queimá-la.

b) Faça o gráfico de V versus I, e discuta o resultado obtido. A lâmpada é um dispositivo ôhmico? Discuta o comportamento da curva obtida, evidenciando a diferença entre a situação de baixa e alta corrente. Faça um gráfico da resistência V/I versus a corrente. Analise o gráfico obtido e discuta se o mesmo está de acordo com o esperado considerando que a resistência da lâmpada aumenta com a temperatura. Determine a região de tensão em que a lâmpada se comporta como um resistor ôhmico. Nesta faixa o valor obtido para a V/I coincide com a resistência da lâmpada medida com um ohmímetro? Justifique a resposta.

c) Para temperaturas abaixo de 3000°C , a variação da resistência de um corpo (com dimensões fixas) como função da temperatura pode ser considerada praticamente linear sendo dada pela expressão $R = R_{20} [1 + \alpha(T - 20^\circ\text{C})]$. Onde R_{20} é a resistência na temperatura de 20°C , T é a temperatura em $^\circ\text{C}$ e α é coeficiente de temperatura da resistividade, que para o tungstênio vale $4,5 \times 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. Considerando essa aproximação e as medidas de tensão e corrente na lâmpada estime a temperatura do filamento da lâmpada quando a tensão em seus terminais for de 2, 5, e 10V.

Figura 3.13 - Circuito para traçar uma curva V_{xl} de uma lâmpada

Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Tabela 3.8 - Resultados das medidas de tensão e corrente para obtenção da curva V_{xl} de uma lâmpada

Corrente	Tensão	Corrente	Tensão

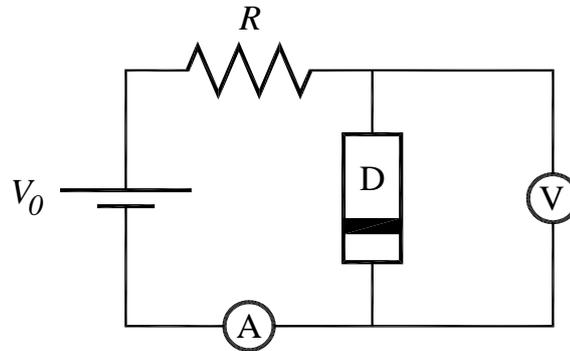
3.3.6 Curva tensão versus corrente (V_{xl}) de um diodo

a) Monte o circuito como o da figura 3.14, usando $R = 100 \Omega$. Esse resistor serve para limitar a corrente que passa pelo circuito. Preste atenção na polaridade do diodo; a marca na figura 3.14 indica a marca branca que existe no mesmo. Varie a tensão da fonte no intervalo de 0 V a 4 V, e meça a corrente e a tensão sobre o diodo. Lembre-se que, devido à presença do resistor, a tensão da fonte não é igual à tensão sobre o diodo. Faça de 15 a 20 medidas.

b) Inverta o diodo de modo que ele fique polarizado reversamente e faça mais 5 medidas variando a tensão da fonte de 0

V a 10 V. Esse resultado é consistente com a equação (3)? Explique por que.

Figura 3.14 - Circuito para traçar uma curva $V \times I$ de um diodo (polarizado diretamente). A faixa escura representa a marca branca presente no diodo



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

c) Na análise é mais usual se fazer um gráfico de $I \times V$, colocando a corrente no eixo vertical e a tensão no eixo horizontal. Faça um gráfico em papel milimetrado (considerando para os pontos para o diodo polarização reversamente como tensão negativa) e determine a partir de qual valor de tensão o diodo começa a conduzir (limiar de condução)

d) Faça também um gráfico em papel monolog e discuta o resultado obtido, buscando determinar os parâmetros que caracterizam o diodo (I_0 e e/k_B).

Tabela 3.9 - Resultados das medidas de tensão e corrente para obtenção da curva $I \times V$ de um diodo polarizado diretamente

Corrente	Tensão	Corrente	Tensão
$I_o =$		$e/k_B =$	

Tabela 3.10 - Resultados das medidas de tensão e corrente para obtenção da curva $I \times V$ de um diodo polarizado reversamente

Corrente	Tensão	Corrente	Tensão

3.3.7 Curva tensão versus corrente ($V \times I$) de LEDs

a) No circuito da figura 3.14 substitua o Diodo pelo LED vermelho. **Preste atenção na polaridade do LED:** O terminal negativo é indicado por uma parte plana na base do LED. No caso dos LED disponíveis na bancada o terminal do desse LED que possui cor vermelha é o terminal positivo e que possui cor preta é o terminal negativo.

b) Varie a tensão sob o LED entre 0 e 2V, de modo que a corrente que circula pelo circuito não ultrapasse 12 mA. Faça de 15 a 20 medidas.

c) Anote a tensão mínima sob o LED para que ele acenda.

d) Repita esses procedimentos para o LED azul, pode-se utilizar valores mais elevados de tensão, porém não ultrapasse 3 V de tensão sob esse componente.

e) Faça o gráfico comparando as três curvas de $I \times V$, como feito para o caso do diodo.

f) Uma vez que dispomos da tensão mínima para acender um dado LED, V_0 , podemos calcular a energia potencial elétrica eV_0 mínima para acendê-lo, onde e é a carga do elétron. Assumindo que toda a energia potencial elétrica é convertida em luz com frequência f (cor) correspondente ao pico de emissão do LED (Isso é uma aproximação um tanto quanto grosseira, mas que satisfaz os nossos propósitos), podemos igualar a energia de um fóton de luz emitido (hf) com a energia potencial elétrica. Sendo h a famosa constante de Planck da física quântica. Assim é possível estimar a ordem de grandeza da constante de Planck se a frequência do máximo de emissão do LED for conhecida. Pesquise qual é esse valor para os LEDs medidos e estime a ordem de grandeza da constante de Planck.

Bibliografia

HALLIDAY, D.; RESNICK, R. **Física III**. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1974.

NUSSENZVEIG, H.M. **Curso de física básica: eletricidade e magnetismo**. São Paulo: Edgard Blucher, 1998. v.3.

TIPPLER, P.A. **Física: para cientistas e engenheiros**. 3. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 1991. v. 3.

YOUNG, H. D.; FREEDMANN, R. A. **Sears e Zemanski física III: eletricidade e magnetismo**. São Paulo: Pearson, c2004.

Capítulo 4 Resistência e corrente elétrica

Neste capítulo discutiremos os conceitos de resistência e corrente elétrica e sua relação com as propriedades microscópicas dos materiais. Veremos a origem das leis de Ohm através de um modelo de condução conhecido como modelo de Drude, que dá uma explicação microscópica para a resistência elétrica. Nos experimentos, investigaremos como varia o potencial ao longo de um condutor e determinaremos a resistividade elétrica do mesmo.

Importante: O conteúdo da introdução teórica é apenas um guia para os conceitos necessários para a realização dos experimentos. Você deve aprofundar os conceitos consultando os livros citados na bibliografia ou outros de sua preferência.

4.1 A Lei de Ohm

Em 1827, Georg Simon Ohm, físico e matemático alemão, publicou os resultados do que é hoje conhecido como as leis de Ohm. Nessa época, Ohm trabalhava como professor de física e matemática numa escola colegial em Colônia, e usava o laboratório da escola para experiências com circuitos elétricos, que eram uma novidade então (Volta havia desenvolvido a bateria eletrolítica poucos anos antes). Os resultados dessas experiências foram publicados no trabalho “O circuito galvânico investigado

matematicamente”. Ohm descobriu que a corrente que atravessa um fio condutor é proporcional à diferença de potencial aplicada, à área da seção transversal do fio e inversamente proporcional ao comprimento.

A proporcionalidade entre a corrente e a diferença de potencial observada em alguns tipos de materiais é hoje conhecida como a primeira lei de Ohm, e os componentes que apresentam essa propriedade são chamados de ôhmicos. A razão V / I denota o quanto de tensão tem de ser aplicada para passar certa corrente em um dispositivo de circuito. Assim, quanto maior for a dificuldade que o dispositivo impõe a passagem da corrente, maior deve ser a tensão aplicada para estabelecer um certo valor de corrente. Logo, diz-se que a razão V/I é uma medida da dificuldade imposta pelo dispositivo à passagem da corrente elétrica e por isso é denominada de resistência elétrica (R). A unidade de resistência no SI foi denominada Ohm (Ω) em homenagem a Georg Simon Ohm. A formulação matemática dessa lei é:

$$V = RI \quad (1)$$

Outra observação feita por Ohm em seus experimentos foi que a resistência elétrica é proporcional ao comprimento do condutor e inversamente proporcional a área da seção transversal, o que ficou conhecido como a segunda lei de Ohm, que pode ser escrita como:

$$R = \rho \frac{L}{A} \quad (2)$$

O coeficiente de proporcionalidade é conhecido como resistividade, e é uma característica de cada material. A tabela 1 mostra a resistividade de alguns deles à temperatura de 20°C.

Tabela 4.1 - Resistividade de alguns materiais. Observe a diferença nas ordens de grandeza.

Material	ρ ($\Omega \cdot m$)	Material	ρ ($\Omega \cdot m$)
Prata	$1,59 \cdot 10^{-8}$	Germânio	$4,6 \cdot 10^{-1}$
Cobre	$1,72 \cdot 10^{-8}$	Silício	$6,4 \cdot 10^2$
Alumínio	$2,82 \cdot 10^{-8}$	Parafina	10^{17}

Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Os metais têm resistividade da ordem de $10^{-8} \Omega \cdot m$, enquanto os isolantes têm resistividade superior a $10^{10} \Omega \cdot m$. A resistividade dos semicondutores (como o germânio e o silício) encontra-se entre esses extremos.

Uma grande inspiração para o trabalho de Ohm foi o trabalho de Fourier sobre a condução de calor, publicado anos antes. Fourier descobriu que a condução de calor entre dois pontos é proporcional à diferença de temperatura entre eles e a condutividade térmica do meio que os separa. Fazendo a analogia, a corrente faz o papel do calor, o potencial faz o papel da temperatura e a resistência faz o papel do inverso da condutância térmica.

A tensão e a corrente são grandezas macroscópicas, que se referem a todo o condutor, e por esse motivo as equações 1 e 2 são também chamadas de lei de Ohm macroscópicas. Combinando as equações 1 e 2, podemos escrever:

$$\frac{V}{L} = \rho \frac{I}{A} \quad (3)$$

Mas V/L é o campo elétrico que age sobre o condutor, e I/A é chamado de densidade de corrente, simbolizado por J . Logo:

$$E = \rho J \quad (4)$$

Essa equação é usualmente escrita em termos da condutividade σ , que é o inverso da resistividade:

$$J = \sigma E \quad (5)$$

A densidade de corrente e o campo elétrico podem ser definidas a partir de características microscópicas e por isso a equação 5 é chamada de *lei de Ohm microscópica*.

4.2 O modelo de Drude

No final do século XIX, foi descoberto o elétron, partícula carregada que seria responsável pelos fenômenos elétricos. Havia então necessidade de explicar os fenômenos usando a ideia do elétron, incluindo as leis de Ohm. Isso foi feito por Paul Drude em 1900.

Da eletrostática sabia-se que o valor do potencial elétrico é o mesmo em todos os pontos de um condutor em equilíbrio eletrostático. Em outras palavras, nessa situação não há diferença de

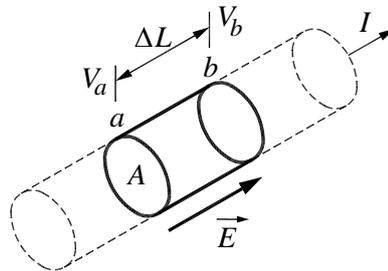
potencial entre dois pontos quaisquer de um metal eletrostaticamente carregado. No entanto, em um material condutor os elétrons mais externos aos átomos estão fracamente ligados aos núcleos. Devido à energia térmica, esses elétrons estão livres para se mover aleatoriamente ao longo do condutor (por isso são chamados de elétrons de condução). Portanto, uma visão simplista de um material condutor, seria de um mar de elétrons livres em movimento aleatório devido às flutuações térmicas, e um conjunto de íons de fundo, provenientes dos átomos dos quais os elétrons de condução se originaram.

Na presença de um campo elétrico, surge uma força sobre os elétrons livres, fazendo com que além do movimento aleatório eles possuam um movimento ordenado na direção do campo. Quando isso acontece, o condutor não está mais em equilíbrio eletrostático. Uma análise preliminar pode dar a impressão que sob a influência dessa força a velocidade dessas cargas aumentaria indefinidamente. Na verdade, isso não ocorre devido a colisões entre os elétrons de condução e os íons de fundo. Para descrever este mecanismo de condução podemos utilizar um modelo microscópico conhecido como *modelo de Drude*, cujas principais hipóteses são:

- i. Não há interação elétron-elétron ou elétron-íon no intervalo entre as colisões;
- ii. As colisões ocorrem abruptamente e os íons não se movem;
- iii. Existe um tempo médio entre colisões (Δt);
- iv. Após cada colisão, o elétron perde a “memória” sobre sua trajetória e velocidade;

Então vamos assumir que um condutor de comprimento ΔL (figura 4.1) está submetido a uma diferença de potencial V . A aplicação de V faz com que apareça um campo elétrico de intensidade $E = V / \Delta L$ no condutor. Logo, um dado elétron de condução será submetido a uma força elétrica ($F = -eE$), sendo acelerado até atingir uma velocidade v durante um tempo Δt . Então, podemos escrever que a variação de velocidade atingida por esse elétron é:

Figura 4.1 - Condutor submetido à diferença de potencial



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} = -eE \Rightarrow \Delta v = -\frac{eE\Delta t}{m} \quad (6)$$

A quantidade de carga que flui através da seção transversal do condutor pode ser escrita da forma $\Delta Q = n(-e)Av_m\Delta t$, onde n representa a densidade volumétrica dos elétrons de condução, e a carga do elétron, A a seção transversal do condutor, v_m a velocidade

média de deslocamento dos elétrons (também usualmente denominada velocidade de arraste) e Δt o tempo decorrido. Logo a corrente elétrica que flui através do condutor pode ser escrita da forma:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = -neAv_m \quad (7)$$

A velocidade média atingida pelo elétron é:

$$|v_m| = \frac{I}{neA} \quad (8)$$

É importante enfatizar que esse valor médio de velocidade é o valor da velocidade de arraste dos elétrons devido à aplicação do campo e não a velocidade individual dos elétrons, que é, sobretudo, determinada pela agitação térmica. Uma estimativa da velocidade adquirida pelos elétrons devido a agitação térmica pode ser feita considerando um teorema da Física estatística, (denominado *Teorema da Equipartição da Energia*), que estabelece que a cada grau de liberdade de translação dos elétrons contribui com $k_B T/2$ para a energia térmica dos mesmos (k_B é denominada de constante de Boltzman e T é a temperatura). Assim, igualando a energia cinética média dos elétrons com a energia térmica, obtemos:

$$\frac{1}{2} m_e \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T \quad (9)$$

Onde m_e é a massa do elétron e $\langle v^2 \rangle$ é a média do quadrado das velocidades dos elétrons. De onde tiramos que:

$$v_{rms} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_e}} \quad (10)$$

v_{rms} é usualmente referido como valor quadrático médio da velocidade dos elétrons (do inglês *root mean square*). Fazendo um cálculo dessa velocidade em temperatura ambiente (300 K) e sabendo que $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ e $m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$, obtemos que $v_{rms} = 1,17 \times 10^5 \text{ m/s}$. De fato, esse valor é ainda maior quando se usa a mecânica quântica para fazer o cálculo. Neste caso o valor de velocidade obtido é conhecido como velocidade de Fermi, sendo o seu valor $v_F = 1,57 \times 10^6 \text{ m/s}$.

Para fim de comparação, vamos estimar a velocidade média de arraste dos elétrons devido ao campo quando uma corrente de 1A atravessa um fio de cobre de 1 mm de raio. A densidade do cobre é de $8,92 \text{ g/cm}^3$ e sua massa atômica é de 63,5g o que diz que a massa de um mol de cobre é de 63,5 g. Como o número de átomos em um mol é dado pela constante de Avogadro $N_A = 6,02 \times 10^{23}$, o número de átomos por cm^3 no cobre é $6,02 \times 10^{23} \frac{8,92}{63,5} = 8,46 \times 10^{22} \text{ atomos/cm}^3$. Considerando que cada átomo de cobre contribui com um elétron para a condução, temos que a densidade volumétrica de elétrons $n = 8,46 \times 10^{28} \text{ atomos/m}^3$. Assim, usando que a carga do elétron é de $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$, temos, segundo a equação 8, que a velocidade média dos elétrons é:

$$v_m = \frac{I}{neA} = \frac{1}{8,46 \times 10^{28} \times 1,6 \times 10^{-19} \left[\pi (10^{-3})^2 \right]} = 2,35 \times 10^{-5} \text{ m/s} \quad (11)$$

Vemos então que a velocidade média de arraste dos elétrons devido ao campo é muito menor que a velocidade devido a agitação térmica.

Da quarta hipótese, o elétron perde a “memória” sobre sua trajetória e velocidade após cada colisão. No entanto, o que importa é o comportamento coletivo dos elétrons, e não os comportamentos individuais. Assim, considerando uma média de velocidades sobre todos os elétrons que se movem aleatoriamente, após cada colisão, podemos escrever que a variação média na velocidade é a própria velocidade média, ou seja:

$$v_m = \Delta v \quad (12)$$

Logo, a variação de velocidade que um elétron sofre (Δv na equação 6) é o dobro da velocidade média (v_m na equação 8). Usando esse fato, escrevemos:

$$\frac{I}{neA} = \frac{eE\Delta t}{m} \quad (13)$$

E o tempo médio entre colisões pode ser estimado como:

$$\Delta t = \frac{mI}{ne^2AE} \quad (14)$$

Uma outra grandeza usualmente definida é o livre caminho médio l , que expressa a distância percorrida pelos elétrons entre colisões sucessivas. Sabendo que o tempo médio entre colisões é Δt e que a velocidade térmica média dos elétrons é v_F , o livre caminho médio pode ser calculado como:

$$l = v_F \Delta t = \frac{v_F m I}{n e^2 A E} \quad l = v_F \Delta t = \frac{2 v_F m I}{n e^2 A E} \quad (15)$$

O campo elétrico pode ser escrito em função da diferença de potencial $E = V/\Delta L$, permitindo reescrever a equação acima da seguinte forma:

$$V = \frac{m}{n e^2 \Delta t} \frac{\Delta L}{A} I \quad (16)$$

Essa equação mostra que a diferença de potencial é proporcional à corrente, o que é dito pela primeira lei de Ohm. A resistência (razão entre tensão e corrente) é dada por:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{m}{n e^2 \Delta t} \frac{\Delta L}{A} \quad (17)$$

A resistência elétrica é proporcional ao comprimento do condutor e inversamente proporcional à área da seção transversal, o que concorda com as observações de Ohm. Comparando as equações 5 e 17, vemos que:

$$\rho = \frac{m}{ne^2 \Delta t} \quad (18)$$

O modelo de Drude fornece uma expressão para a resistividade dos materiais (uma grandeza macroscópica) que depende apenas de grandezas microscópicas (a carga e a massa do elétron, a densidade de elétrons livres e o tempo médio entre colisões).

Embora no tratamento acima tenhamos falado somente em elétrons de condução, podemos fazer o mesmo tratamento para íons (condução iônica) ou mesmo buracos (falta de elétrons).

4.3 Experimentos

A seguir são propostos experimentos passíveis de serem realizados no contexto deste tópico. Fica a critério de cada docente a definição de quais itens realizar.

Em todos os experimentos realizados, os valores encontrados experimentalmente deverão ser comparados com valores tabelados ou especificados pelos fabricantes dos componentes.

Sempre que surgir uma dúvida quanto à utilização de um instrumento, consulte o professor para esclarecimentos.

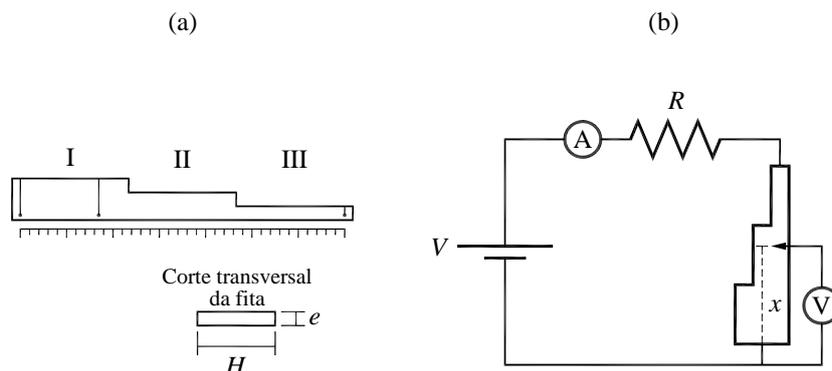
4.3.1 Um condutor em forma de escada percorrido por corrente

a) Neste experimento utilizaremos uma fita condutora de alumínio em forma de escada tal como mostrado na figura 4.2a. Inicialmente você deverá medir todas as dimensões (comprimento, espessura e largura em cada região).

b) Monte o circuito indicado na figura 4.2b utilizando uma fita de alumínio e uma resistência R para limitar a corrente (sugestão: $R = 4,7 \Omega$ e potência máxima de 5 W). Ajuste a fonte para obter uma corrente (medida com o amperímetro) de aproximadamente 0,5 A (nessa situação, a potência dissipada no resistor será cerca de 1.2 W). Utilizando duas pontas de prova no multímetro, mantenha uma fixa na extremidade de maior largura da fita condutora, figura 4.2b. Esse ponto será o potencial de referência (0 V). Com a outra ponta de prova, meça 5 valores de tensão V em função do comprimento x para cada uma das três regiões distintas, indicado por I, II e III na figura 4.2a.

c) Faça um gráfico da tensão em função do comprimento x , destacando as 3 regiões. Qual o comportamento observado em cada região? Explique o comportamento observado com base nas áreas transversais da fita metálica.

Figura 4.2 - (a) Fita condutora de alumínio. (b) Circuito para estudar a tensão sobre a fita condutora.



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

d) Usando a expressão $E = \Delta V / \Delta x$, calcule o campo elétrico médio em cada uma das 3 regiões da fita. A partir da geometria da fita e da corrente I , calcule também a densidade de corrente J em cada uma das regiões.

e) Com esses dados, faça um gráfico em escala linear de E vs. J , verifique a equação 5, e obtenha a condutividade e a resistividade do material.

f) Usando o valor da resistividade obtido, estime o tempo médio entre colisões. Estime também a velocidade média dos elétrons e o livre caminho médio. Como essas grandezas variam quando a corrente varia? Como o livre caminho médio se compara com as distâncias interatômicas? Discuta esse resultado com o seu professor.

Valor medido para a corrente: _____

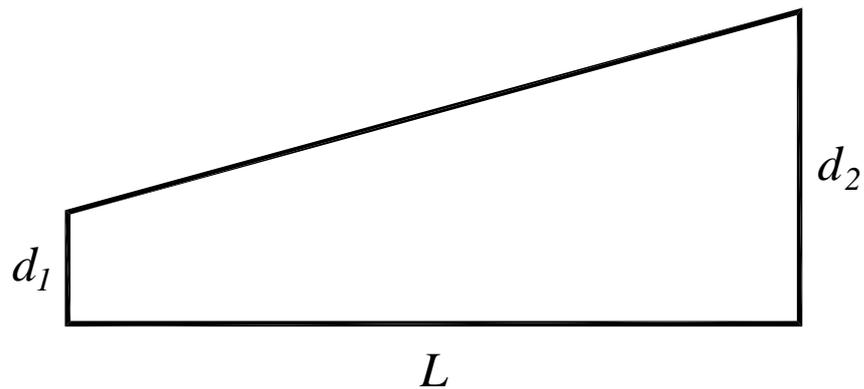
Tabela 4.2 - Resultados das medidas de tensão versus posição em uma fita metálica em forma de escada

Região	Posição	Tensão	Campo Elétrico	Dens. de corrente
Região I: Largura da Fita: _____ Espessura da Fita: _____				
Região II: Largura da Fita: _____ Espessura da Fita: _____				
Região III: Largura da Fita: _____ Espessura da Fita: _____				
Resistividade do Material:		Calculada: Valor tabelado:		

4.3.2 Um condutor trapezoidal percorrido por corrente

a) Agora vamos usar outra fita metálica, com formato de trapézio (figura 4.3). Ligue os terminais da fita a um resistor de $4,7 \Omega$ e ajuste a fonte de tensão para que a corrente na fita seja $0,5 \text{ A}$.

Figura 4.3 - Fita condutora de alumínio (experimento opcional)



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

- b) Meça todos os parâmetros geométricos da fita.
- c) Utilizando duas pontas de prova no multímetro, mantenha uma fixa na extremidade de maior largura da fita condutora. Com a outra ponta de prova, meça 15 valores de tensão V em função do comprimento x .

Tabela 4.3 - Características geométricas da fita

d_1	d_2	L	h	I

Tabela 4.4 - Resultados das medidas de tensão versus posição em uma fita metálica em forma trapezoidal

Posição	Tensão	Posição	Tensão

Bibliografia

HALLIDAY, D.; RESNICK, R. **Física III**. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1974.

NUSSENZVEIG, H.M. **Curso de física básica**: eletricidade e magnetismo. São Paulo: Edgard Blucher, 1998. v.3.

TIPPLER, P.A. **Física**: para cientistas e engenheiros. 3. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 1991. v. 3.

YOUNG, H. D.; FREEDMANN, R. A. **Sears e Zemanski física III**: eletricidade e magnetismo. São Paulo: Pearson, c2004.

Capítulo 5 Circuitos de corrente contínua

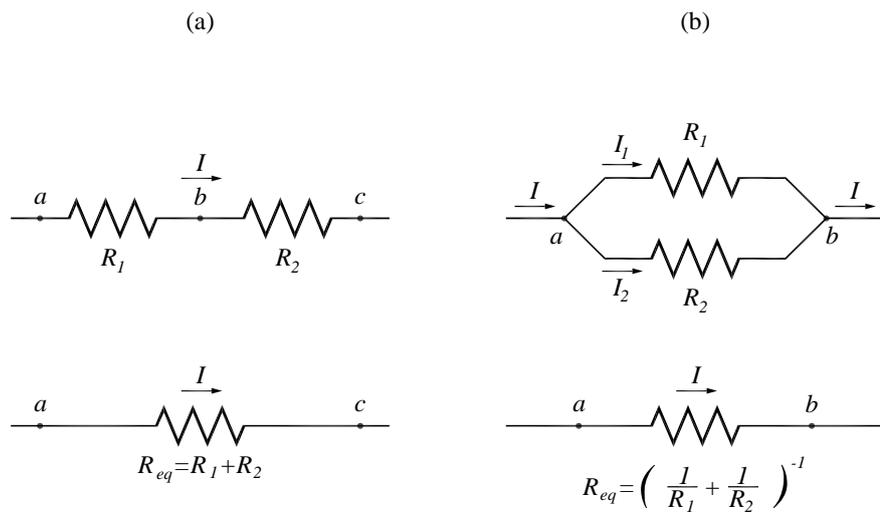
Neste capítulo, estudaremos as regras de Kirchoff para análise de circuitos de corrente contínua. Nos experimentos, investigaremos alguns circuitos simples formados por resistores e fontes de tensão contínua.

Importante: O conteúdo da introdução teórica é apenas um guia para os conceitos necessários para a realização dos experimentos. Você deve aprofundar os conceitos consultando os livros citados na bibliografia ou outros de sua preferência

5.1 Associação de Resistores

Uma vez entendido a origem microscópica da resistência elétrica, vamos agora estudar como os resistores podem ser associados em circuitos elétricos. Se dois ou mais resistores são conectados de forma que a corrente seja a mesma em cada um deles, diz-se que eles estão associados em série (figura 5.1a).

Figura 5.1 - Associação de resistores: (a) em série; (b) em paralelo



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Neste caso, a soma das tensões em cada resistor é igual à tensão total aplicada sobre o conjunto:

$$V = V_{ab} + V_{bc} = R_1 I + R_2 I = (R_1 + R_2) I \quad (1)$$

A resistência equivalente do circuito é definida como:

$$R_{eq} = V / I = R_1 + R_2 \quad (2)$$

No caso de N resistores associados em série, tem-se que a resistência equivalente é a soma das resistências de todos os N resistores.

Na associação em paralelo (figura 5.1b), a tensão V nos terminais de cada resistor é a mesma. Assim, a soma das correntes em cada ramo é igual à corrente total do conjunto:

$$I = I_1 + I_2 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) V \quad (3)$$

A resistência equivalente é dada por:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (4)$$

No caso de N resistores associados em paralelo, o inverso da resistência equivalente é a soma dos inversos de cada uma das N resistências.

5.2 Regras de Kirchoff

Em algumas situações um circuito elétrico pode ser reduzido a combinações de associações série e paralelo (denominada associação mista de resistores). Porém, em muitos casos não é possível reduzir os circuitos elétricos a simples combinações desse tipo. Nestes casos, a análise do circuito pode ser realizada utilizando um conjunto de regras formuladas por Gustav Kirchoff em 1845, quando ele ainda era estudante na Universidade de Königsberg, e que ficaram conhecidas como regras de Kirchoff.

A primeira lei de Kirchoff é uma consequência da conservação da carga elétrica, e diz que a soma das correntes que chegam a um nó (ponto no qual três ou mais condutores se conectam) é igual à soma das correntes que dele saem, ou seja:

$$\sum_{\text{nó}} I = 0 \quad (5)$$

A segunda lei de Kirchoff é uma consequência da conservação da energia elétrica, e diz que a soma algébrica das quedas de tensão em torno de qualquer malha fechada do circuito é nula, ou seja:

$$\sum_{\text{malha}} V = 0 \quad (6)$$

Para aplicar as regras de Kirchoff em um circuito qualquer, os seguintes passos devem ser adotados:

i) Assinala-se um sentido arbitrário de corrente em cada uma das malhas.

ii) Escolha arbitrariamente um nó e aplique a lei dos nós ao mesmo, ou seja, iguale a soma das correntes que se chegam ao nó com a soma das correntes que dele saem.

iii) Defina um sentido de percurso para as malhas.

iv) Percorra uma determinada malha no sentido arbitrado em iii, somando-se as tensões das fontes que compõem a malha. Considera-se que a tensão é positiva quando a fonte é percorrida do

pólo negativo para o pólo positivo. Caso contrário o sinal da tensão é negativo.

v) Percorra a mesma malha no sentido arbitrado em iii), mas agora some as quedas de potencial (RI) provocadas pelos dispositivos passivos (resistores). Neste caso se o sentido de percurso da malha é o mesmo que o sentido arbitrado para corrente no dispositivo a queda de potencial é positiva. Caso contrário ela é negativa.

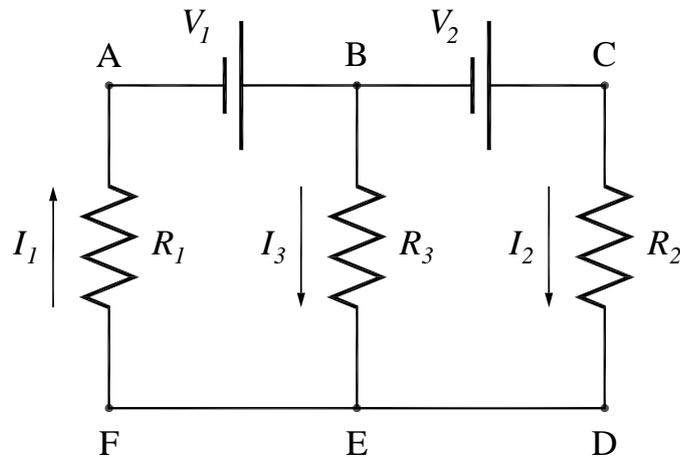
vi) Iguale as expressões obtidas nos itens iv e v, obtendo-se assim a equação para a malha em análise.

vii) repita o procedimento para as outras malhas do circuito até obter um sistema equações determinado, ou seja, cujo número de equações linearmente independentes é maior que o número de incógnitas do sistema.

As regras de Kirchoff são, então, aplicadas aos vários nós e malhas para se obter um número suficiente de equações simultâneas, que possibilitem a determinação de todas as correntes desconhecidas. Se alguma das correntes resultar num valor negativo, significa apenas que o sentido da corrente é contrário ao que foi proposto inicialmente para aquele ramo.

Para ilustrar a aplicação da lei de Kirchoff, vamos usar como o exemplo do circuito mostrado na figura 5.2, com duas baterias e três resistores. Esse circuito não pode ser simplificado através de combinações série-paralelo. Vamos supor que conheçamos os valores das tensões das fontes e dos resistores e que queiramos determinar as correntes.

Figura 5.2 - Circuito para ilustrar a aplicação das regras de Kirchoff



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Inicialmente vamos definir as correntes do circuito como I_1 , I_2 e I_3 , cujos sentidos arbitrados estão mostrados na figura 5.2. Como há três correntes desconhecidas, precisamos de três equações para resolver o sistema. Aplicando a lei dos nós ao nó B, temos:

$$I_1 = I_2 + I_3 \quad (7)$$

Vamos então aplicar a lei das malhas, começando por arbitrar o sentido de percurso como mostrado na figura 5.2. Aplicando a lei da malhas à malha $ABEF$, temos:

$$V_1 = R_1 I_1 + R_3 I_3 \quad (8)$$

Note que os sinais do lado direito da equação 8 são positivos, pois o sentido arbitrado para a corrente coincidiu com o sentido de percurso da malha.

Aplicando a lei das malhas à malha $BCDE$, temos:

$$V_2 = R_2 I_2 - R_3 I_3 \quad (9)$$

Note que o sinal negativo para a queda de potencial provocada por R_3 é devido a fato da direção de percurso da malha ter sido contrário ao sentido arbitrado para a corrente.

Temos agora um sistema linear de três equações e três incógnitas, cuja solução é:

$$I_1 = \frac{1}{R_1 R_2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)^{-1} \left(V_1 + V_2 + \frac{R_1 V_2}{R_3} \right) \quad (10a)$$

$$I_2 = \frac{1}{R_1 R_2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)^{-1} \left(V_1 + V_2 + \frac{R_2 V_1}{R_3} \right) \quad (10b)$$

$$I_3 = \frac{1}{R_1 R_2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)^{-1} \left(\frac{R_2 V_1 - R_1 V_2}{R_3} \right) \quad (10c)$$

Dependendo dos valores de R_1 , R_2 , V_1 e V_2 , I_3 pode ser positivo ou negativo, ou até mesmo nulo. Se I_3 é positivo, a corrente tem o sentido arbitrado na figura 5.2, ou seja, de cima para baixo; se I_3 é negativo, o seu sentido real é contrário ao arbitrado na figura 5.2, ou seja, de baixo para cima. Isto de fato é uma regra geral, ou seja, toda vez que se obtiver um valor de corrente negativo significa que o sentido real da corrente é contrário ao sentido arbitrado inicialmente. Logo, não há necessidade de se preocupar com o sentido inicial arbitrado para as correntes.

5.3 Experimentos

A seguir são propostos experimentos passíveis de serem realizados no contexto deste tópico. Fica a critério de cada docente a definição de quais itens realizar.

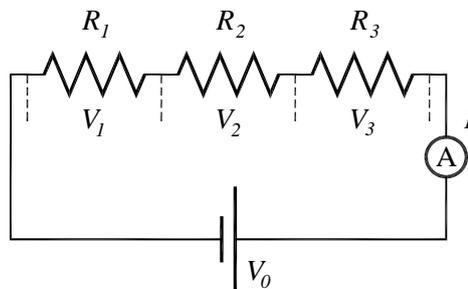
Em todos os experimentos realizados, os valores encontrados experimentalmente deverão ser comparados com valores tabelados ou especificados pelos fabricantes dos componentes.

Sempre que surgir uma dúvida quanto à utilização de um instrumento, consulte o professor para esclarecimentos.

5.3.1 Associação de Resistores em Série

a) Monte um circuito com três resistores (com valores entre $1\text{ k}\Omega$ e $3,3\text{ k}\Omega$) em série, como na figura 5.3, **sem conectar a fonte de alimentação e o amperímetro**.

Figura 5.3 - Três resistores em série



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

b) Meça a resistência equivalente (R_{eq}) da combinação com o ohmímetro e compare com o valor calculado à partir das regras de associação de resistores.

Tabela 5.1 - Resultados da medida da resistência equivalente em um circuito da figura 5.3

R_1	R_2	R_3	R_{eq} (medido)	R_{eq} (calculado)

c) Conecte o amperímetro em série e a fonte de tensão, ajustando a tensão da fonte para $V_0 = 10V$.

d) Meça a corrente (I_0) utilizando a escala de 20 mA do amperímetro, e as tensões (V_1 , V_2 e V_3) entre os terminais de cada resistor. Calcule o valor da resistência equivalente e compare com o valor calculado pela regra de associação de resistores e o medido no ohmímetro.

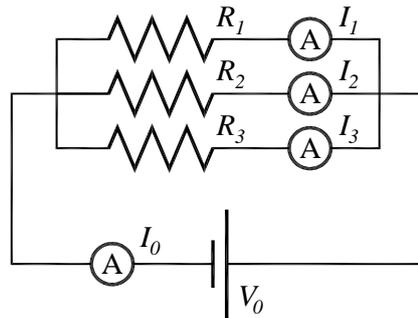
Tabela 5.2 - Resultados da medida de tensões em um circuito da figura 5.3

V_0	I_0	V_1		V_2		V_3	
		Calc.	Med.	Calc.	Med.	Calc.	Med.
Resistência Equivalente (V_0/I_0):							

5.3.2 Associação de Resistores em Paralelo

a) Monte um circuito colocando os mesmos três resistores do experimento anterior em paralelo, como na figura 5.4, sem a fonte de alimentação e com os amperímetros substituídos por curtos circuitos.

Figura 5.4 - Três resistores em paralelo



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

b) Meça a resistência equivalente (R_{eq}) da combinação usando o ohmímetro e compare com o valor esperado.

Tabela 5.3 - Resultados da medida da resistência equivalente no circuito da figura 5.4

R_1	R_2	R_3	R_{eq} (medido)	R_{eq} (calculado)

c) Conecte a fonte de tensão, o amperímetro que realizará a medida I_0 e o outro que realizará a medida I_1 e ajuste para $V_0 = 10V$.

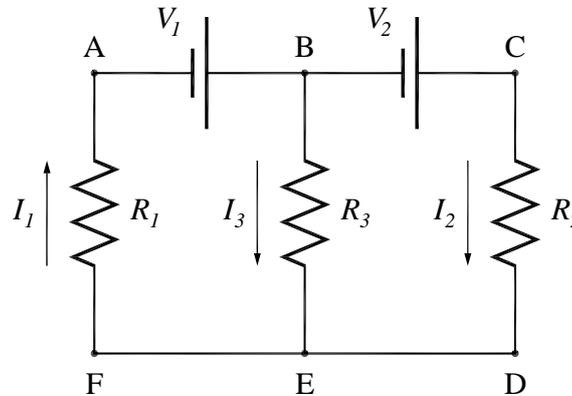
d) Meça a corrente total (I_0) utilizando a escala de 20 mA do amperímetro, e a corrente I_1 . Na sequência, repita o procedimento de modo a medir as correntes I_2 e I_3 . A partir da corrente total, calcule a resistência equivalente, e compare com o valor esperado e o medido no ohmímetro.

Tabela 5.4 - Resultados da medida de tensões em um circuito da figura 5.4

V_0	I_0	I_1		I_2		I_3	
		Calc.	Med.	Calc.	Med.	Calc.o	Med.
Resistência Equivalente (V_0/I_0):							

a) Monte o circuito da figura 5.5, utilizando duas pilhas de 1,5 V como V_1 e V_2 , $R_1 = R_2 = 1 \text{ k}\Omega$ e $R_3 = 470 \Omega$.

Figura 5.5 - Circuito para experimento sobre as leis de Kirchoff



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

b) Meça as correntes em cada ramo e verifiquem se estão de acordo com as correntes calculadas (equações 10).

Tabela 5.5 - Resultados da medida das correntes no circuito da figura 5.5

I_1 (calc.)	I_1 (med.)	I_2 (calc.)	I_2 (med.)	I_3 (calc.)	I_3 (med.)

c) Inverta os fios ligados aos terminais da bateria V_2 e verifique o funcionamento desse circuito. É necessário escrever novamente as regras de Kirchoff? O comportamento observado concorda com o esperado pelas equações 10?

Tabela 5.6 - Resultados da medida das correntes no circuito da figura 5.5 com a bateria V_2 invertida

I_1 (calc.)	I_1 (med.)	I_2 (calc.)	I_2 (med.)	I_3 (calc.)	I_3 (med.)

Bibliografia

EISBERG, R. M.; LERNER, L. S. **Física: fundamentos e aplicações**. São Paulo: McGraw-Hill, 1983. v. 4.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R. **Física III**. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1974.

NUSSENZVEIG, H.M. **Curso de física básica: eletricidade e magnetismo**. São Paulo: Edgard Blucher, 1998. v.3.

TIPPLER, P.A. **Física: para cientistas e engenheiros**. 3. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 1991. v. 3.

YOUNG, H. D.; FREEDMANN, R. A. **Sears e Zemanski física III: eletricidade e magnetismo**. São Paulo: Pearson, c2004.

Capítulo 6 *Transferência de potência em circuitos de corrente contínua*

Neste Capítulo estudaremos o comportamento da potência dissipada numa resistência de carga em função da resistência interna da fonte que a alimenta. Veremos o Teorema da Máxima Transferência de Potência, que diz que a potência transferida para a carga é máxima quando sua resistência e a resistência interna da fonte são iguais. Nos experimentos, vamos buscar comprovar o teorema.

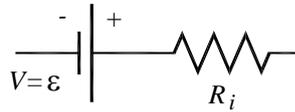
Importante: O conteúdo da introdução teórica é apenas um guia para os conceitos necessários para a realização dos experimentos. Você deve aprofundar os conceitos consultando os livros citados na bibliografia ou outros de sua preferência.

6.1 Teorema da Máxima Transferência de Potência

Esse teorema trata fundamentalmente da transferência de energia entre a fonte (baterias, geradores) e a carga do circuito (resistores). Para entendê-lo melhor, temos que considerar o fato de que as baterias e fontes comumente usadas não são ideais, isto é, sempre existe uma limitação na corrente I que elas podem fornecer. Tais fontes reais podem ser representadas pela associação em série

de uma fonte ideal (gerador de força eletromotriz) com uma resistência (responsável pela dissipação de energia no interior do gerador), como mostrado na figura 6.1.

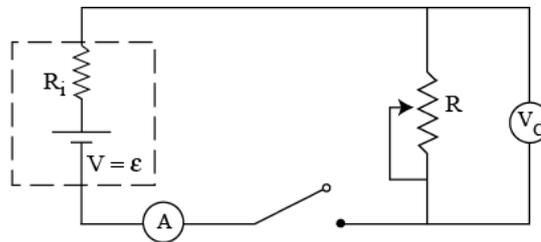
Figura 6.1 - Fonte de tensão real



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Consideremos agora esta fonte conectada a uma carga com resistência equivalente R (que pode ser um resistor, um conjunto de resistores, um chuveiro elétrico, um aparelho de som ou mesmo todos os aparelhos elétricos da sua casa, ou da sua cidade, ou do seu país, etc.). O circuito fonte-carga pode ser representado tal como mostrado na figura 6.2.

Figura 6.2 - Teorema de máxima transferência de potência



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

A corrente que atravessa o circuito pode então ser calculada:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + R_i} \quad (1)$$

A pergunta que faremos com relação à transferência de potência é a seguinte: Qual é a situação em que a potência dissipada na carga é máxima? Para responder a essa questão vamos explicitamente calcular a potência P_C dissipada na carga e a potência P_i dissipada na resistência interna do gerador:

$$P_C = V_C I = RI^2 = \frac{R}{(R + R_i)^2} \varepsilon^2 \quad (2a)$$

$$P_i = V_i I = R_i I^2 = \frac{R_i}{(R + R_i)^2} \varepsilon^2 \quad (2b)$$

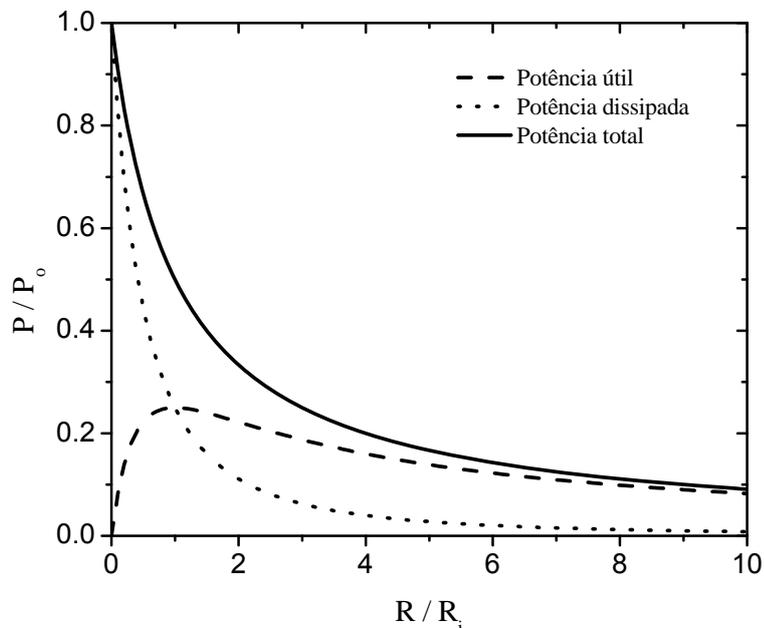
Supondo a força eletromotriz da fonte, ε , constante. Gostaríamos de descobrir para qual valor de R a potência dissipada na mesma é máxima. Basta então derivar P_C em relação a R e igualar a zero (neste caso, a segunda derivada é sempre negativa-verifique essa afirmação). Tem-se então:

$$\frac{dP_C}{dR} = \frac{\varepsilon^2}{(R + R_i)^2} - \frac{2R\varepsilon^2}{(R + R_i)^3} = 0 \rightarrow \boxed{R = R_i} \quad (3)$$

Logo, quando a resistência da carga for igual à resistência do gerador, a potência dissipada na carga será máxima. Podemos agora enunciar o teorema de máxima transferência de potência, que diz: **“A máxima transferência de potência para a carga ocorre quando $R = R_i$ ”**.

Na figura 6.3 estão mostrados a potência total e as potências dissipadas na resistência de carga (potência útil) e na resistência interna (potência dissipada) da bateria como função da resistência de carga. Com cargas de baixa resistência, a fonte é forçada a gerar muita energia elétrica, sendo que boa parte dessa energia é dissipada na própria fonte. Isso tem dois efeitos ruins: superaquecimento da fonte, o que pode danificá-la, e um consumo elevado de energia (se a fonte for, por exemplo, uma pilha, ela se descarrega mais rapidamente do que se estivesse alimentando uma carga de maior resistência).

Figura 6.3 - Balanço de potência para um gerador que alimenta uma carga resistiva



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

6.2 Eficiência da Transferência de Potência

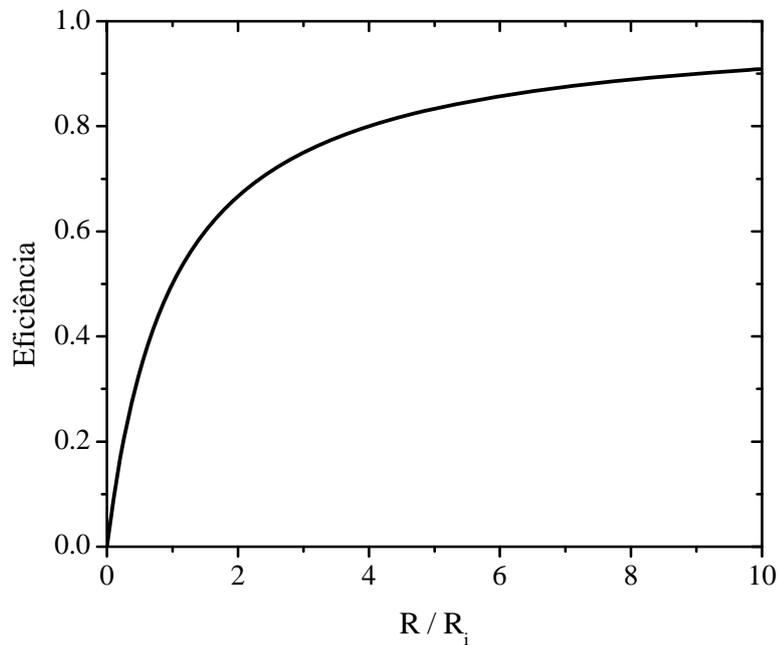
A máxima transferência de potência não significa eficiência máxima. De fato, apenas metade da potência gerada é dissipada na carga, o que resulta em 50% de eficiência. Das equações 2, vemos que a eficiência é:

$$\eta = \frac{P_c}{P_c + P_i} = \frac{R}{R + R_i} \quad (4)$$

Portanto, a eficiência é máxima quando a resistência interna do gerador é pequena em comparação com a resistência de carga. Isto está ilustrado na figura 6.4 onde está mostrado a eficiência como função da resistência de carga

O ideal é que a resistência da carga seja muito maior do que a resistência interna do gerador, porque nessa situação a eficiência será próxima de um e a potência dissipada como calor no gerador será pequena. Portanto, em situações operacionais utilizam-se geradores que possuem resistências internas muito menores que as resistências de carga. Tal situação também pode ser visualizada na figura 6.3, onde, por exemplo, para $R/R_i = 8$ a potência dissipada é quase nula e toda a energia da fonte é dissipada na resistência de carga.

Figura 6.4 - Eficiência da transferência de potência



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

6.3 Experimentos

A seguir são propostos experimentos passíveis de serem realizados no contexto deste tópico. Fica a critério de cada docente a definição de quais itens realizar.

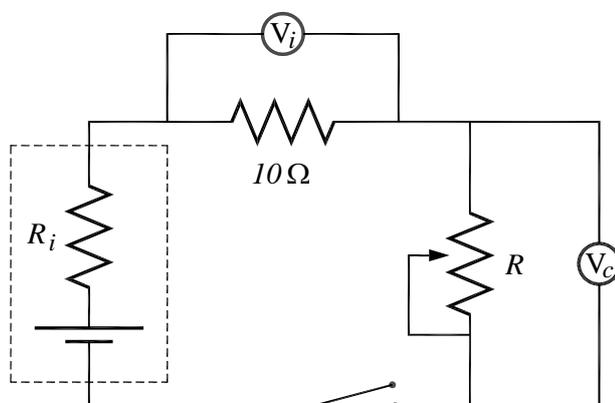
Em todos os experimentos realizados, os valores encontrados experimentalmente deverão ser comparados com valores tabelados ou especificados pelos fabricantes dos componentes.

Sempre que surgir uma dúvida quanto à utilização de um instrumento, consulte o professor para esclarecimentos.

6.3.1 Teorema da Máxima Transferência de Potência

a) Monte o circuito da figura 6.5. A resistência interna da bateria é muito pequena, então está inserido em sua bateria um resistor adicional R_i para fazer o papel da resistência interna. Como resistor de carga R , use um potenciômetro de $100\ \Omega$. Uma vez que estamos trabalhando com valores baixos de resistência, se utilizarmos um amperímetro para medir a corrente a resistência interna do mesmo pode ser comparável as resistência do circuito, o que acarreta em uma modificação nas características do circuito. Assim, ao invés de utilizar um amperímetro para medir a corrente é interessante fazer uma medida indireta, onde se mede a tensão nos terminais de um resistor de valor conhecido. Para que o mesmo não perca a sua característica ôhmica utiliza-se sempre um resistor com alto limite de potência. Neste caso utilize um resistor de $10\ \Omega$ e 5W .

Figura 6.5 - Circuito para demonstração do teorema de máxima transferência de potência



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

b) Varie a resistência do reostato e para cada valor meça a tensão nos terminais do reostato e do resistor de $10\ \Omega$. **Importante:** acione a chave apenas para fazer a leitura. Isto impede que a bateria se descarregue.

c) Faça uma tabela contendo a corrente do circuito (calculada a partir da lei de Ohm), a tensão e a potência dissipada no reostato e no resistor de $10\ \Omega$, em função da soma da resistência externa do circuito (soma da resistência do reostato e do resistor de $10\ \Omega$ - Não é necessário medir a resistência do reostato com o ohmímetro, basta tomar a razão entre a tensão em seus terminais e a corrente no circuito). Faça um número de medidas suficiente para definir bem o máximo desta curva.

d) Faça os gráficos da potência dissipada nos resistores externos em função da das resistências externas. Analise as duas curvas com base no que foi discutido na teoria. Para qual valor da resistência externa ocorre a máxima transferência de potência?

e) A partir deste dado determine o valor da resistência do gerador.

f) Faça um gráfico da eficiência da transferência de potência em função da resistência externa. Na situação de máxima potência, qual é a eficiência Em que valor a eficiência se torna superior a 80 %?

Tabela 6.1 - Resultados das medidas decorrente e tensão no circuito da figura 6.5.

Resistência do reostato	Corrente	Tensão no reostato	Tensão no resistor
Máxima Transferência de Potência: R = Eficiência na máxima potência = Eficiência superior a 80 %: R =			

Bibliografia

HALLIDAY, D.; RESNICK, R. **Física III**. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1974.

NUSSENZVEIG, H.M. **Curso de física básica**: eletricidade e magnetismo. São Paulo: Edgard Blucher, 1998. v.3.

TIPPLER, P.A. **Física**: para cientistas e engenheiros. 3. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 1991. v. 3.

YOUNG, H. D.; FREEDMANN, R. A. **Sears e Zemanski física III:** eletricidade e magnetismo. São Paulo: Pearson, c2004.

Capítulo 7 Capacitância e capacitores

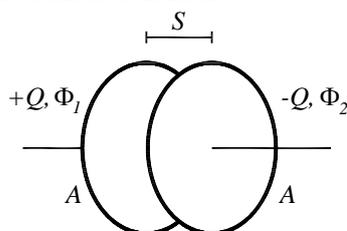
Neste capítulo faremos um estudo sobre capacitores. Será introduzido o conceito de capacitância e estudaremos as leis de carga e descarga de capacitores, bem como as regras de associação desses elementos de circuito.

Importante: O conteúdo da introdução teórica é apenas um guia para os conceitos necessários para a realização dos experimentos. Você deve aprofundar os conceitos consultando os livros citados na bibliografia ou outros de sua preferência

7.1 Capacitor de placas paralelas e capacitância

Suponhamos o caso de duas placas condutoras idênticas, paralelas entre si, separadas por uma distância S e com área A , tal como mostrado na figura 7.1. Uma das placas está carregada com uma carga $+Q$ e a outra com uma carga $-Q$.

Figura 7.1 - Capacitor de Placas Paralelas



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Uma aproximação que vamos fazer é desconsiderar o chamado efeito de borda, isto é, vamos calcular o campo gerado por cada placa como se ela fosse infinita. O campo gerado por uma placa infinita uniformemente carregada pode ser calculado pela lei de Gauss sendo dado por:

$$|\vec{E}| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{Q}{2A\varepsilon_0} \quad (1)$$

Onde σ é a densidade superficial de carga, A é a área da placa, Q a carga armazenada e ε_0 é a permissividade elétrica do vácuo. Note que se trata de um campo constante.

A direção desse campo é perpendicular à placa e o sentido saindo da placa se Q é positivo e entrando na placa se Q é negativo.

O capacitor esquematizado na figura 7.1 pode ser aproximado para duas placas infinitas carregadas com cargas $+Q$ e $-Q$ e separadas por uma distância s . Assim, na região fora das placas os campos gerados por cada placa apontam em sentidos opostos e se cancelam. Entre as placas eles se somam e geram um campo elétrico de módulo:

$$|\vec{E}| = \frac{Q}{A\varepsilon_0} \quad (2)$$

O sentido deste campo é da placa positiva para a placa negativa.

A tensão entre as placas é dada por:

$$V = |\vec{E}|S = \frac{QS}{A\epsilon_0} \quad (3)$$

Vemos então que a tensão entre as placas é proporcional à carga nelas armazenada. Podemos definir uma grandeza que expressa a capacidade de armazenar carga. Tal grandeza é denominada capacitância (C), e é definida como:

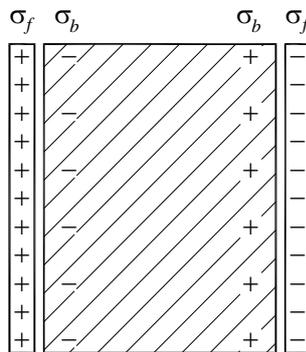
$$C = \frac{Q}{V} \quad (4)$$

Para o caso das placas paralelas:

$$C = \frac{A\epsilon_0}{S} \quad (5)$$

Note que a capacitância não depende da carga nem da diferença de potencial entre as placas, ou seja, é uma propriedade intrínseca do capacitor. Se houver um meio dielétrico entre as placas, o campo elétrico gerado será reduzido (na região onde o dielétrico está presente) por um fator κ (a constante dielétrica do meio). Isso ocorre porque aparecerão cargas de polarização no dielétrico, negativas na interface com a placa positiva e positivas na interface com a placa negativa, como na figura 7.2. Há um cancelamento parcial da carga que está na placa com a carga de polarização, o que faz com que a densidade superficial de carga na interface seja menor.

Figura 7.2 - Cargas de polarização no dielétrico. σ_b é a densidade de cargas de polarização no dielétrico, e σ_f é a densidade de cargas livres nas placas metálicas.



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Se o campo elétrico é menor por um fator κ , a tensão entre as placas é menor por um fator κ , e a capacitância *aumenta* por um fator κ :

$$C = \frac{\kappa A \epsilon_0}{S} \quad (6)$$

O capacitor tem funções variadas, mas uma das principais é de armazenar energia elétrica. A energia armazenada num capacitor pode ser calculada pelo trabalho necessário para carregá-lo. A diferença de potencial entre as placas é $V = q / C$, onde q é a carga que está sobre as placas. O trabalho necessário é:

$$dW = Vdq = \frac{q}{C} dq \quad (7)$$

Para calcular a energia armazenada, basta integrar a equação (7) acima de 0 a Q:

$$U = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (8)$$

Lembrando que $Q = CV$:

$$U = \frac{1}{2} CV^2 \quad (9)$$

Essa energia pode ser recuperada quando o capacitor é descarregado, e por isso é dito que ela fica armazenada no capacitor ou, mais precisamente, no campo elétrico entre as placas. O capacitor pode então armazenar energia, para fornecê-la ao circuito em momentos de picos de consumo ou quando há uma falha da fonte.

A máxima tensão que pode ser aplicada a um capacitor é limitada pelo fenômeno da ruptura dielétrica, que ocorre quando o campo elétrico atinge um valor limite e dielétrico se torna condutor. O valor de campo elétrico que causa a ruptura depende do dielétrico, e é geralmente da ordem de MV/m.

Os capacitores de capacitância até $1 \mu\text{F}$ em geral usam dielétricos isotrópicos, e seus dois terminais são equivalentes, como acontece com os resistores. Entretanto, os capacitores de maior capacitância (chamados *capacitores eletrolíticos*) apresentam dielétrico que têm comportamento diferente de acordo com o sentido do campo elétrico. Por isso, esses capacitores geralmente apresentam polaridade, isto é, possuem um terminal positivo e um terminal negativo. Essa polaridade deve ser sempre respeitada ao conectar-se o capacitor a um circuito elétrico.

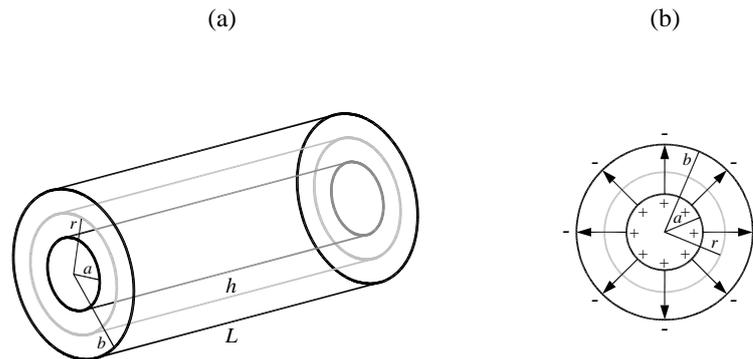
7.2 Capacitor cilíndrico

Considere duas cascas cilíndricas coaxiais, com raios a e b (com $b > a$), e comprimento L (como na figura 7.3). Esse arranjo é conhecido como capacitor cilíndrico. As cargas em cada placa continuam iguais, mas a área de cada uma delas é diferente, e a densidade de cargas também será.

Vamos assumir que uma carga $+Q$ está na superfície interna, e uma carga $-Q$ na superfície externa. Pela lei de Gauss, o campo elétrico só é não-nulo na região entre as placas. Pela simetria, o campo deve ser radial e depender apenas da distância ao eixo. Tomamos como superfície gaussiana a de um cilindro totalmente contido na região entre as placas, de raio r (com $a < r < b$), e altura h

(com $h < L$). O fluxo sobre as tampas é nulo porque o campo elétrico é perpendicular à superfície; sobre a parte lateral, o campo é constante (em módulo) e sempre aponta para fora. As configurações da carga e do campo estão mostradas na figura 7.3b.

Figura 7.3 - Capacitor cilíndrico: (a) vista lateral, mostrando o capacitor e a superfície gaussiana; (b) vista por cima, mostrando a distribuição de carga e as linhas do campo elétrico



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

A carga contida nesse cilindro é uma fração h / L da carga da superfície interna. Então, pela lei de Gauss:

$$2\pi r h E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{h}{L} Q \quad (10)$$

Portanto:

$$E(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L r} \quad (11)$$

O campo elétrico cai com o inverso da distância ao eixo. A diferença de potencial é obtida ao integrar o campo elétrico de a a b :

$$V = \int_a^b E(r) dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (12)$$

A capacitância é:

$$C = \frac{Q}{V} = \epsilon_0 \frac{2\pi L}{\ln(b/a)} \quad (13)$$

Um caso importante é quando as placas estão muito próximas, ou seja, a diferença $d = b - a$ é muito pequena em comparação com a . Nesse caso, podemos usar a aproximação $\ln(b/a) = \ln(1 + d/a) \approx d/a$:

$$C = \epsilon_o \frac{2 \cdot \pi \cdot a \cdot L}{d} \quad (14)$$

Observando a fórmula acima, vemos que $2\pi aL$ é a área de cada placa (as duas placas têm aproximadamente a mesma área), e d é a separação entre elas. Recuperamos, portanto, a fórmula para o capacitor de placas paralelas.

De fato muitos capacitores comerciais são cilíndricos formados por um par de folhas condutoras enroladas em espiral. Isto lhe confere uma maior relação área das placas/volume, ou seja, uma maior capacitância por volume. O cálculo da capacitância deste tipo de capacitor pode ser feito de forma aproximada considerando N (número de voltas da espiral) capacitores cilíndricos associados em paralelo. Veremos a seguir como fazer essa associação.

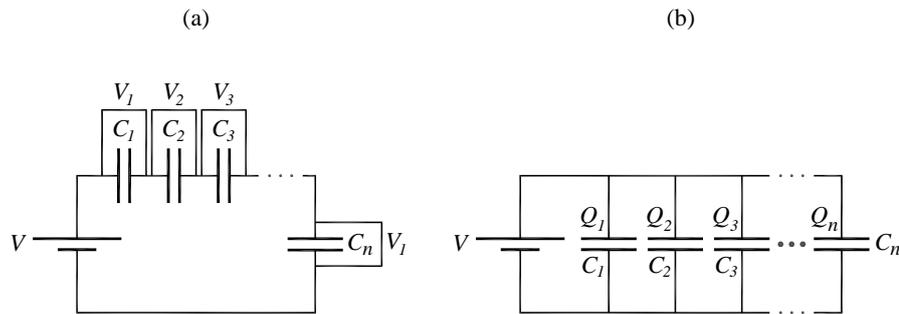
7.3 Associação de capacitores

Como no caso dos resistores, os capacitores podem ser associados em série ou em paralelo, como na figura 7.4.

Quando conectados em série, as cargas em todos são iguais. Para justificar essa afirmação, considere a placa direita do capacitor C_1 e a placa esquerda de C_2 (figura 7.4a). Essas placas estão ligadas entre si e isoladas de todo o resto. Inicialmente, elas tinham carga nula, então a soma das cargas deve permanecer nula. Se uma carga

-Q se acumular na placa direita de C_1 , uma carga +Q deve se acumular na placa direita de C_2 . Dessa forma, a carga sobre os dois capacitores é a mesma. Esse argumento pode ser usado para quantos forem os capacitores ligados em série.

Figura 7.4 - Associação de capacitores. (a) em série; (b) em paralelo.



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

A tensão sobre o conjunto dos capacitores é a soma das tensões sobre cada capacitor (isso é um fato geral sobre componentes ligados em série):

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_n \quad (15)$$

Como a carga em todos é igual:

$$V = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \dots + \frac{Q}{C_n} \quad (16)$$

A capacitância equivalente é $C_{eq} = Q / V$. Portanto

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{V}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \quad (17)$$

Na associação em paralelo, os capacitores estão em um mesmo potencial (um fato geral sobre componentes em paralelo), mas acumulam cargas diferentes (figura 7.4b). A carga total é a soma das cargas acumuladas em cada capacitor.

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n \quad (18)$$

Dividindo a equação anterior por V , obtemos a capacitância equivalente:

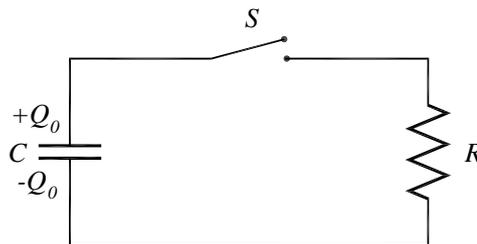
$$C_{eq} = \frac{Q}{V} = C_1 + C_2 + \dots + C_n \quad (19)$$

As fórmulas para associação de capacitores são análogas às de associação de resistores, mas há uma importante diferença. Resistências se somam quando conectadas em *série*, enquanto capacitâncias se somam quando conectadas em *paralelo*. A soma dos inversos ocorre quando resistências se ligam em *paralelo*, ou quando capacitores se ligam em *série*.

7.4 Carga e descarga de capacitores

Considere o circuito mostrado na figura 7.5, onde um capacitor carregado com carga Q_0 está ligado em série a um resistor através de uma chave. Inicialmente, com a chave aberta e a tensão nos terminais do capacitor é $V_0 = Q_0 / C$.

Figura 7.5 - Descarga de um capacitor.



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

No momento em que a chave é ligada, o capacitor passa a funcionar como uma fonte e estabelece uma corrente variável que flui através do resistor. Aplicando a lei das malhas de Kirchoff ao circuito obtemos:

$$V_C = RI \quad (20)$$

Como a tensão nos terminais do capacitor é $V_C = Q/C$ e a corrente decresce no tempo (o capacitor é um reservatório finito de cargas) a corrente no circuito deve ser escrita como $I = -dQ/dt$. Assim,

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \quad (21)$$

Essa é uma equação diferencial de primeira ordem, linear e homogênea. A condição inicial é $Q(0) = Q_0$, e a solução que a satisfaz (deduza essa expressão) é:

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/RC} \quad (22)$$

A tensão sobre o capacitor é:

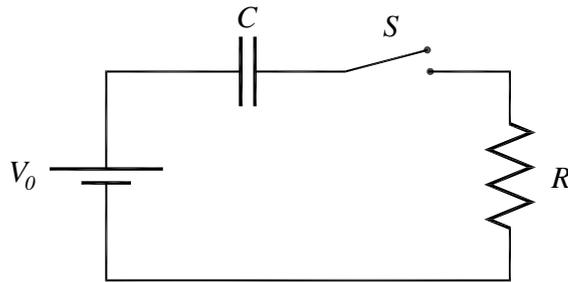
$$V(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{Q_0}{C} e^{-t/RC} = V_0 e^{-t/\tau} \quad (23)$$

A carga e a tensão decaem exponencialmente, com constante tempo igual a $\tau = RC$. Isso significa que, após decorrido um tempo τ , a tensão decai a $1/e$ do valor inicial.

Vamos agora estudar o carregamento de um capacitor. Para isso, é necessário inserir uma bateria (em série) no circuito, como na figura 7.6. Aplicando a lei de malhas de Kirchoff ao circuito, obtém-se:

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V_0 \quad (24)$$

Figura 7.6 - Circuito para carregar um capacitor



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

A condição inicial é $Q(0) = 0$. Por causa do termo V_0 , temos agora uma equação não-homogênea, cuja solução (deduza essa expressão) é:

$$Q(t) = CV_0 \cdot (1 - e^{-t/RC}) \quad (24)$$

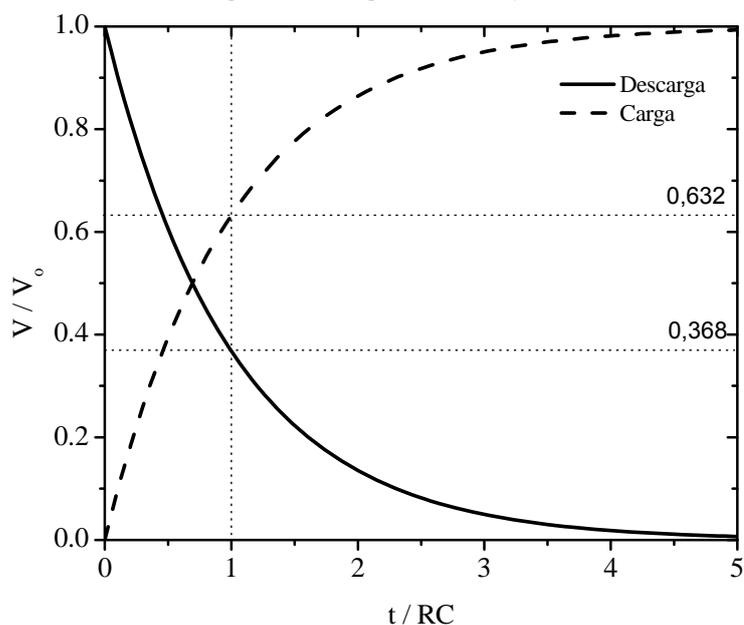
A tensão sobre o capacitor é:

$$V(t) = V_0 \cdot (1 - e^{-t/RC}) \quad (25)$$

A tensão se aproxima de forma assintótica da tensão da fonte V_0 .

A figura 7.7 mostra os gráficos típicos de carga e descarga de um capacitor:

Figura 7.7 - Curvas de carga e descarga de um capacitor



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Existe um instrumento chamado capacímetro que é projetado para medir capacitâncias. Alguns modelos de multímetros digitais também já apresentam uma função para medir capacitâncias. No entanto, quando não se dispõe deste instrumento é comum se analisar as curvas de carga e descarga de capacitores, utilizando um resistor de valor conhecido, com o fim de determinar a capacitância. Isso é feito através da determinação da constante de tempo de carga ou descarga.

Uma aplicação importante dos circuitos RC é utiliza-lo como *base de tempo* para circuitos temporizadores. Uma lâmpada de corredor, por exemplo, pode ser programada para ficar acesa por um tempo determinado. Utiliza-se um capacitor que é carregado quando

a lâmpada é ligada e a partir daí se descarrega em uma resistência. Um circuito eletrônico monitora a tensão na resistência e faz com que a lâmpada se desligue quando essa tensão atingir um limiar. O tempo necessário para que isso ocorra depende da constante de tempo do circuito, o que permite regular quanto tempo a lâmpada permanece acesa. Em geral, esse tipo de circuito RC é constituído por um capacitor fixo e um reostato, o que permite o ajuste da constante de tempo para qualquer valor.

7.5 Experimentos

A seguir são propostos experimentos passíveis de serem realizados no contexto deste tópico. Fica a critério de cada docente a definição de quais itens realizar.

Em todos os experimentos realizados, os valores encontrados experimentalmente deverão ser comparados com valores tabelados ou especificados pelos fabricantes dos componentes.

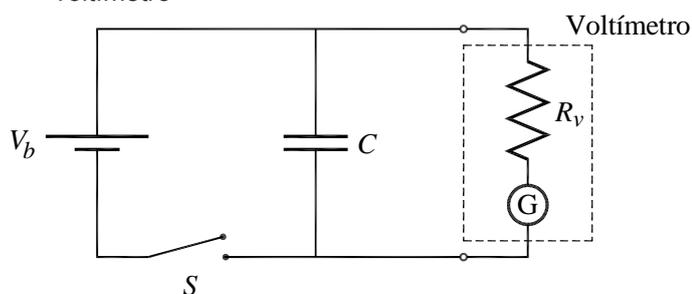
Sempre que surgir uma dúvida quanto à utilização de um instrumento, consulte o professor para esclarecimentos.

Atenção: Você utilizará capacitores eletrolíticos que devem ser conectados ao circuito obedecendo a polaridade indicada no mesmo. Verifique sempre a polaridade do capacitor antes de conectá-lo ao circuito (positivo da fonte ligado ao positivo do capacitor). A inversão desta situação pode acarretar na explosão do capacitor.

7.5.1 Descarga de um capacitor

a) Monte o circuito indicado na figura 7.8, utilizando um multímetro analógico Minipa e um capacitor de $100\ \mu\text{F}$. Use-o na escala de 10V e anote sua resistência interna para esta escala.

Figura 7.8 - Descarga de um capacitor pela resistência interna de um voltímetro



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

b) Ajuste a tensão da fonte para 9 V (verifique com o voltímetro).

c) Carregue o capacitor de $100\ \mu\text{F}$ ligando o interruptor S . Desligue o interruptor e observe a descarga do capacitor sobre a resistência interna do multímetro. Meça o tempo necessário para que o capacitor atinja as seguintes tensões: 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2, 0 V. Após cada tensão ser atingida, carregue novamente o capacitor.

Tabela 7.1 - Resultados da medida das tensões durante a descarga de um capacitor

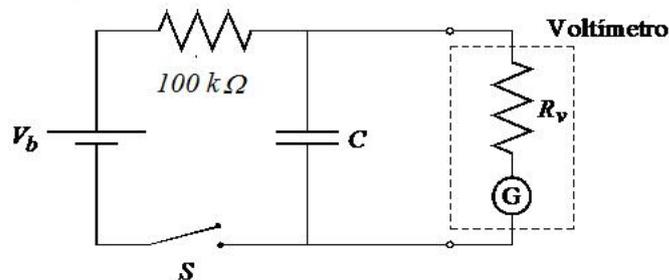
Tensão (V)	Tempo (s)	Tensão (V)	Tempo (s)
R (resistência interna do multímetro) = Constante de tempo (RC) = Capacitância (C) =			

d) Faça um gráfico de tensão por tempo em papel monolog e determine a constante de tempo τ . A partir dela, determine a capacitância.

7.5.2 Carga de um capacitor

a) Monte o circuito mostrado na figura 7.9, utilizando um resistor de $100\text{ k}\Omega$ em série com a bateria (como na figura 7.9). Desconecte o capacitor e anote o valor da tensão indicada pelo voltímetro analógico. Essa será a máxima tensão no capacitor V_0 .

Figura 7.9 - Carga de um capacitor



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

b) Conecte o capacitor, e meça o tempo que o capacitor leva para se carregar até alguns níveis predeterminados de tensão.

Sempre comece com o capacitor descarregado.

c) Deduza a expressão da constante de tempo do carregamento desse circuito.

d) Faça um gráfico desses pontos em papel milimetrado.

e) Faça um gráfico, em papel monolog, de $V_0 - V$, onde V_0 é o valor que você mediu no item a. A partir desse gráfico, calcule a constante de tempo e a capacitância.

Tabela 7.2 - Resultados da medida das tensões durante a carga de um capacitor

Tensão (V)	Tempo (s)	Tensão (V)	Tempo (s)
R (resistência interna do multímetro) = Constante de tempo (RC) = Capacitância (C) =			

7.5.3 Associação de um capacitor carregado com um descarregado

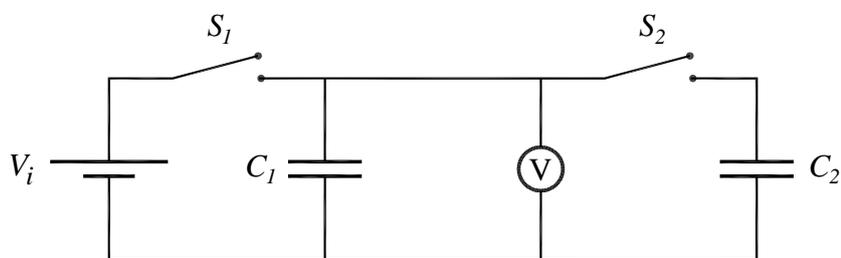
a) Monte o circuito da figura 7.10 usando capacitores eletrolíticos (verifique a polaridade dos mesmos). Ajuste a fonte para $V_i = 9 \text{ V}$, mantenha a chave S_2 aberta e feche a chave S_1 para carregar o capacitor C_1 de $1000 \mu\text{F}$ e meça a tensão V_i nos terminais do capacitor C_1 , utilizando o multímetro digital.

b) Em seguida, desconecte a fonte (abra a chave S_1) e feche a chave S_2 para ligar o capacitor descarregado C_2 de $2200 \mu\text{F}$ em paralelo com o capacitor já carregado (C_1).

c) Meça a tensão de equilíbrio da associação, V_f .
Importante: Antes de repetir o experimento lembre-se de descarregar o capacitor C_2 para evitar que sobre qualquer carga armazenada entre suas placas.

d) Calcule a energia total armazenada pelos capacitores antes e depois do contato.

Figura 7.10 - Circuito para estudar a conservação da energia eletrostática em capacitores



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Tabela 7.3 - Resultados da medida da energia eletrostática em capacitores

Capacitância de C_1	Capacitância de C_2	Tensão inicial em C_1	Tensão final	Energia inicial	Energia final

e) Analise os resultados obtidos tem em vista a lei de conservação da energia.

Bibliografia

HALLIDAY, D.; RESNICK, R. **Física III**. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1974.

NUSSENZVEIG, H.M. **Curso de física básica: eletricidade e magnetismo**. São Paulo: Edgard Blucher, 1998. v.3.

TIPPLER, P.A. **Física: para cientistas e engenheiros**. 3. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 1991. v. 3.

YOUNG, H. D.; FREEDMANN, R. A. **Sears e Zemanski física III: eletricidade e magnetismo**. São Paulo: Pearson, c2004.

Capítulo 8 Instrumentos de medidas I: voltímetros, amperímetros e ohmímetros.

Neste Capítulo vamos estudar o princípio de funcionamento de instrumentos de medidas elétricas, em particular, voltímetros, amperímetros e ohmímetros.

Importante: O conteúdo da introdução teórica é apenas um guia para os conceitos necessários para a realização dos experimentos. Você deve aprofundar os conceitos consultando os livros citados na bibliografia ou outros de sua preferência.

8.1 Galvanômetro d'Ansonval

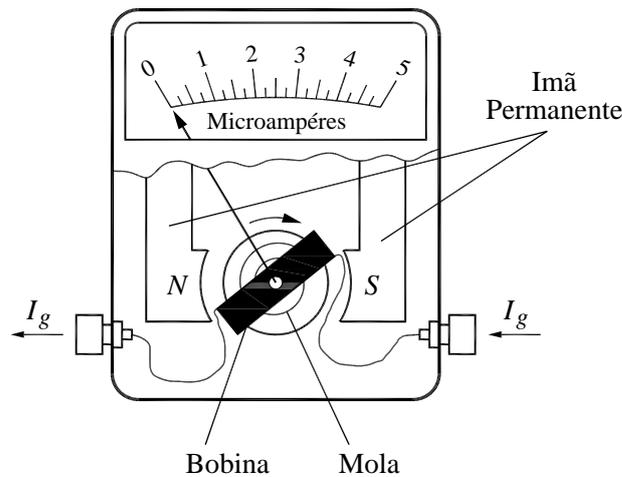
Os primeiros instrumentos para medir correntes elétricas apareceram ainda em 1820, ano em que Öersted, físico dinamarquês, mostrou que elas podem provocar efeitos magnéticos, e eram conhecidos como “galvanômetros de tangente”. Consistia de uma bobina formada por várias voltas de fio, que tinha que ser alinhada para que o campo magnético produzido no seu centro estivesse na direção perpendicular ao campo terrestre. Uma bússola era posicionada no centro da espira. Tem-se então dois campos magnéticos perpendiculares, e a agulha da bússola vai apontar na direção da resultante; a razão entre os dois campos é dada pela tangente do ângulo que a agulha faz com o norte. Sabia-se que o campo magnético produzido é proporcional a corrente; portanto a

corrente é proporcional a tangente do ângulo, daí o nome do aparelho.

Décadas mais tarde, em 1882, Jacques Arsène d'Ansoval, biofísico francês, propôs um novo mecanismo, que tinha a vantagem de não depender do campo terrestre e poderia ser usado em qualquer orientação. O galvanômetro d'Ansoval é baseado na deflexão de uma espira móvel devido ao campo magnético de um ímã fixo instalado no aparelho. Outra grande vantagem era a escala linear: o ângulo de deflexão era diretamente proporcional à corrente percorrida. Por esses motivos o galvanômetro d'Ansoval é muito utilizado ainda hoje, e é a base dos voltímetros, amperímetros e ohmímetros analógicos.

A figura 8.1 mostra, esquematicamente, um galvanômetro de D'Ansoval:

Figura 8.1 - Desenho esquemático de um galvanômetro



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Quando uma corrente I_G circula na bobina, o campo magnético do ímã permanente produz um torque τ sobre ela, dado por:

$$\tau = CnBI_G \quad (1)$$

Nessa equação, B é o campo devido ao ímã permanente e n é o número de espiras da bobina. A constante C é um fator que depende de como o galvanômetro foi construído. O eixo da bobina é solidário a uma mola espiral; quando a bobina gira de um ângulo θ , a mola produz um torque restaurador oposto ao produzido pelo campo, cujo valor é $K\theta$. Uma posição de equilíbrio é alcançada quando:

$$K\theta = CnBI_G \quad (2)$$

Logo:

$$\theta = \frac{CnB}{K} I_G \quad (3)$$

O ângulo de deflexão é proporcional a corrente que atravessa o galvanômetro. O instrumento é tanto mais sensível quanto menor for a corrente I_G necessária para provocar um dado desvio θ . Assim, os galvanômetros são caracterizados pela corrente necessária para que o ponteiro atinja deflexão máxima, corrente de fundo de escala, I_{Gmax} e por sua resistência interna, R_G .

Conhecendo estes parâmetros poderemos determinar a tensão de fundo de escala V_G , que é a tensão sobre o galvanômetro

quando o ponteiro está na deflexão máxima e é simplesmente o produto da corrente de fundo de escala pela resistência interna. Por exemplo, um galvanômetro com corrente de fundo de escala de $50 \mu\text{A}$ e resistência interna de $1 \text{ k}\Omega$ possui tensão de fundo de escala de $50 \mu\text{A} \cdot 1 \text{ k}\Omega = 50 \text{ mV}$.

Se uma tensão maior que V_G for aplicada diretamente aos terminais do galvanômetro, a corrente que atravessará a bobina será maior que a corrente de fundo de escala, o que provocará aquecimento excessivo da bobina e conseqüentemente a falência do dispositivo. ***Nunca conecte um galvanômetro em um circuito sem ter certeza que a tensão em seus terminais seja menor que o valor de V_G especificado pelo fabricante.***

8.2 Voltímetros

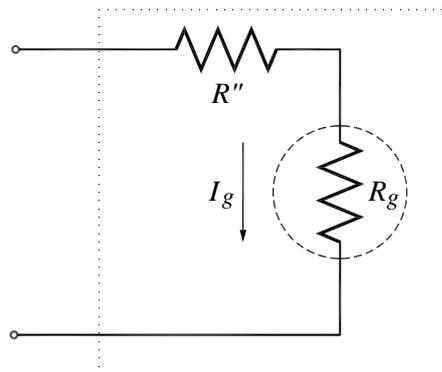
Os voltímetros analógicos são instrumentos de medida de tensão que utilizam um galvanômetro como sensor. Para poder medir tensões maiores do que a tensão do fundo de escala do galvanômetro, é necessário usar um divisor de tensão, que é nada mais que um resistor R'' colocado em série, como na figura 8.2. Note que, com o resistor R'' , a tensão entre os terminais fica dividida entre o resistor e o galvanômetro, por isso o nome “divisor de tensão”.

Se entre os terminais da figura 8.2 for aplicada uma tensão V , a corrente através do galvanômetro será dada por:

$$V = (R'' + R_G) I_G \rightarrow I_G = \frac{V}{R'' + R_G} \quad (4)$$

Pela expressão 4 vemos que a corrente que flui através do galvanômetro é proporcional à tensão aplicada nos terminais do voltímetro. Logo, conhecendo R'' e R_G é possível determinar a correspondência entre I_G e V (fator de escala), ou seja, temos um instrumento cuja deflexão do galvanômetro reflete uma medida de tensão.

Figura 8.2 - Circuito elétrico de um voltímetro



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Se a corrente máxima permitida pelo galvanômetro for I_{Gmax} a máxima tensão que poderá ser medida pelo voltímetro (usualmente denominada alcance ou tensão de fundo de escala do voltímetro) será:

$$V_{max} = (R'' + R_G)I_{Gmax} \quad (5)$$

Em outras palavras, podemos escolher a resistência R'' para construir um voltímetro com tensão de fundo de escala

$$V_{max}$$

$$R'' = \frac{V_{\max}}{I_{G\max}} - R_G \quad (6)$$

Quando se deseja medir a diferença de potência em um elemento de um circuito, o voltímetro deve ser conectado *em paralelo* com o mesmo. No entanto, como a resistência interna do voltímetro ($R_v = R'' + R_G$) não é infinita, o voltímetro drena uma parte da corrente que passaria pelo elemento, o que pode afetar as características do circuito. Para minimizar este efeito, a resistência interna do voltímetro deve ser *muito alta* (muito maior do que a do elemento conectado em paralelo), de modo que a corrente drenada pelo mesmo seja desprezível. Da equação 6, vemos que:

$$R_v = R'' + R_G = \frac{V_{\max}}{I_{G\max}} \quad (7)$$

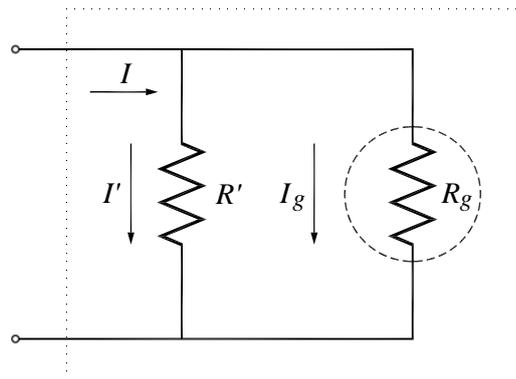
Isso significa que a resistência interna de um voltímetro é diretamente proporcional à tensão de fundo de escala. Usar o voltímetro numa escala maior torna a medida menos precisa (numa situação em que é possível usar uma escala menor), porque a deflexão do ponteiro é menor e mais difícil de ser medida, mas tem a vantagem de maior resistência interna. Os voltímetros analógicos (de ponteiro) costumam indicar a resistência interna por volt de fundo de escala (usualmente expresso em $k\Omega / V$). Vemos também que a relação entre R_v e V_{\max} depende apenas de $I_{G\max}$; para aumentar R_v ,

é necessário um galvanômetro bastante sensível, com I_{Gmax} pequeno.

8.3 Amperímetros

Os amperímetros são instrumentos de medida de corrente que também utilizam um galvanômetro como sensor. Para permitir a medida de correntes maiores que a corrente de fundo de escala, é necessário usar um divisor de corrente, que é nada mais que uma resistência R' em paralelo (chamada de resistência *Shunt*), como na figura 8.3. Note que a corrente I que entra é dividida entre a resistência R' e o galvanômetro, por isso o nome “divisor de corrente”.

Figura 8.3 - Circuito elétrico de um amperímetro



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Se uma corrente I circular entre os terminais da figura 8.3, teremos:

$$I = I_G + I' \quad (8)$$

$$R'I' = R_G I_G \quad (9)$$

Podemos então achar I_G em função de I :

$$I_G = \frac{R'}{R'+R_G} I \quad (10)$$

A corrente que efetivamente passa pelo galvanômetro é uma fração (fixa) da corrente que atravessa o amperímetro, de modo que podemos associar a corrente do circuito diretamente com a indicação do galvanômetro conhecendo o fator de escala $\frac{R'}{R'+R_G}$. A corrente de fundo de escala pode ser calculada colocando $I_G = I_{G\max}$:

$$I_{\max} = \frac{R'+R_G}{R'} I_{G\max} \quad (11)$$

Se desejarmos construir um amperímetro para medir correntes de até I_{\max} , a resistência R' deve ser:

$$R' = R_G \frac{I_{G\max}}{I_{\max} - I_{G\max}} \quad (12)$$

O amperímetro deve ser ligado *em série* a um circuito, no ramo em que se deseja medir a corrente. Quando a corrente o atravessa, aparece uma diferença de potencial, que pode afetar o funcionamento do circuito. Para minimizar isso, é preciso que a

resistência interna do amperímetro seja *muito baixa* (muito menor do que a resistência total do ramo em que ele está inserido).

O amperímetro consiste de dois resistores em paralelo. Sua resistência interna é:

$$R_a = \frac{R' R_G}{R' + R_G} = \frac{R_G I_{G \max}}{I_{\max}} \quad (13)$$

Mas $R_G I_{G \max}$ é a tensão de fundo de escala do galvanômetro:

$$R_a = \frac{V_{G \max}}{I_{\max}} \quad (14)$$

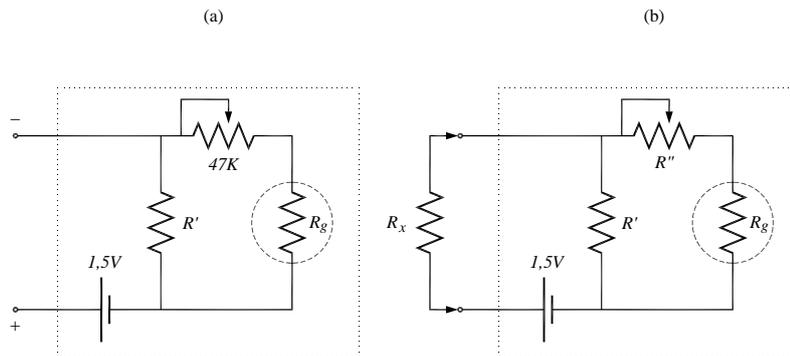
Isso significa que a resistência interna de um amperímetro é inversamente proporcional à corrente de fundo de escala. Usar o amperímetro numa escala maior torna a medida menos precisa (numa situação em que é possível usar uma escala menor), mas tem a vantagem de menor resistência interna. Assim como no caso dos voltímetros, é desejável ter um galvanômetro bastante sensível, com $V_{G \max}$ pequeno.

8.4 Ohmímetros

Em princípio, a medida da resistência elétrica de um dado elemento pode ser obtida simplesmente pela razão entre a tensão em seus terminais e a corrente que o atravessa. Sendo assim, é

natural pensar que um instrumento capaz de medir resistência elétrica seja uma “combinação” de um voltímetro, um amperímetro e uma fonte de tensão para estabelecer a corrente. Como podemos ver na figura 8.4a, um ohmímetro é constituído destes elementos.

Figura 8.4 - Circuito elétrico de um ohmímetro



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Para utilizar o circuito acima como ohmímetro é necessário calibrá-lo, o que pode ser feito de modo análogo aos casos anteriores. Se desejarmos medir a resistência de um resistor R_x , devemos conectá-lo ao ohmímetro conforme mostrado na figura 8.4b. Das leis de Kirchof se obtém as seguintes equações:

$$R_x I_x + (R' + R_G) I_G = V_B \quad (15a)$$

$$(R' + R_G) I_G = R' (I_x - I_G) \quad (15b)$$

De 15b, é possível isolar I_x e substituir em 15a para achar I_G . O resultado é:

$$I_G = \frac{V_B}{R_G + R''} \frac{1}{1 + \frac{R_x}{R_{1/2}}} \quad (16)$$

Onde $R_{1/2}$ é dado por:

$$R_{1/2} = \frac{R'(R_G + R'')}{R' + R_G + R''} \quad (17)$$

Os dois limites para I_G em função dos valores de R_x são:

$$I_{G\text{máx}} = \frac{V_B}{R_G + R''}, \text{ para } R_x = 0 \quad (18a)$$

$$I_{G\text{min}} = 0, \text{ para } R_x = \infty \quad (18b)$$

Logo, quanto maior for o valor de R_x menor será a corrente no galvanômetro: a escala do ohmímetro é invertida. O parâmetro $R_{1/2}$ é conhecido como *fator de escala do ohmímetro* e, como pode ser verificado na equação 16, corresponde ao valor de R_x para o qual a corrente no galvanômetro é metade de seu valor em curto (quando $R_x = 0$). Portanto, a corrente no galvanômetro e o valor da resistência R_x estão univocamente relacionados através da equação 16, o que significa que podemos determinar R_x através de uma leitura de I_G .

O valor de R'' deve ser ajustado para que a deflexão do ponteiro do galvanômetro seja máxima quando $R_x = 0$ (terminais do galvanômetro em curto). Isso pode ser feito observando a equação 18a. Por exemplo, se tivermos um galvanômetro com $R_G = 1 \text{ k}\Omega$ e

fundo de escala $50 \mu\text{A}$, e usarmos uma pilha de $1,5 \text{ V}$ como V_B , deveríamos usar $R'' = 29 \text{ k}\Omega$. Nos multímetros analógicos comerciais, esse ajuste pode ser feito externamente através de um cursor.

Feito isso, R' pode ser escolhido para determinar o valor de $R_{1/2}$, definindo o fator de escala do ohmímetro. A escolha adequada de $R_{1/2}$ define a precisão do ohmímetro; a medida é mais precisa se $R_{1/2}$ e R_x forem da mesma ordem de grandeza. Isso é fácil de perceber pela equação 16: se $R_x = 10R_{1/2}$, a corrente no galvanômetro é 10% do valor máximo; se $R_x = R_{1/2}/10$, ela é 90% do valor máximo. É conveniente que a leitura não esteja nem muito próximo do zero nem do valor máximo, e para isso R_x e $R_{1/2}$ devem ser da mesma ordem de grandeza.

8.5 Utilização de voltímetros e amperímetros em medidas de corrente alternada

Até o momento estudamos apenas circuitos de corrente contínua e por isso discutimos a utilização do galvanômetro para medidas de tensões e correntes contínuas. No entanto, os galvanômetros também podem ser utilizados para medir tensões e correntes que variam no tempo, mas neste caso algumas modificações devem ser feitas. Para entender melhor quais são essas modificações, suponha que dispomos de um galvanômetro onde sem a aplicação de tensão em seus terminais o ponteiro aponte para o centro da escala. Se uma tensão positiva for aplicada, o ponteiro se desloca para a direita e se a polaridade for invertida (tensão negativa) o ponteiro se desloca para a esquerda. Este tipo de galvanômetro é denominado de galvanômetro de zero central.

Note que o galvanômetro mostrado na figura 8.1 é de zero lateral e, portanto, não suporta a aplicação de tensões negativas. No entanto, se construirmos um voltímetro ou um amperímetro utilizando os esquemas mostrados nas figuras 8.2 e 8.3, mas utilizando um galvanômetro de zero central, obteremos instrumentos capazes de medir tensões ou correntes positivas e negativas. Supondo que tenhamos construído esses instrumentos (voltímetro e amperímetro de zero central), vamos realizar um experimento hipotético onde aplicamos uma tensão que varia no tempo de forma senoidal, $V(t) = V_0 \text{sen}(\omega t)$, com baixa frequência (1 Hz por exemplo) aos terminais de um resistor ôhmico. Se medirmos a tensão nos terminais do resistor com o voltímetro de zero central, observaremos uma oscilação do ponteiro entre $+V_0$ e $-V_0$ com a frequência de 1 Hz. O mesmo acontecerá com uma medida da corrente que atravessa o resistor, que neste caso oscilará entre $+V_0/R$ e $-V_0/R$. Se mantivermos a amplitude da tensão aplicada no resistor e aumentamos a frequência para 60 Hz, por exemplo, veremos que tanto o voltímetro quanto o amperímetro indicarão tensão e corrente nulos. Isso acontece porque para 60 Hz o tempo de resposta mecânica do galvanômetro é muito maior que o período das oscilações impostas pela aplicação da tensão alternada. Logo, o que o instrumento mede são valores médios de tensão e corrente, os quais são nulos. No entanto, sabemos que em cada instante existe uma tensão aplicada no resistor que impõe a circulação de corrente no mesmo, ou seja existe energia (ou potência) sendo dissipada no resistor ($P(t) = V(t) \times I(t)$). Deste modo, para quantificar a potência elétrica dissipada em um resistor percorrido por uma corrente alternada, medidas de valores médios de tensão e corrente não são

adequados, pois $\overline{P(t)} = \overline{V(t) \times I(t)} \neq \overline{V(t)} \times \overline{I(t)}$. A pergunta então é: Quais são as grandezas médias associadas a medidas de tensão ou corrente que podem ser diretamente relacionadas com a potência média dissipada no resistor? Para responder essa questão consideremos que:

$$\overline{P(t)} = \overline{V(t) \times I(t)} = \frac{\overline{V^2(t)}}{R} = R \times \overline{I^2(t)} \quad (19)$$

Ou seja, medidas de $\overline{V^2(t)}$ ou $\overline{I^2(t)}$ seriam adequadas aos nossos propósitos, já que se referem à média de valores positivos e, portanto, são diferentes de zero.

Vamos considerar agora tensões e corrente contínuas V_{DC} e I_{DC} que produzam a mesma potência média dissipada no resistor que o caso de corrente alternada anterior. Temos então que:

$$P_{DC} = \overline{P(t)} \rightarrow \frac{V_{DC}^2}{R} = \frac{\overline{V^2(t)}}{R} \quad \text{e} \quad R \times I_{DC}^2 = R \times \overline{I^2(t)} \quad (20)$$

Ou seja:

$$V_{DC} = \sqrt{\overline{V^2(t)}} \quad \text{e} \quad I_{DC} = \sqrt{\overline{I^2(t)}} \quad (21)$$

Portanto, os valores de tensão e corrente V_{DC} e I_{DC} são os valores equivalentes em corrente contínua que levam à mesma potência média dissipada que $V(t)$ e $I(t)$ em corrente alternada. Por isso são usualmente denominados de valores eficazes de tensão e corrente. Note ainda que os valores eficazes são as raízes

quadradas dos valores médios quadráticos, e por isso são também referidos como valores RMS (do inglês *Root Mean Square*). Assim para tensões e correntes senoidais os valores RMS são:

$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \{V_0 \text{sen}(\omega t)\}^2 dt} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \quad ; \quad I_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \{I_0 \text{sen}(\omega t)\}^2 dt} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \quad (22)$$

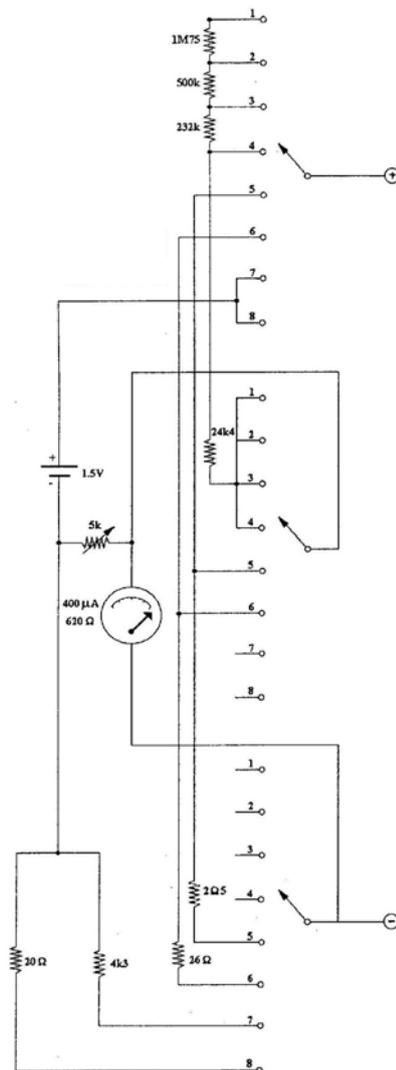
Logo, os valores V_{RMS} e I_{RMS} são medidas de tensão e corrente adequadas em circuitos de corrente alternada, pois o seu produto expressa a potência média dissipada no circuito. Resta agora saber como esses valores podem ser obtidos utilizando os galvanômetros que estudamos até o momento. Como os galvanômetros são capazes de medir corrente contínua, o que precisamos é de um circuito que transforme tensão e corrente alternados em tensão e corrente contínua equivalente (mesma potência). Isso pode ser conseguido através um circuito eletrônico denominado retificador. Assim, os voltímetros e amperímetros para corrente alternada possuem um circuito retificador capaz de transformar a tensão e corrente alternada em uma tensão e corrente contínuas equivalentes (que dissipem a mesma potência no circuito do voltímetro), mas que provocam uma deflexão no galvanômetro. Note que isso é exatamente a definição dos valores RMS e, portanto, as indicações dos voltímetros e amperímetros projetados para medir sinais que variam no tempo são exatamente os valores V_{RMS} e I_{RMS} .

8.6 Multímetro analógico comercial

A figura 8.5 mostra um exemplo de um circuito interno de um multímetro analógico comercial simples. O multímetro possui um

galvanômetro, uma bateria, alguns resistores e uma chave seletora de oito posições e três polos (isso significa que as três chaves mostradas nas figuras estarão sempre ligadas no mesmo número).

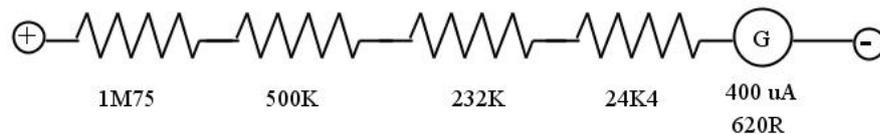
Figura 8.5 - Circuito de um multímetro analógico comercial



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Vamos supor que a chave esteja na posição 1. Qual a função do multímetro nesse caso, e quais são suas características? Para obter a resposta, vamos percorrer o circuito a partir da entrada positiva e desenhar o circuito equivalente (figura 8.6):

Figura 8.6 - Circuito equivalente ao multímetro analógico da figura 8.5, com a chave na posição 1



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Esse circuito é nada mais que um galvanômetro com uma resistência em série, o que faz com que o multímetro funcione como voltímetro. A resistência em série ao galvanômetro vale $R' = 2506,4 \text{ k}\Omega$, enquanto a resistência do galvanômetro é de $620 \text{ }\Omega$ e a corrente de fundo de escala é $400 \text{ }\mu\text{A}$. A tensão de fundo de escala desse voltímetro é:

$$V_{\text{máx}} = (2506,4 + 0,62) \text{ k}\Omega * 400 \text{ }\mu\text{A} = 1002,8 \text{ V}$$

A resistência interna é:

$$R_V = (2506,4 + 0,62) \text{ k}\Omega = 2507,02 \text{ k}\Omega$$

Analise qual é a função e as características do multímetro quando a chave seletora estiver nas outras posições.

8.7 Experimentos

A seguir são propostos experimentos passíveis de serem realizados no contexto deste tópico. Fica a critério de cada docente a definição de quais itens realizar.

Em todos os experimentos realizados, os valores encontrados experimentalmente deverão ser comparados com valores tabelados ou especificados pelos fabricantes dos componentes.

Sempre que surgir uma dúvida quanto à utilização de um instrumento, consulte o professor para esclarecimentos.

Atenção: Nunca conecte um galvanômetro em um circuito sem ter certeza que a tensão em seus terminais seja menor que o valor de V_G especificado pelo fabricante.

8.7.1 Caracterização do galvanômetro

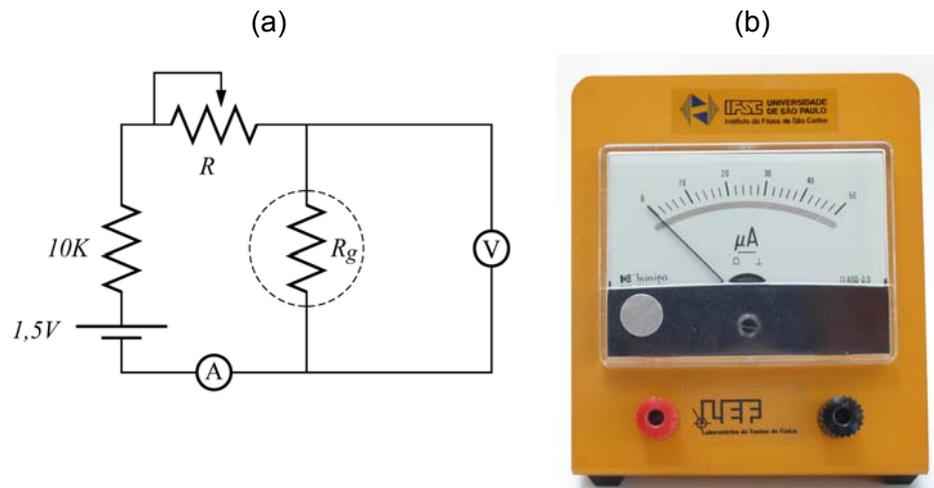
a) Utilizaremos um galvanômetro Minipa de fundo de escala 50 μA . Meça a resistência interna com um ohmímetro digital.

b) Utilizando o ohmímetro digital, ajuste o reostato disponível na sua bancada (indicado com R na Figura 8.7a) para seu valor máximo. Como sugere-se que para as configurações existentes utilize-se um reostato de 47 $\text{K}\Omega$.

c) Monte o circuito, como mostrado na figura 8.7a. Utilize um galvanômetro Minipa de fundo de escala 50 μA e uma pilha de 1,5 V como fonte de tensão (Note que o valor de 1,5V se refere ao valor

nominal da pilha. Portanto, meça o valor da tensão da pilha com um voltímetro quando a mesma estiver operando no circuito e use esse valor nos cálculos subsequentes).

Figura 8.7 - (a) Circuito para caracterização do galvanômetro; (b) Galvanômetro da marca Minipa.



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

d) Ajuste R para que se obtenha uma corrente de fundo de escala ($50 \mu\text{A}$). Nesta condição meça a tensão de fundo de escala do galvanômetro, V_{Gmax} , usando o multímetro digital. Calcule a resistência do galvanômetro, R_G , e compare com o valor encontrado anteriormente.

Tabela 8.1 - Caracterização do galvanômetro

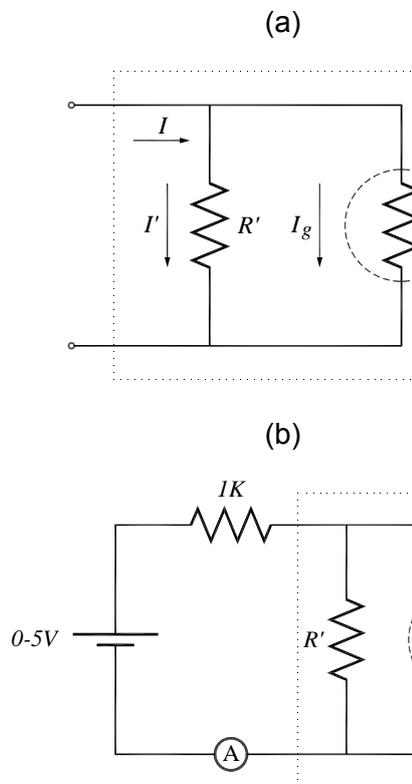
R_G (medido)	V_{Gmax}	$R_G = V_{Gmax} / I_{Gmax}$

8.7.2 Adaptação do galvanômetro para funcionar como amperímetro

a) Calcule a resistência R' que deve ser colocada em paralelo ao galvanômetro para transformá-lo em um amperímetro com fundo de escala de 5 mA. Determine as características deste amperímetro (fundo de escala e resistência interna). Monte este amperímetro esquematizado na figura 8.8.

b) Para verificar experimentalmente o fundo de escala e a linearidade do amperímetro construído é necessário correlacionar a leitura obtida como o mesmo com a medida feita com um amperímetro padrão. Monte o circuito mostrado na figura 8.8b. Variando a tensão da fonte, aumente gradativamente a corrente do circuito e faça a leitura da mesma com o amperímetro construído e com o amperímetro digital. Realize um conjunto de medidas (pelo menos 5) da indicação do galvanômetro, I_G , e da leitura do amperímetro digital. Verifique a linearidade e determine o fator de escala (experimental) desse instrumento fazendo um gráfico da leitura do amperímetro digital como função da leitura do amperímetro construído e compare com o valor calculado.

Figura 8.8 - (a) Circuito do amperímetro. (b) Circuito para calibração de um amperímetro com fundo de escala de 5mA.



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Tabela 8.2 - Calibração de um amperímetro com fundo de escala de 5mA

I_G	Fator de escala calculado	Corrente medida no amperímetro construído	Corrente medida no amperímetro padrão	Fator de escala experimental
$R' =$		$R_A(\text{calculado}) =$		$R_A(\text{medido}) =$

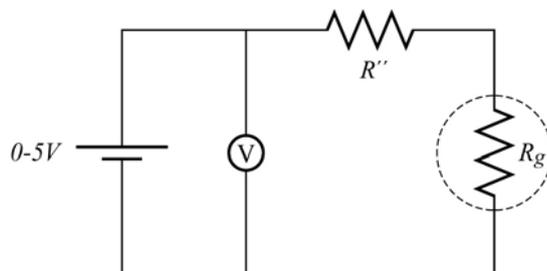
8.7.3 Adaptação do galvanômetro para funcionar como amperímetro

a) Utilizando o valor de R_G , calcule o valor da resistência R'' que deve ser adicionada em série ao galvanômetro para transformá-lo em um voltímetro com fundo de escala de 5 V, como mostrado na figura 8.9. Calcule as características deste voltímetro (fundo de escala e resistência interna). Monte este voltímetro e conecte dois cabos em seus terminais para realização das medidas.

b) Para verificar experimentalmente o fundo de escala e a linearidade do voltímetro construído é necessário correlacionar a leitura obtida como o mesmo com a medida feita com um voltímetro padrão. Neste caso, utilize um dos voltímetros digitais que estão sob sua bancada. Deste modo, ajuste fonte de tensão para 1V e meça a tensão nos terminais da mesma com o voltímetro digital e com o voltímetro construído. Repita este procedimento para 2, 3, 4, e 5V. Verifique a linearidade e determine a equação de escala (experimental) desse instrumento fazendo um gráfico da leitura do

voltímetro digital como função da leitura do voltímetro construído e compare com o valor calculado.

Figura 8.9 - Circuito para calibração do voltímetro construído



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

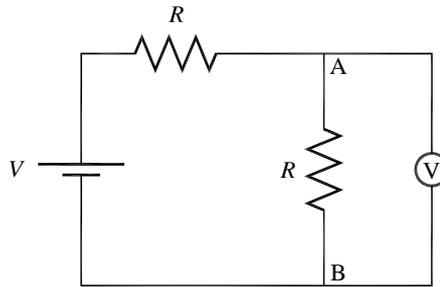
Tabela 8.3 - Calibração de um voltímetro com fundo de escala de 5V

I_G	Fator de escala calculado	Leitura de Tensão no voltímetro construído	Leitura de tensão no voltímetro padrão	Fator de escala experimental
	$R'' =$	R_V calculado =	R_V medido =	

8.7.4 Medidas de tensão com o voltímetro construído

a) Monte o divisor de tensão mostrado na figura 8.10 utilizando $R = 1 \text{ k}\Omega$. Calcule a tensão esperada entre os terminais A e B, para uma tensão de alimentação de 5 V.

Figura 8.10 - Circuito para monitorar o efeito da resistência interna do voltímetro



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

a) Ajuste a saída da fonte para 5 V. Meça a tensão entre os pontos A e B usando o voltímetro que você construiu anteriormente. Repita a medida usando o voltímetro digital com a escala apropriada. Desconecte o galvanômetro para essa medida.

b) Para o mesmo circuito da figura 8.10, calcule a tensão esperada entre os terminais A e B se $R = 100 \text{ k}\Omega$.

c) Repita as medidas do item b usando $R = 100 \text{ k}\Omega$. Compare as medidas realizadas com os dois valores de R e justifique as diferenças observadas.

d) Considerando a resistência interna do voltímetro construído, determine a expressão exata para o valor da tensão entre os pontos A e B, V_{AB} , considerando o voltímetro no circuito. Compare esses valores com os medidos experimentalmente.

e) Tente encontrar uma expressão que relacione a medida de V_{AB} realizada com o voltímetro real com a de um voltímetro supostamente ideal. Essa expressão deverá estar em termos da tensão na fonte V , dos resistores do divisor R e da resistência interna do voltímetro R_V .

Tabela 8.4 - Efeito da resistência interna na medida de tensão

	$R = 1\text{k}\Omega$	$R = 100\text{k}\Omega$
Leitura do voltímetro digital		
Leitura do voltímetro construído		
Leitura corrigida		

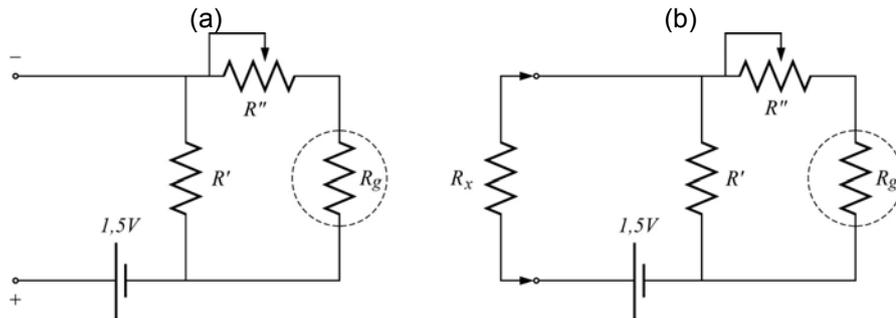
8.7.5 Adaptação de um galvanômetro para funcionar como ohmímetro

a) O circuito mostrado na figura 8.11a representa o diagrama de um ohmímetro básico. Utilizando as especificações do galvanômetro disponível e considerando uma bateria de 1,5V, calcule o valor de R'' para se deflexão máxima no galvanômetro quando os terminais do ohmímetro estiverem em curto-circuito. **Ajuste o reostato disponível na bancada para o valor calculado.** Calcule o valor de R' para obter um ohmímetro apropriado para medir resistências na faixa de 10 Ω e 1 k Ω . Monte o circuito mostrado na figura 8.11a.

b) Faça o ajuste fino de R'' para que a deflexão seja máxima quando os terminais do ohmímetro estiverem em curto. Retire o reostato do circuito e meça o valor de R'' com o ohmímetro digital. Utilize este valor de R'' para os demais cálculos.

c) Faça uma medida do valor das resistências disponíveis na sua bancada utilizando o ohmímetro construído utilizando o resistor R' (escala do ohmímetro) adequado para cada caso. Ao trocar R' refaça o ajuste fino de R'' e anote o novo valor. Realize as mesmas medidas com o ohmímetro digital e compare os resultados.

Figura 8.11 - Circuito elétrico do ohmímetro a ser construído



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Tabela 8.5 - Calibração de um voltímetro com fundo de escala de 5V

R (Ohmímetro Digital)	I_G (μA)	Escala utilizada	R (Ohmímetro Construído)
$R'' = R_G = R' \text{ (escala de } 10 \Omega) = R' \text{ (escala de } 1 \text{ k}\Omega) =$			

Bibliografia

HALLIDAY, D.; RESNICK, R. **Física III**. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1974.

NUSSENZVEIG, H.M. **Curso de física básica**: eletricidade e magnetismo. São Paulo: Edgard Blucher, 1998. v.3.

TIPPLER, P.A. **Física**: para cientistas e engenheiros. 3. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 1991. v. 3.

YOUNG, H. D.; FREEDMANN, R. A. **Sears e Zemanski física III**: eletricidade e magnetismo. São Paulo: Pearson, c2004.

Capítulo 9 Instrumentos de medidas II: osciloscópios

Neste Capítulo iremos nos familiarizar com o uso de osciloscópios, mostrando algumas das funcionalidades desses instrumentos. Através de exemplos específicos mostraremos como medir em tempo real sinais elétricos (correntes e tensões). Também utilizaremos estes equipamentos para medir a curva $V \times I$ característica de resistores e de diodos semicondutores. Neste texto usamos o osciloscópio Tektronix 2205 como modelo para discussão, porém todos os osciloscópios comerciais que operam nesta faixa de frequência possuem as mesmas funções básicas. Portanto toda discussão pode se estendida para qualquer outro modelo de osciloscópio.

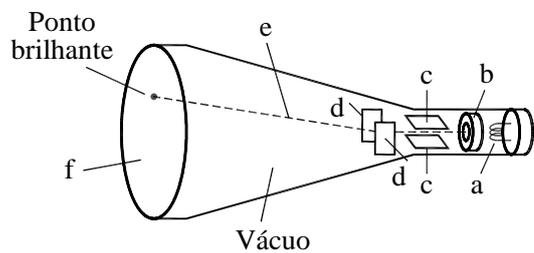
Importante: O conteúdo da introdução teórica é apenas um guia para os conceitos necessários para a realização dos experimentos. Você deve aprofundar os conceitos consultando os livros citados na bibliografia ou outros de sua preferência

9.1 O osciloscópio analógico

Os osciloscópios são instrumentos que permitem medir a dependência temporal de tensões. Na maioria dos osciloscópios essa dependência é visualizada em um tubo de raios catódicos (mostrado na figura 9.1), no qual um feixe de elétrons produzido por

um filamento aquecido é acelerado por uma fonte de alta tensão. O sistema de deflexão constituído por placas paralelas desvia o feixe horizontalmente e verticalmente. A visualização da variação temporal do sinal elétrico é obtida através uma tela fosforescente que se ilumina no ponto em que o feixe de elétrons nela colide. Essa tela possui divisões para facilitar a leitura e medidas quantitativas.

Figura 9.1 - Desenho esquemático do tubo de raios catódicos: a - filamento aquecido; b - filtro de velocidades; c - placas defletoras horizontais; d - placas defletoras verticais; e - feixe de elétrons; f - tela fosforescente.



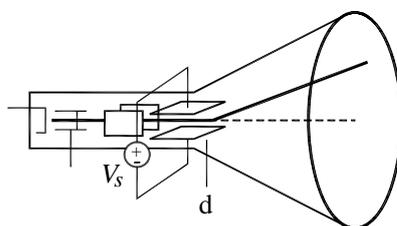
Fonte: Elaborada pelos compiladores.

O filamento a, mostrado na figura 9.1, produz um feixe colimado de elétrons, e o disco b atua como um seletor de velocidades. No interior do tubo de raios catódicos encontram-se dois pares de placas, c e d, perpendiculares entre si. Ao se aplicar uma diferença de potencial entre duas das placas cria-se um campo elétrico que irá desviar o feixe de elétrons. Por este motivo as placas são denominadas de *placas defletoras*. As placas c produzem deflexão vertical, e as placas d produzem deflexão horizontal.

9.1.1 Deflexão vertical

A posição vertical do feixe é controlada pela tensão entre as placas defletoras verticais. Quanto maior for o campo elétrico entre elas maior será o desvio sofrido pelo feixe em relação a sua trajetória inicial (como mostrado na figura 9.2). Deste modo, a distância do ponto luminoso ao centro da tela tem uma correspondência direta com a amplitude da tensão aplicada entre as placas. A tensão a ser lida não é aplicada diretamente nas placas, mas passa por um circuito que ajusta a amplitude da tensão aplicada à dimensão vertical da tela. Assim, existe uma correspondência exata entre tensão e dimensão geométrica da tela (Volts/divisão). Em osciloscópios comerciais esse ajuste é realizado pelo botão de ajuste de escala vertical mostrado na figura 9.3a, e em geral pode variar desde 5 mV / div até 20 V / div.

Figura 9.2 - Sistema de deflexão vertical. O feixe de elétrons é desviado devido à aplicação de uma tensão V nas placas defletoras verticais

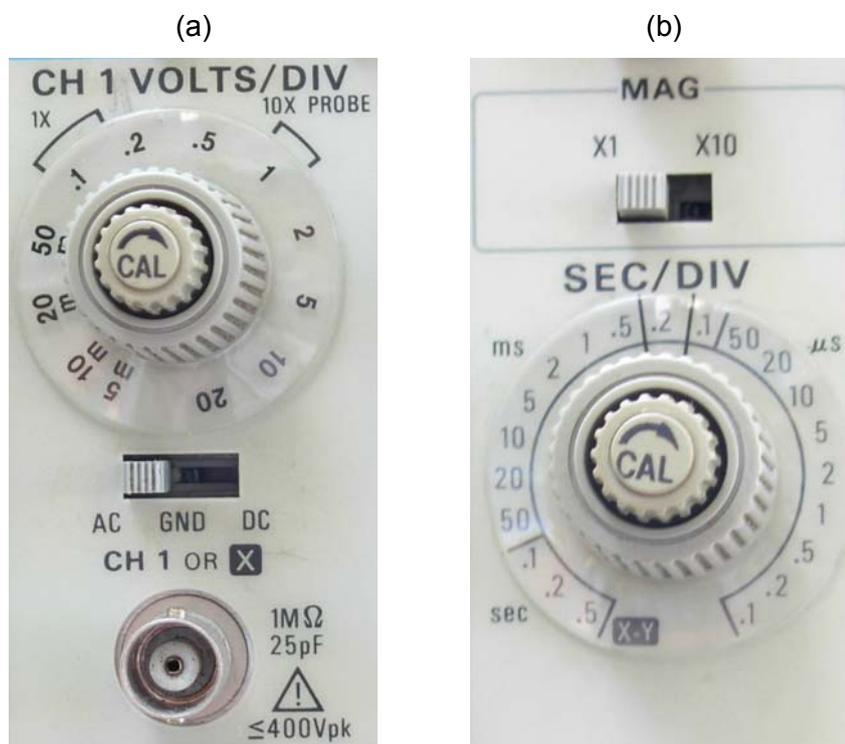


Fonte: Elaborada pelos compiladores.

9.1.2 Deflexão horizontal (Base de tempo)

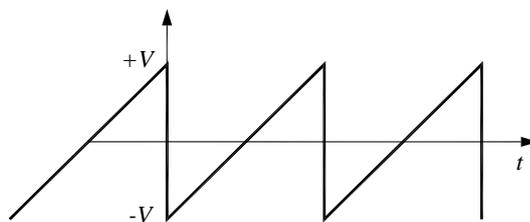
A amplitude de uma certa tensão pode ser medida através da deflexão vertical do osciloscópio, porém não é possível determinar sua dependência temporal somente através da deflexão vertical. Para isso é necessário aplicar uma tensão no sistema de deflexão horizontal que varie linearmente com o tempo (onda tipo dente de serra), como mostrado na figura 9.4.

Figura 9.3 - Botões de seleção: (a) Escala vertical; (b) Base de tempo



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Figura 9.4 - Onda dente de serra aplicada no sistema de deflexão horizontal (base de tempo)



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

A tensão entre placas de deflexão horizontal parte de um valor negativo, para que o feixe apareça do lado esquerdo da tela, e vai progressivamente aumentando até seu valor máximo, deslocando o feixe totalmente para a direita. Como esta variação é linear teremos uma correspondência direta entre o tempo e o desvio do feixe eletrônico na horizontal. A descida abrupta da onda dente de serra faz com que o feixe retorne ao lado esquerdo da tela de modo a reiniciar o processo de varredura. Para isso, o tempo de transição $+V$ para $-V$ deve ser o mais curto possível (durante essa transição o feixe de elétrons é eletronicamente bloqueado).

A rapidez com que se faz a varredura é determinada pela inclinação da onda dente de serra. Deste modo, a taxa de amostragem da escala temporal pode ser escolhida alterando-se a frequência dessa onda. Para gerá-la, o osciloscópio possui um oscilador local cuja frequência pode ser ajustada.

O botão de ajuste da base de tempo (frequência do oscilador local), mostrado na figura 9.3b, possui várias escalas de varredura de tempo / comprimento (seg/divisão). O osciloscópio apresentado operando no modo tensão frequência (XT) é capaz de amostrar sinais constantes no tempo (DC), até sinais que variam a uma

frequência de 20 MHz. A chave MAG (x1 e x10) permite que a base de tempo seja ampliada de um fator 10 em relação à escala original.

9.1.3 As entradas do osciloscópio

O conector de entrada do osciloscópio é em geral do tipo BNC, o circuito de entrada tem uma resistência interna da ordem de $1\text{ M}\Omega$ e uma capacitância de dezenas de pF ($1\text{ M}\Omega$ e 25 pF para o Tektronix 2205). Muitos osciloscópios possuem duas entradas; no entanto, nas duas entradas o terminal terra (a referência) é o mesmo (estão conectados internamente no aparelho). Essa é uma fonte frequente de erros em medidas com o osciloscópio. Conectar os terras em pontos diferentes de um circuito significa colocá-los em curto, o que pode afetar a medida. Portanto, **quando for usar ambos os canais, sempre conecte os terminais terras no mesmo ponto do circuito.**

9.1.4 Modo X-Y

Além da amostragem de tensão por tempo, os osciloscópios também podem operar de modo a mostrar a relação instantânea entre duas tensões. Neste modo de operação (conhecido como modo X-Y), as duas tensões (por exemplo, V_1 e V_2) são aplicadas simultaneamente nos dois conjuntos de placas, fazendo aparecer na tela um ponto com coordenadas (V_1, V_2) . Assim, se os valores de V_1 e V_2 variarem no tempo isso imediatamente alterará as coordenadas do feixe de elétrons, ou seja trata-se de um relação instantânea.

Esse modo de operação é muito útil para traçar curvas $V \times I$, se colocarmos no eixo horizontal a tensão sobre um resistor (que é proporcional a corrente) e no eixo vertical a tensão sobre o componente cuja curva se quer medir.

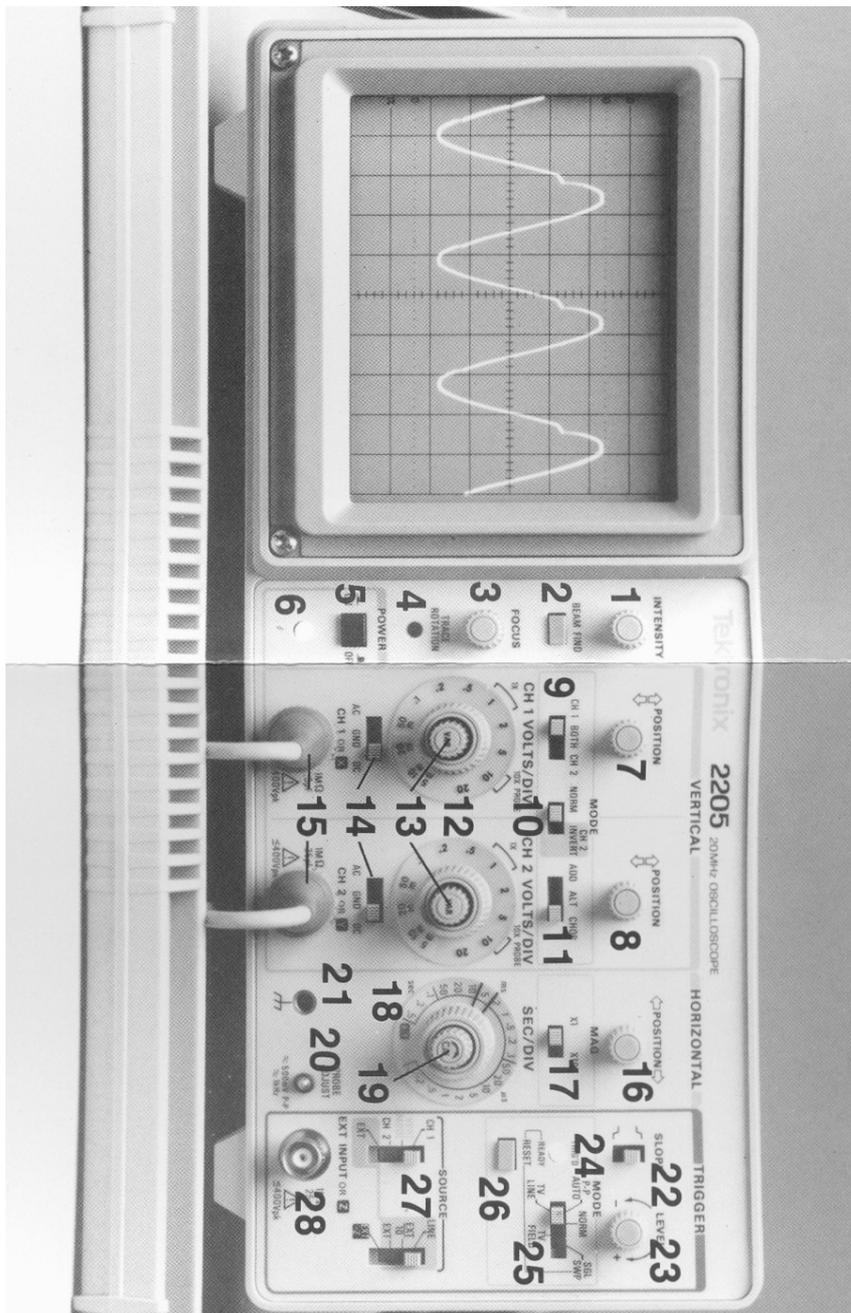
O modo de operação X-Y é ativado posicionando o seletor de base de tempo para a posição X-Y, a primeira posição à esquerda (figura 9.3b).

9.1.5 O painel do osciloscópio

O painel do osciloscópio está mostrado na figura 9.5, e contém todos os controles necessários para sua operação. As funções de cada controle serão relacionadas a seguir:

- 1-**Intensity**: ajusta a intensidade do traço
- 2-**Beam find**: move o traço para dentro dos limites da tela.
- 3-**Focus**: focaliza o feixe para produzir uma linha fina na tela.
- 4-**Trace rotation**: ajusta o traço para ser paralelo às linhas da grade.
- 5-**Power**: liga e desliga o aparelho.
- 6-**Power Indicator**: acende quando o aparelho está ligado
- 7, 8-**Vertical position**: move o traço verticalmente (controle independente para cada canal)
- 9-**CH1-Both-CH2**: seleciona os canais que serão mostrados (apenas canal 1, ambos ou apenas canal 2)
- 10-**Norm-Invert**: inverte o sinal do canal 2
- 11-**Add-Alt-Chop**: ver “Observação simultânea de dois canais (funções Alt, Chop e Add)” abaixo.

Figura 9.5 - Painel do osciloscópio Tektronix 2205



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

12-**Volts/div**: escolhe a escala vertical (controle independente para cada canal)

13-**CAL**: calibra a escala vertical. É recomendado deixar girado todo para a direita (sentido horário), que é a calibração de fábrica.

14-**AC-GND-DC**: ver “Acoplamentos AC e DC” abaixo.

15-**CH1, CH2**: conector BNC para entrada do sinal dos canais 1 e 2.

16-**Horizontal position**: move o traço horizontalmente na tela.

17-**MAG (x1,x10)**: permite expandir a escala horizontal por um fator 10.

18-**Sec/div**: escolhe a escala da base de tempo.

19-**CAL**: calibra a escala horizontal. É recomendado deixar girado todo para a direita (sentido horário), que é a calibração de fábrica.

20-**Probe adjust**: gera uma onda quadrada de amplitude 0,5 V e frequência 1 kHz para testes.

21-**Ground**: terra conectado à carcaça do equipamento.

22-**Slope**: seleciona se o sinal produzirá um *trigger* quando estiver subindo ou descendo. Ver seção sobre *trigger* abaixo.

23-**Level**: seleciona a amplitude que deve atingir um sinal para ativar o *trigger*. Ver seção sobre *trigger* abaixo.

24-**Trig'd ready**: luz que indica o estado do *trigger* (acesa se o osciloscópio está medindo, apagada se o osciloscópio está esperando um sinal de *trigger*).

25-Mode: seleciona o tipo de *trigger*. Ver seção sobre *trigger* abaixo.

26-Reset: prepara o *trigger* novamente (funciona apenas no modo *Sgl Swp*)

27-Source: indica a fonte do *trigger*. No controle esquerdo, pode-se escolher canal 1 ou 2, *Vert Mode* ou *Ext*. Se for usado *Ext*, o controle direito deve ser usado para escolher entre o sinal de 60 Hz da rede (*Line*) ou um sinal externo colocado na entrada 28. Ver seção sobre *trigger* abaixo.

28-Ext Input: entrada para o sinal externo que servirá de *trigger*.

9.1.6 Acoplamento AC e DC (Botão 14)

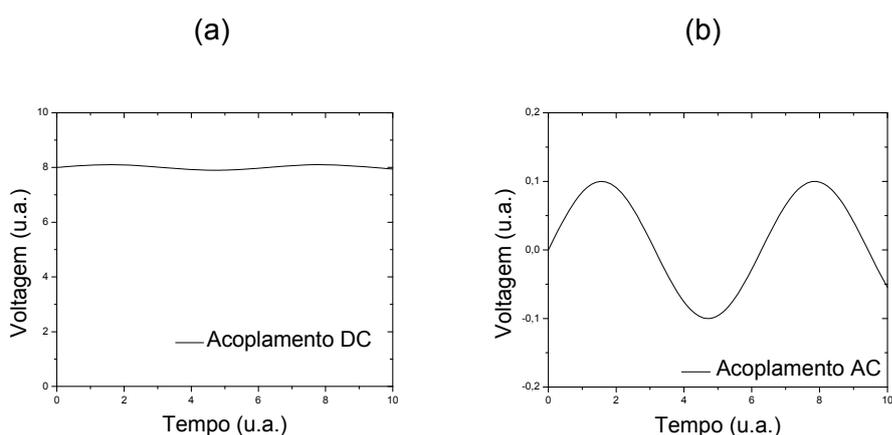
Abaixo do botão de seleção da escala vertical, há o botão de seleção de acoplamento AC ou DC, e a opção GND (ground, ou terra). No acoplamento DC, o sinal é aplicado diretamente para o circuito amplificador, enquanto no acoplamento AC há um capacitor entre a entrada e o amplificador, que é chamado capacitor de desacoplamento. Sua função é eliminar *offsets* DC presentes no sinal. Esse sistema é um filtro passa-alta, com uma frequência de corte baixa (da ordem de Hertz).

O acoplamento AC é usado, por exemplo, para medir sinais que consistem de uma tensão constante somada a oscilações alternadas de pequena amplitude em comparação ao nível constante. Para medir um sinal como este usando o acoplamento DC, teria que se usar uma escala de baixa sensibilidade ou o feixe sairia da tela; essa escala, no entanto, não permite medir o sinal alternado. Quanto o acoplamento AC é utilizado, o *offset* (*nível*

constante) é retirado, e podemos usar uma escala de maior sensibilidade para medir as oscilações.

A figura 9.6 mostra um exemplo, de um sinal alternado de amplitude 0,1 somado a um sinal constante de amplitude bem maior (8). Na figura 9.6a, o osciloscópio está configurado para acoplamento DC, e a componente alternada é difícil de ser visualizada. A figura 9.6b mostra o que é visto se o osciloscópio for configurado para acoplamento AC; Neste caso, devido a remoção do sinal constante (por um capacitor de entrada) a escala pode ser expandida, permitindo uma medida de maior sensibilidade.

Figura 9.6 - Sinal alternado (de amplitude 0,1) somado a um sinal constante (de amplitude 8), como visto em um osciloscópio nos acoplamentos DC (a) e AC (b).



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Por último, a opção GND aterra a entrada do osciloscópio, fazendo com que apareça na tela um sinal constante correspondente a 0 V.

9.1.7 Observação simultânea de dois canais (funções Alt, Chop e Add) (Botão 11)

A maioria dos osciloscópios comerciais possui dois canais de entrada, mas apenas um feixe de elétrons. Um botão permite selecionar a tensão de apenas um canal, ou de ambos simultaneamente. Nesse caso, o feixe de elétrons tem que mostrar ora o sinal de um canal e ora o sinal do outro canal. Existem dois modos de dividir o tempo do feixe entre os canais, chamados de ALT e CHOP.

No modo ALT, o feixe varre a tela completa uma vez com o sinal vindo de um canal, e na vez seguinte varre com o sinal do outro canal. Se o tempo de varredura for suficientemente rápido (em comparação com os tempos de persistência da tela e da retina), poderão ser vistos dois traços distintos, correspondentes a cada canal. No modo CHOP, o feixe alterna entre cada canal várias vezes por varredura da tela (no Tektronix 2205, essa taxa é de 500 kHz), e é mais indicado para sinais de baixa frequência. Há também a opção ADD, que mostra um único sinal correspondente à soma dos sinais de cada canal.

9.1.8 Função CH2 Invert (Botão 10)

Como o nome em inglês sugere, o botão “CH2 Invert” inverte o sinal do canal 2. Usado em conjunto com o modo Add, o sinal resultante será o sinal do canal 1 menos o sinal do canal 2. Quando fazemos uma medida com um canal do osciloscópio, estamos comparando uma tensão com relação ao terra. No entanto, em

alguns circuitos, queremos saber a diferença de potencial entre dois pontos e não sabemos onde está o terra. Para isso, usa-se o osciloscópio no modo Add com a opção CH2 Invert, e coloca-se as sondas dos canais 1 e 2 nos pontos desejados, enquanto os terras ficam flutuantes (não conectados ao circuito). A leitura será simplesmente a diferença de potencial entre os dois pontos. A desvantagem desse método é que são necessárias as duas pontas do osciloscópio para fazer apenas uma medida, e a grande vantagem é que o usuário não terá o problema de conflito de terra.

9.1.9 Sincronização dos sistemas de varredura vertical e horizontal (*trigger*) (Botões 22 a 28)

No modo de operação XT (tensão-tempo), para cada período da onda dente de serra o sinal a ser amostrado pode ser visualizado na tela fosforescente do osciloscópio. Entretanto, depois de cada varredura da tela o feixe de elétrons é transferido para o início (horizontal) da tela, com a posição vertical correspondente ao valor de tensão aplicada na placa vertical. Assim, no início da segunda varredura o sinal pode começar a ser mostrado a partir de um nível de correspondente a uma tensão diferente do início da primeira varredura, o que resultará em amostragem de uma onda aparentemente defasada em relação àquela da primeira varredura. Nas varreduras subsequentes a mesma situação pode ocorrer causando a impressão visual de uma sucessão de imagens em movimento. Para se obter uma sequência de imagens fixas e permanentes na tela, é preciso sincronizar o sistema de varredura do osciloscópio com o sinal que se deseja amostrar. Isso quer dizer que

varreduras sucessivas devem iniciar sempre dos pontos correspondentes ao mesmo nível de tensão que a varredura anterior.

Para obter esse sincronismo, devemos selecionar o modo de sincronismo (modo de *trigger*) através do botão 25. No modo *Auto* a sincronização do osciloscópio é automática pelo sinal de entrada. No modo *Normal* o operador define a fonte do sinal de sincronismo (*trigger*) e o nível de tensão de disparo (no botão Level, 23). No modo *Sgl Swp (Single Sweep)*, o trigger irá disparar apenas quando o sinal atingir o nível determinado pela primeira vez; para dispará-lo novamente, é preciso apertar o botão *Reset*.

O próximo passo é escolher a fonte do sinal de *trigger* (através do botão 27). A varredura começará quando o sinal de *trigger* alcançar o nível de tensão determinado pelo botão 23 e o comportamento (subindo ou descendo) definido pelo botão 22.

A fonte do sinal de *trigger* pode ser um dos próprios canais de entrada; nessa opção, o sinal será desenhado sempre a partir do mesmo ponto, formando uma imagem fixa. A fonte de *trigger* também pode ser o sinal de 60 Hertz da rede de alimentação ou até mesmo um sinal externo. Na opção *Vert Mode*, a fonte será o canal que está sendo mostrado no osciloscópio (definido pelo controle 9). Para escolher o sinal da rede (*Line*) ou um outro sinal, é preciso colocar o botão esquerdo em *Ext* e o botão direito em *Line* ou *Ext*, respectivamente.

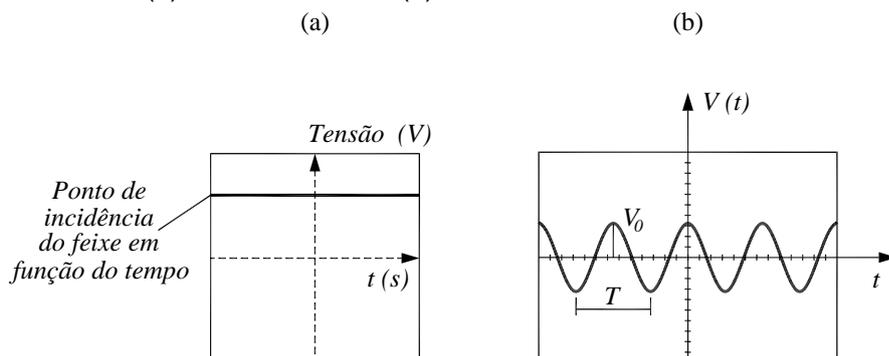
Após definir a fonte do sinal (*Source*), o nível e o tipo de transição (subida / descida) da tensão de disparo, deve se observar na tela do osciloscópio uma figura fixa e permanente; caso tal situação não seja atingida o sinal que se deseja medir não será visualizado ou aparecerá uma sucessão de imagens em movimento

horizontal. (Solicite ao seu professor esclarecimentos sobre os modos de *trigger* e as possíveis *source* não discutidas nesta nota, ou consulte o manual do osciloscópio Tektronix 2205 disponível na página do LEF-www.lef.ifsc.usp.br).

9.1.10 Medidas de tensões alternadas utilizando o osciloscópio

Na figura 9.7 estão apresentados exemplos de duas tensões elétricas vistas na tela de um osciloscópio: em 9.7a, tensão elétrica contínua, e em 9.7b tensão alternada do tipo $V(t) = V_o \cos(\omega t)$, para a qual é possível determinar a amplitude máxima (V_o) e o período de oscilação (T) correspondente.

Figura 9.7 - Exemplos de medidas elétricas realizadas com um osciloscópio.
(a) Tensão contínua. (b) Tensão alternada.



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

O osciloscópio só pode medir tensões. Para medir corrente, é preciso inserir um resistor no circuito e medir a diferença de potencial

entre os terminais do resistor. Conhecendo a resistência do resistor, é possível converter a escala de volts para ampères.

O osciloscópio tem algumas vantagens com relação aos multímetros. Uma delas é a de permitir visualizar tensões que variam no tempo muito rapidamente. Como discutido na prática de Instrumentos de Medida I, o multímetro mede o valor médio rms (“*root mean square*”) da tensão.

No caso de tensões e correntes senoidais, a relação entre o valor rms (valor medido com o multímetro) e o valor de pico (valor medido com o osciloscópio) é dada por:

$$I_{rms} = \sqrt{\langle I^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_o^2 \cos^2(\omega t) dt} = \frac{I_o}{\sqrt{2}} \quad (1a)$$

$$V_{rms} = \sqrt{\langle V^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V_o^2 \cos^2(\omega t) dt} = \frac{V_o}{\sqrt{2}} \quad (1b)$$

9.2 Experimentos

A seguir são propostos experimentos passíveis de serem realizados no contexto deste tópico. Fica a critério de cada docente a definição de quais itens realizar.

Em todos os experimentos realizados, os valores encontrados experimentalmente deverão ser comparados com valores tabelados ou especificados pelos fabricantes dos componentes.

Sempre que surgir uma dúvida quanto à utilização de um instrumento, consulte o professor para esclarecimentos.

9.2.1 Medida da tensão nos terminais de um transformador

a) Utilizando um transformador (220 V - 6.3 V) e um osciloscópio analógico, meça a tensão alternada do transformador quando conectado à rede elétrica (tomada 220V da bancada), determinando sua amplitude máxima e sua frequência de oscilação. Para fazer a medida, coloque os terminais de um canal do osciloscópio nos terminais do transformador, e ajuste para visualização de apenas um canal, com base de tempo 5 ms/div e escala vertical 5 V/div, *trigger* Auto e modo DC. Verifique se os botões de calibração dos dois canais do osciloscópio estão ajustados para o máximo.

b) Meça a mesma tensão elétrica alternada com um voltímetro digital e compare o resultado com o valor obtido no item anterior. Discuta o observado.

Tabela 9.1 - Resultados da medida da tensão e frequência de um transformador

	Osciloscópio	Voltímetro
Tensão de pico		
Tensão rms		
Frequência		

9.2.2 Medida da tensão de um gerador de funções

a) Utilizando um gerador de funções, para uma onda senoidal posicione o botão de ajuste de amplitudes para o máximo e ajuste a frequência de saída para 100 Hz. Determine a amplitude máxima e a frequência de oscilação da tensão gerada, utilizando um osciloscópio (com as mesmas configurações anteriores) e um multímetro digital. Altere a frequência de saída do gerador de funções para 10 kHz e repita as medidas (você precisará ajustar convenientemente a base de tempo).

Tabela 9.2 - Resultados da medida da tensão e frequência de um gerador de funções

	Osciloscópio		Multímetro	
	Tensão	Frequência	Tensão	Frequência
$f = 100 \text{ Hz}$				
$f = 10 \text{ kHz}$				

9.2.3 Observação da curva V-I de componentes eletrônicos (Modo X-Y)

O osciloscópio permite observar a curva V-I de um componente. Isso pode ser realizado através da montagem mostrada na figura 9.8, que usa uma fonte de tensão alternada (gerador de funções) conectada a um circuito formado por um resistor R e um componente X cuja curva V-I se deseja conhecer. O osciloscópio é utilizado para medir a diferença de potencial no resistor e no componente X. Devido à alta impedância do osciloscópio, a corrente

flui somente através do circuito série R-X. Os terminais do resistor R estão conectados no canal 1 do osciloscópio, enquanto que os terminais do componente X estão conectados no canal 2. Veja que os terras dos dois canais estão no mesmo ponto (entre R e X). Assim, uma queda de tensão no resistor aparece como positiva, e uma queda de tensão no componente X aparece como negativa. Assim, para visualizarmos corretamente na tela do osciloscópio, devemos ativar a função CH2 Invert para inverter a tensão no canal 2 do osciloscópio.

No modo de operação X-Y o ponto luminoso na tela do osciloscópio executa um movimento cuja coordenada X é proporcional à tensão na entrada 1 e a coordenada Y proporcional à entrada 2. Desta forma, o ponto luminoso descreve uma trajetória que corresponde ao gráfico de V_X (vertical-Y) versus V_R (horizontal-X). Pela Lei de Ohm, a tensão no resistor R é proporcional à corrente I ; portanto, o gráfico resultante pode ser analisado como uma curva de V_X por I .

Monte o circuito da figura 9.8 com $R = 1 \text{ k}\Omega$ para servir como referência de corrente (a corrente no circuito será o valor da tensão neste resistor V_R dividida por $1\text{k}\Omega$), deixando livres os terminais para conexão dos componentes X. A configuração sugerida para o osciloscópio é modo horizontal X-Y, 5 V/divisão, canal 2 em modo invert e acoplamento DC em ambos os canais. (você poderá otimizar esta configuração). Use o gerador de funções, com sinal senoidal de amplitude máxima e frequência 100 Hz. . Antes de começar cada uma das medidas a seguir é necessário garantir que o centro da escala do osciloscópio corresponde a leitura 0V nos dois canais. Para isso, coloque ambos os canais na posição terra (GND). Você

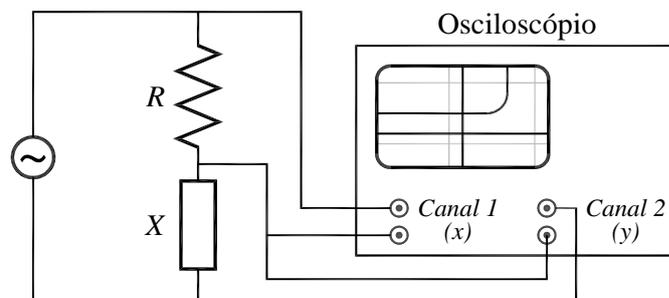
deverá observar um ponto na tela do osciloscópio. Ajuste os botões de posição vertical e horizontal do osciloscópio de modo que este ponto fique no centro da tela.

a) Coloque outro resistor (sugestão: resistor de $2,2\text{ k}\Omega$ no lugar do componente X. Observe a curva V-I para o resistor. Qual o comportamento observado? Meça alguns valores de tensão (pelos menos cinco) nos terminais dos dois resistores e a partir daí construa uma curva V-I em papel milimetrado. Obtenha o valor da resistência à partir da curva V-I. Obs: se for necessário, você pode alterar a escala de tensão dos canais do osciloscópio para fazer a medida mais precisa.

b) Descreva o que acontece com a inclinação da curva quando usamos $R = 1\text{ k}\Omega$ no lugar do componente X? Explique considerando: a) Se os dois canais estiverem com a mesma escala ou em escalas diferentes.

c) Varie a amplitude, a frequência e a forma do sinal do gerador de funções. O que acontece com a curva mostrada na tela? Justifique suas observações.

Figura 9.8 - Circuito utilizado para medir a curva V-I característica de componentes eletrônicos.



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Tabela 9.3 - Curva V-I de um resistor

Corrente (mA)	Tensão (V)	Corrente (mA)	Tensão (V)

c) Substitua o componente X por um termo-resistor do tipo PTC. Obtenha a resistência do mesmo na temperatura ambiente ($\sim 300\text{K}$) à partir da curva V-I. Comece com os dois canais do osciloscópio ajustados para 2V/div , mas se for necessário, você pode alterar a escala de tensão dos canais do osciloscópio para fazer a medida mais precisa. . Aproxime um ferro de solda ligado do PTC e logo que a resistência para de variar meça os valores de tensão nos terminais do PTC e no resistor de $1\text{k}\Omega$. (sugere-se que se utilize um ferro de sonda para 220V , mas conectado a uma tomada de 110V para que a temperatura não se eleve tanto a ponto de danificar o componente). Qual o comportamento da resistência como função da temperatura? Calcule as resistências do PTC em temperatura ambiente e quando aquecido.

- d) Repita o procedimento para um resistor do tipo NTC.
- e) Descreva uma aplicação para os termo-resistores.

Tabela 9.4 - Resistência de termo-resistores em diferentes temperaturas

Temperatura	PTC	NTC
Ambiente		
Aquecido		

f) Substitua o componente X por um LED vermelho. Use ainda o resistor de $R = 1\text{k}\Omega$, e a sensibilidade do canal Y em 1V /divisão. Como já mencionado em experimentos anteriores, para LEDs e diodo normalmente se apresenta a curva I vs. V. Assim, para visualização desta curva, inverta os cabos conectados aos canais 1 e 2 do osciloscópio. Nesta configuração o canal 1 ira mostra a tensão nos terminais do LED e o canal 2 a tensão nos terminais do resistor de $1\text{k}\Omega$ (corrente do circuito Meça o valor da tensão de limiar de condução do LED (se necessário ajuste as escala do osciloscópio para obter uma medida mais precisa).

Tabela 9.5 - Curva V-I de um LED vermelho

Corrente (mA)	Tensão (V)	Corrente (mA)	Tensão (V)

g) Substitua o componente X por um LED azul. Use ainda o resistor de $R = 1\text{k}\Omega$, e a sensibilidade do canal Y em 0.2 V / divisão . Descreva o comportamento da curva I por V e a reproduza em escala no mesmo gráfico que o do LED vermelho. Determine o limiar de condução. Compare com o resultado obtido com o LED vermelho e justifique as diferenças observadas.

Tabela 9.6 - Curva V-I de um LED azul

Corrente (mA)	Tensão (V)	Corrente (mA)	Tensão (V)

h) Substitua o termo-resistor por um resistor sensível à luz, LDR. Obtenha a sua resistência na iluminação ambiente utilizando a curva V-I.

i) Cubra o resistor com a mão e descreva o que acontece como a curva V-I. Obtenha a resistência do LDR no escuro.

Tabela 9.7 - Resistência de LDR em diferentes situações de luminosidade

	Claro	Escuro
Resistência do LDR		

j) No lugar do componente X coloque agora um diodo do tipo 1N4007 ainda usando o resistor para $R = 1\text{ k}\Omega$. Ajuste a

sensibilidade do canal Y para 0.2 V / divisão. Descreva o comportamento da curva I por V e a reproduza em escala.

Tabela 9.8 - Curva V-I de um diodo

Corrente (mA)	Tensão (V)	Corrente (mA)	Tensão (V)

Bibliografia

HALLIDAY, D.; RESNICK, R. **Física III**. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1974.

NUSSENZVEIG, H.M. **Curso de física básica: eletricidade e magnetismo**. São Paulo: Edgard Blucher, 1998. v.3.

TIPPLER, P.A. **Física: para cientistas e engenheiros**. 3. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 1991. v. 3.

YOUNG, H. D.; FREEDMANN, R. A. **Sears e Zemanski física III: eletricidade e magnetismo**. São Paulo: Pearson, c2004.

Capítulo 10 Campo magnetostático

Neste Capítulo vamos estudar campos magnéticos gerados por correntes contínuas. Inicialmente introduziremos a lei de Biot e Savart e a lei de Ampère. Em seguida, calcularemos o campo para um fio retilíneo e para um solenóide. Os campos magnéticos serão medidos por uma sonda de efeito Hall, cujo princípio de funcionamento também será apresentado.

Importante: O conteúdo da introdução teórica é apenas um guia para os conceitos necessários para a realização dos experimentos. Você deve aprofundar os conceitos consultando os livros citados na bibliografia ou outros de sua preferência

10.1 Campo magnético-Leis de Ampère e Biot-Savart

Em julho de 1820, Oersted, um físico dinamarquês, percebeu que o ponteiro de sua bússola era defletido quando estava próximo de um fio conduzindo corrente elétrica. Essa foi a primeira evidência de uma ligação entre a eletricidade e o magnetismo, que até então eram tidas como fenômenos distintos. Oersted publicou seus resultados, sem lançar uma explicação para o fenômeno. Uma das observações de Oersted é que o efeito do fio sobre a agulha podia ser representado por um campo com linhas de força circulares (ele

deduziu isso porque a deflexão da agulha era oposta conforme o fio estava num plano acima ou abaixo dela).

Apenas algumas semanas depois, em setembro de 1820, André-Marie Ampère, físico francês, apresentou um trabalho sobre o experimento de Oersted, usando os conceitos de “tensão elétrica” e “corrente elétrica”, e apontando que a corrente elétrica gera campo magnético, que deflete uma agulha imantada.

Ampère chegou a uma relação entre corrente elétrica e campo magnético, que é conhecida como *lei de Ampère*. Essa lei relaciona o campo magnético com a densidade de corrente, e em sua formulação integral pode ser expresso pela seguinte relação:

$$\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_o \iint_S \vec{J} \cdot \hat{n} \cdot dS = \mu_o I \quad (1)$$

A integral de linha do campo magnético sobre uma curva fechada é proporcional à corrente que atravessa uma superfície (aberta) que tenha essa curva como fronteira. O sentido da integral de linha é dado pela regra da mão direita: curvando os dedos da mão direita no sentido da curva, o polegar aponta na direção que a corrente deve ser considerada positiva. A lei de Ampère também pode ser escrita na forma diferencial:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_o \vec{J} \quad (2)$$

Uma observação importante a se fazer é quanto à nomenclatura: estamos aqui chamando \vec{B} de campo magnético, mas alguns autores usam o nome “indução magnética” para \vec{B} e usam

“campo magnético” para designar \vec{H} , que nas situações de magnetostática vale $\vec{H} = \vec{B} / \mu_0$.

A lei de Ampère não é suficiente para determinar o campo magnético. A ideia das linhas de força circulares de Ørsted deu origem ao princípio da *inexistência de monopólos magnéticos*, que diz que as linhas de campo magnético não se originam nem terminam em nenhum ponto do espaço; são fechadas (como as linhas circulares de Ørsted) ou continuam até o infinito. A expressão matemática para esse princípio é:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3)$$

Ainda em outubro de 1820, Biot e Savart fizeram experimentos sobre a ação de corrente elétrica sobre agulhas imantadas. As observações de Biot e Savart levaram a uma fórmula que permite calcular o campo magnético gerado por um fio que conduz corrente:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad (4)$$

Nessa equação, $d\vec{l}$ representa um elemento diferencial de comprimento do circuito, \vec{r} é um vetor apontando do circuito (ponto que varia durante a integração) até o ponto onde o campo está sendo calculado, e r é o módulo desse vetor. A integral deve ser feita em todo o circuito (fechado).

Essa forma da lei de Biot-Savart é válida quando o fio é considerado de espessura desprezível. Se esse não for o caso, é preciso usar uma forma mais geral:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{\vec{J} \times \vec{r}}{r^3} dV \quad (5)$$

Para ver como a expressão 5 recai na 4, basta perceber que $\vec{J} \cdot dV = I \cdot d\vec{l}$.

A expressão de Biot-Savart é a solução das equações de Ampère e da divergência nula do campo magnético.

Entretanto, as leis de Ampère e de Biot-Savart não são válidas no caso geral, mas apenas quando se lida com correntes estacionárias. Uma corrente é estacionária quando cumpre duas condições: é constante no tempo, e não provoca mudança na distribuição de cargas elétricas (em outras palavras, não provoca acúmulo nem perda líquida de cargas em nenhum ponto). A condição para isso é:

$$\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = 0 \quad (6a)$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (6b)$$

A generalização da lei de Ampère para correntes não estacionárias foi feita por Maxwell, na década de 1860, e foi vital para que se pudesse prever a existência de ondas eletromagnéticas. Após isso, a lei de Ampère passou a ser conhecida como lei de Ampère-

Maxwell, sendo uma das equações de Maxwell que governam o eletromagnetismo:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (7)$$

Quando a corrente é estacionária, a densidade de carga e de corrente não variam no tempo. Assim, o campo elétrico também não varia no tempo, e o último termo da equação 7 é nulo, recaindo na forma original de Ampère.

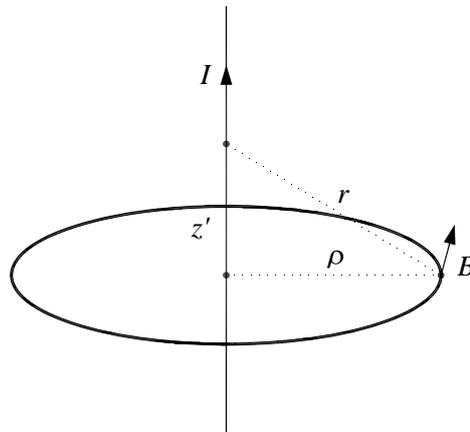
10.2 Aplicações da lei de Biot-Savart

Vamos calcular o campo magnético produzido em algumas situações de bastante interesse: o de um fio retilíneo infinito, de uma espira circular, de duas bobinas nas configurações denominadas Helmholtz e anti-Helmholtz e de um solenóide.

a) *Fio retilíneo infinito*

Vamos calcular o campo magnético gerado por um fio retilíneo uniforme que coincide com o eixo z, a uma distância ρ do fio, utilizando a equação 4. A figura 10.1 mostra essa situação, e a direção do campo magnético.

Figura 10.1 - Geometria para calcular o campo magnético de um fio infinito



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Em coordenadas cilíndricas, o caminho de integração é dado pela variável z' , que varia de $-\infty$ a $+\infty$. O ponto onde ocorre a integração é dado por:

$$\vec{l} = z' \hat{z} \quad (8)$$

A diferencial do caminho de integração é:

$$d\vec{l} = dz' \hat{z} \quad (9)$$

Podemos considerar que o ponto onde queremos calcular o campo tenha coordenada $z = 0$, porque a origem pode ser posicionada em qualquer ponto do fio. Logo:

$$\vec{r}_o = \rho \cdot \vec{\rho} \quad (10)$$

O vetor \vec{r} aponta do ponto onde está sendo feita a integração ao ponto fixo onde o campo está sendo calculado.

$$\vec{r} = \vec{r}_o - \vec{l} = \rho \cdot \hat{\rho} - z' \hat{z} \quad (11)$$

O módulo desse vetor é:

$$r = \|\vec{r}\| = \sqrt{\rho^2 + z'^2} \quad (12)$$

Logo, o numerador do integrando vale:

$$d\vec{l} \times \hat{r} = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}} \hat{\phi} dz' \quad (13)$$

Integrando a lei de Biot-Savart sobre z' de $-\infty$ a $+\infty$, o resultado é:

$$\vec{B}(\rho) = \frac{\mu_o I}{2\pi} \frac{1}{\rho} \hat{\phi} \quad (14)$$

No seu trabalho de 1820, Biot e Savart observaram que a força exercida sobre a agulha é perpendicular tanto ao eixo do fio que conduz a corrente como à direção do fio ao centro da agulha, e é proporcional ao inverso da distância fio-agulha. Vemos que realmente a expressão matemática da lei de Biot-Savart leva a esse resultado, considerando que a força sobre uma agulha imantada é proporcional ao campo magnético.

O fio retilíneo é um caso interessante para se aplicar diretamente a lei de Ampère em sua forma integral. Como curva para efetuar a integração, escolhemos uma circunferência com centro no fio, raio ρ e que está num plano perpendicular ao fio. A corrente que atravessa o círculo determinado por essa curva é simplesmente a corrente que passa pelo fio.

Pela simetria de rotação, se o campo magnético possuir uma componente radial, ela deve ser igual em todos os pontos da circunferência. Isso porém viola a inexistência de monopólos magnéticos, porque haveria linhas de campos começando ou terminando no fio. Portanto, não há componente radial do campo. Também por essa simetria, as componentes tangencial e paralela ao fio são iguais em toda a circunferência.

A integral de linha do campo magnético é simplesmente o valor de sua componente tangencial multiplicado pelo comprimento da curva ($2\pi\rho$). Portanto:

$$2\pi\rho B_\phi = \mu_o I \quad (15)$$

Logo:

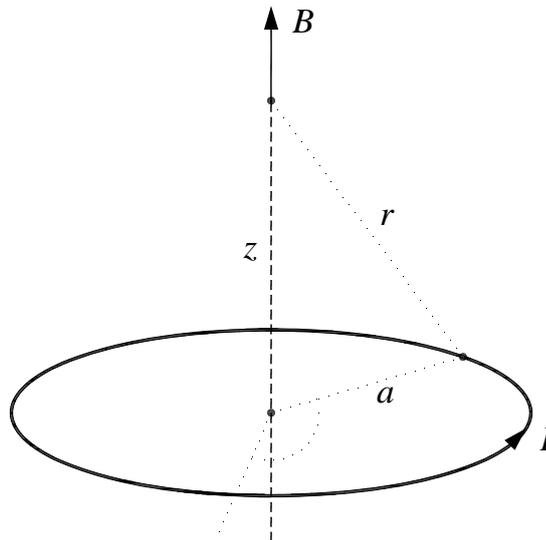
$$\vec{B}(\rho) = B_\phi \hat{\phi} = \frac{\mu_o I}{2\pi} \frac{1}{\rho} \hat{\phi} \quad (16)$$

Esse é o mesmo resultado obtido pela lei de Biot-Savart.

b) *Espira circular*

Vamos considerar uma espira circular de raio a , e vamos calcular o campo magnético num ponto do eixo de simetria, a uma distância z do plano da espira. A figura 10.2 mostra essa situação.

Figura 10.2 - Geometria para calcular o campo magnético de uma espira circular



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

O caminho de integração será expresso através da variável φ (das coordenadas cilíndricas), que varia de 0 a 2π na espira completa. O ponto onde ocorre a integração é dado por:

$$\vec{l} = a\hat{\rho} \quad (17)$$

A diferencial do caminho de integração é:

$$d\vec{l} = a\hat{\varphi}d\varphi \quad (18)$$

O ponto onde o campo será calculado está no eixo z:

$$\vec{r}_o = z\hat{z} \quad (19)$$

O vetor \vec{r} aponta do ponto onde está sendo feita a integração ao ponto fixo onde o campo está sendo calculado.

$$\vec{r} = \vec{r}_o - \vec{l} = z\hat{z} - a\hat{\rho} \quad (20)$$

Esse vetor não é constante porque o versor $\hat{\rho}$ não é constante. Seu módulo, no entanto, é constante durante a integração (não depende de φ):

$$r = \|\vec{r}\| = \sqrt{z^2 + a^2} \quad (21)$$

Essa equação poderia ser obtida diretamente da figura 10.1.

O numerador do integrando é:

$$d\vec{l} \times \hat{r} = (az\hat{\rho} + a^2\hat{z})d\varphi \quad (22)$$

Com essas definições, a integral da equação 4 não é difícil de ser realizada, e o resultado é:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_o I}{2} \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{z} \quad (23)$$

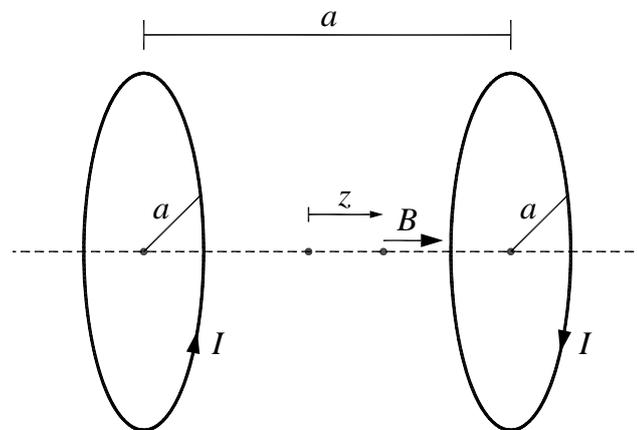
Na equação acima, a corrente é positiva se, ao curvar os dedos da mão direita no sentido da corrente, o polegar aponta na direção do eixo z . Esse é o sentido mostrado na figura 10.1.

Se ao invés de uma única espira tivermos uma bobina com várias espiras bastante compactas, de modo que podemos considerar que todas estão num mesmo plano (dito de outra maneira: a espessura da bobina é muito menor do que o raio), o resultado acima deve ser multiplicado pelo número de espiras. Isso é consequência do princípio de superposição.

c) *Par de bobinas na configuração de Helmholtz*

Um par de bobinas na configuração de Helmholtz consiste de duas espiras circulares idênticas paralelas tal que a distância entre elas seja igual ao seu raio. As correntes que atravessam cada uma são iguais e têm o mesmo sentido. A figura 10.3 mostra a configuração.

Figura 10.3 - Geometria para calcular o campo magnético de uma bobina de Helmholtz



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

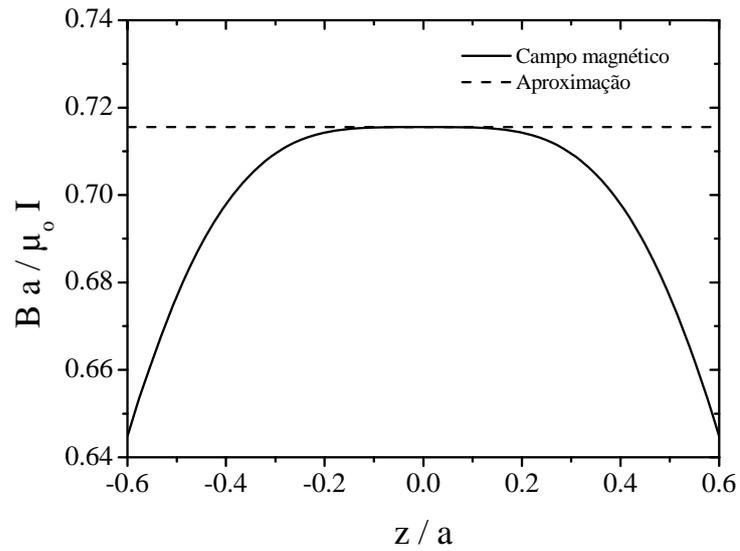
O campo magnético no eixo comum às duas espiras pode ser calculado pelo princípio da superposição: o campo resultante é simplesmente a soma dos campos gerados por cada espira. De acordo com a figura, estamos considerando que o eixo comum é o eixo z e que $z = 0$ corresponde ao ponto médio do centro das espiras (que portanto se localizam em $z = a/2$ e $z = -a/2$). Logo o campo magnético em uma posição z ao longo do eixo é:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_o I a^2}{2} \left(\frac{1}{((z - a/2)^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{1}{((z + a/2)^2 + a^2)^{3/2}} \right) \hat{z} \quad (24)$$

A figura 10.4 mostra o campo magnético do par de bobinas de Helmholtz. A característica mais importante é que ele é praticamente constante na região entre as bobinas; suas derivadas até a ordem três são nulas no ponto médio ($z = 0$). Essa é uma forma fácil e prática de gerar um campo magnético constante numa região do espaço, e com amplo acesso a essa região. O valor aproximado do campo magnético entre as espiras é facilmente obtido considerando $z = 0$ na equação 24:

$$\vec{B}_{ap} = \frac{8}{5^{3/2}} \cdot \frac{\mu_o I}{a} \hat{z} \approx 0,715 \cdot \frac{\mu_o I}{a} \hat{z} \quad (25)$$

Figura 10.4 - Campo magnético (normalizado) gerado por uma bobina de Helmholtz. As bobinas estão localizadas em $z/a = \pm 0,5$

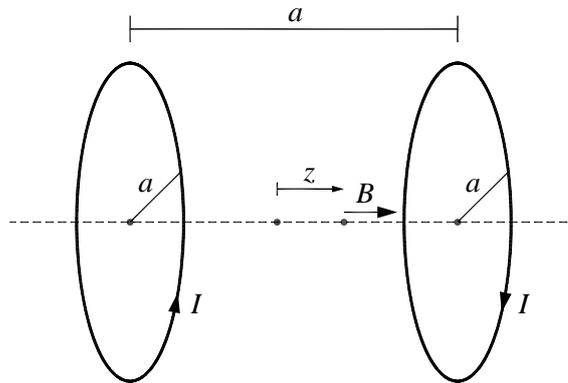


Fonte: Elaborada pelos compiladores.

d) *Par bobinas na configuração anti-Helmholtz*

No par de bobinas na configuração de anti-Helmholtz, a configuração é a mesma da bobina de Helmholtz, mas uma das correntes é invertida, como mostrado na figura 10.5.

Figura 10.5 - Geometria para calcular o campo magnético de uma bobina anti-Helmholtz



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

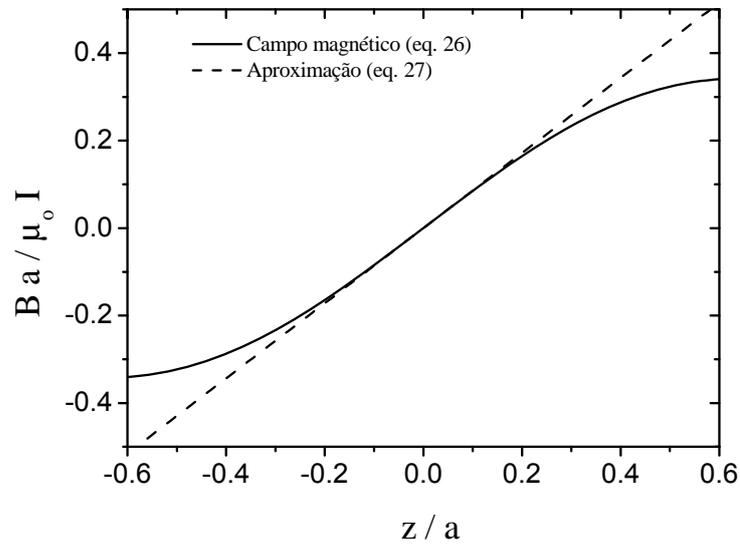
Seguindo as mesmas convenções usadas no par de Helmholtz, o campo magnético é:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_o I a^2}{2} \left(\frac{1}{((z - a/2)^2 + a^2)^{3/2}} - \frac{1}{((z + a/2)^2 + a^2)^{3/2}} \right) \hat{z} \quad (26)$$

O campo magnético do par anti-Helmholtz está mostrado na figura 10.6. A característica importante desse campo é que ele varia aproximadamente de forma linear no espaço. No ponto médio ($z = 0$), o campo é nulo, e a segunda derivada também, de modo que a aproximação usando uma função linear é muito boa. O resultado é:

$$\vec{B}_{ap}(z) = \frac{48}{5^{5/2}} \cdot \frac{\mu_o I}{a^2} z \cdot \hat{z} \approx 0,859 \cdot \frac{\mu_o I}{a^2} z \cdot \hat{z} \quad (27)$$

Figura 10.6 - Campo magnético (normalizado) gerado por uma bobina anti-Helmholtz. As bobinas estão localizadas em $z/a = \pm 0,5$.

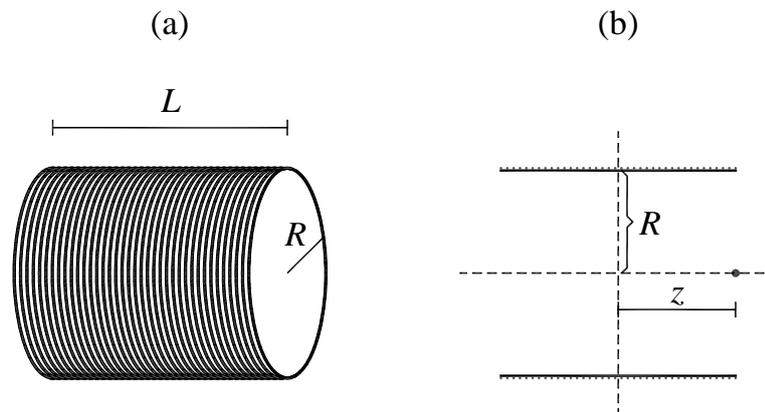


Fonte: Elaborada pelos compiladores.

e) Solenóide

Um solenóide (ou bobina solenoidal) é uma bobina longa, caracterizado por três parâmetros: o raio das espiras R , o número de espiras N e o comprimento L . Por conveniência, podemos definir a densidade linear de espiras: $n = N / L$. A figura 10.7a mostra uma representação esquemática de um solenóide.

Figura 10.7 - Solenóide. (a) Vista em perspectiva. (b) Vista por cima.



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

O eixo do solenóide a ser considerado será o eixo z , e a origem será tomada no ponto médio do solenóide (como mostrado na figura 10.7b). Vamos considerar uma fatia do solenóide, na posição z' de espessura dz' . O número de espiras nessa fatia é $N' = N \cdot dz' / L = n \cdot dz'$. O campo magnético que ela exerce num ponto sobre o eixo de simetria do solenóide, de coordenada z , é dado por:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot n \cdot I}{2} \frac{a^2}{((z - z')^2 + R^2)^{3/2}} \hat{z} \cdot dz' \quad (28)$$

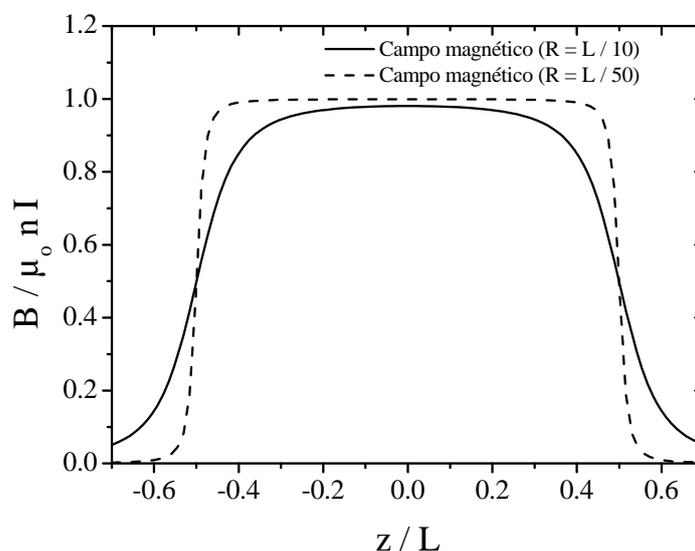
Para achar o campo total, basta integrar em z' de $-L/2$ a $+L/2$. O resultado é:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 \cdot n \cdot I}{2} \left(\frac{L/2 - z}{((L/2 - z)^2 + R^2)^{1/2}} + \frac{L/2 + z}{((L/2 + z)^2 + R^2)^{1/2}} \right) \hat{z} \quad (29)$$

A figura 10.8 mostra esse campo, para dois valores do raio das espiras em relação ao comprimento total L do solenóide. Uma aproximação comum é a do solenóide longo, no qual $L \gg R$. Nesse caso, o campo é constante na região interior (exceto quando muito próximo das bordas) e vale:

$$\vec{B} = \mu_0 n I \hat{z} \quad (30)$$

Figura 10.8 - Campo magnético (normalizado) no interior de um solenóide, para dois valores de R / L . As extremidades do solenóide estão localizadas em $z / L = \pm 0,5$



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Da figura 10.8, vemos também que o campo na extremidade do solenóide é metade do seu valor no interior. Uma outra característica interessante é que quanto maior for a razão entre o comprimento e o raio do solenóide mais constante será o campo no seu interior. A configuração de solenóide é a forma mais eficiente de

se produzir um campo magnético constante a partir de corrente elétrica sendo muito utilizada em várias aplicações. Por exemplo, na maioria dos tomógrafos de ressonância magnética utilizado para obtenção de imagens no interior do corpo, o campo magnético intenso e uniforme necessário ao exame é gerado por um solenóide (por isso a forma de tubular do equipamento).

As configurações aqui estudadas têm grande aplicação prática, pois são maneiras simples de produzir campos magnéticos constantes (bobina de Helmholtz, solenóide) ou com variação linear (bobina de anti-Helmholtz) e com intensidade que pode ser controlada.

10.3 Efeito Hall

Atualmente, uma das maneiras mais práticas para se medir campo magnético faz uso do efeito Hall, observado por Edwin Hall, físico americano, em 1879.

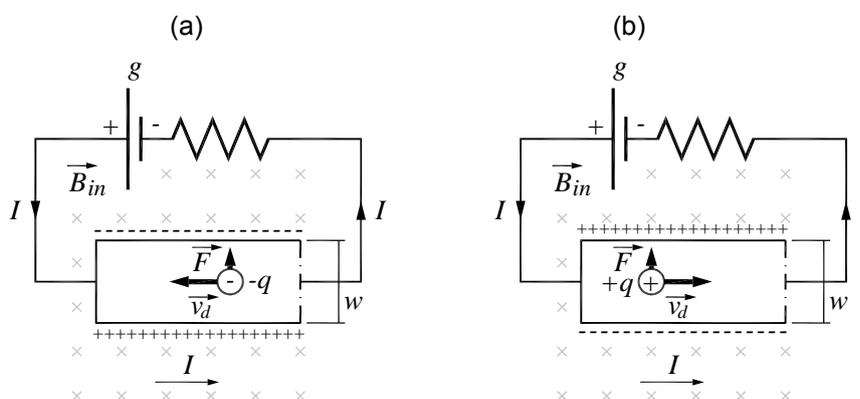
Um condutor percorrido por corrente elétrica é constituído por cargas livres em movimento na direção da corrente (movimento médio com velocidade \vec{v}_m , superposto a um movimento aleatório). As cargas livres positivas se movem no sentido da corrente, e as negativas se movem no sentido oposto.

Na presença de um campo magnético perpendicular à direção da corrente, as cargas livres sentem uma força $\vec{F} = q\vec{v}_m \times \vec{B}$; e são desviadas em uma direção perpendicular às direções da corrente e do campo magnético. Vamos considerar que o condutor seja finito nessa direção, com largura w . Então, haverá acúmulo de cargas num

dos lados nessa direção e aparece uma diferença de potencial entre os dois lados do condutor.

A figura 10.9 mostra um condutor de largura w , percorrido por uma corrente I da esquerda para a direita, e um campo magnético entrando no plano do papel. A figura 10.9a mostra também uma carga livre negativa, que se move da direita para a esquerda e sofre uma força magnética para cima. Como resultado do deslocamento de cargas, depois de um certo tempo a parte de baixo da placa a um potencial mais elevado.

Figura 10.9 - Efeito Hall. (a) Cargas livres negativas. (b) Cargas livres positivas



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Entretanto, se as cargas livres fossem positivas (como na figura 10.9b) então elas se movimentariam da esquerda para a direita. Nesse caso, a carga do portador teria sinal contrário e a velocidade também, de modo que a força magnética continua a mesma. O resultado é que as cargas positivas iriam para cima, e a parte de *cima* ficaria a um potencial mais elevado.

Até aqui, todos os fenômenos sobre corrente elétrica se processavam do mesmo modo, não importando quem eram os portadores. Isso não ocorre com o efeito Hall: o resultado é *diferente* se os portadores têm carga positiva ou negativa. Historicamente, o efeito Hall foi a primeira prova de que a corrente elétrica nos metais é devido a cargas livres negativas (o elétron ainda não havia sido descoberto em 1879).

Para calcular a diferença de potencial entre a parte de cima e a parte de baixo do condutor, temos que lembrar que, na situação de equilíbrio, a força elétrica devido a distribuição de cargas (que é perpendicular a corrente) anula a força magnética:

$$|q\vec{E}| = |q\vec{v}_m \times \vec{B}| \quad (31)$$

Como a diferença de potencial entre as placas, chamada de *tensão Hall*, é simplesmente $V_H = |\vec{E}|w$ e o campo magnético é perpendicular a corrente, temos:

$$V_H = wv_m B \quad (32)$$

Num condutor de seção transversal A , há uma relação simples entre a corrente I e a velocidade média v_m dos portadores (ver prática sobre resistência e corrente elétrica), se for feita a hipótese de que há apenas um tipo de portador (o que é verdade para os metais, mas não para soluções iônicas). Deste modo:

$$I = nqAv_m \quad (33)$$

Nessa equação, n é a densidade de portadores e q é a carga de cada um. Logo:

$$V = \frac{1}{nq} \frac{w}{A} IB \quad (34)$$

Vemos que o sinal de V depende do sinal de q . As grandezas w , A e I são macroscópicas e podem ser medidas de maneira independente. Portanto, aplicando um campo magnético conhecido e medindo a tensão Hall é em princípio possível calcular a densidade de cargas livres (nq) do material condutor, uma grandeza microscópica. No entanto, o interesse aqui é usar o efeito Hall para medida de campo magnético, ou seja, desejamos medir a tensão Hall V_H e a partir dela determinar o campo magnético que a gerou. Para isso precisaremos fazer uma calibração de modo a determinar a constante de proporcionalidade.

10.4 Sonda Hall

De acordo com a equação 32, a voltagem é diretamente proporcional ao campo magnético. Esse é o princípio da *sonda Hall*, que é constituída de uma tira plana condutora e uma bateria, que estabelece uma corrente sobre essa tira. A diferença de potencial entre os lados da tira pode ser medida com um voltímetro comum. Um experimento de calibração da sonda Hall (usando campos magnéticos conhecidos) permite obter o coeficiente de

proporcionalidade entre a voltagem lida e o campo magnético na direção perpendicular à tira. As sondas Hall modernas contêm um chip de material semicondutor, de alto grau de pureza (o semicondutor tem n menor, então a voltagem Hall é maior para um dado campo, em comparação com um condutor metálico).

O chip utilizado na sonda que utilizaremos na prática é o modelo CSA-1V da Sentron, cujo *data-sheet* está disponível em <http://www.sentron.ch/datasheets/CSA-1V.pdf>. As características do seu sensor de campo magnético são:

Figura 10.10 - Especificações do sensor de campo magnético do chip CSA-1V

Characteristics of the Linear Magnetic Field Sensor ^{3,4)}

With $V_{SUP} = 5V$ and in the temperature range $-40^{\circ}C$ to $150^{\circ}C$, if not otherwise specified.

Symbol	Parameter	Min.	Typ.	Max.	Unit	Test Conditions
S	Magnetic Sensitivity ³⁾	270	280 ³⁾	290	V/T	$B = B_L$
$\Delta S/\Delta T$	Magn. Sensitivity Temperature Drift	-0.02		0.02	$\%/^{\circ}C$	$I_{OUT} = 0mA$ $T = -20^{\circ}C$ to $125^{\circ}C$
Voff	Offset Voltage ³⁾	-15	0	15	mV	$B = 0T$, $I_{OUT} = 0mA$, $T = 20^{\circ}C$
Boff	Equivalent Magnetic Offset ³⁾	-50	0	50	μT	$B = 0T$, $I_{OUT} = 0mA$ $T = -20^{\circ}C$ to $80^{\circ}C$
$\Delta V_{off}/\Delta T$	Offset Temperature Drift	-0.2	0	0.2	$mV/^{\circ}C$	$B = 0T$, $I_{OUT} = 0mA$, $T = -20^{\circ}C$ to $125^{\circ}C$
B_{FS}	Full Scale Magnetic Field Range ⁵⁾	-7.5		7.5	mT	
B_L	Linear Magnetic Field Range	-5		5	mT	
NL	Non Linearity		0.1	0.2	%	$B = B_L$
			0.5	1		$B = B_{FS}$
ΔB_{noise}	Input referred magnetic noise spectrum density (RMS)			125	nT/ \sqrt{Hz}	$f = 10Hz$ to $10kHz$

Note 3: Ratiometric (proportional to V_{SUP})

Note 4: When the analog output pin A_OUT is used in differential mode (ie $V_{out} = A_OUT - CO_OUT$)

Note 5: Device saturates for $B > B_{FS}$ but is not damaged

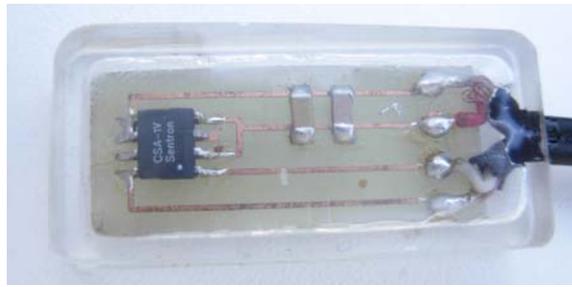
Note 6: Specification correction: Was 300 ± 10 V/T. Now 280 ± 10 V/T. All parts manufactured to date, have been calibrated to 280 ± 10 V/T

Fonte: MELEXIS¹...

Esse chip fornece uma voltagem que é proporcional ao campo magnético na direção paralela a sua superfície. A razão entre a voltagem de saída e o campo magnético tem o valor típico de 280 V/T. O *offset* máximo na voltagem é de 15 mV, o que corresponde a um campo de 50 μ T. A relação entre voltagem e campo se mantém linear para campos de até 5 mT, e a sonda se satura para campos magnéticos de 7,5 mT.

Na figura 10.11 está mostrada a aparência externa da sonda Hall que será utilizada no curso:

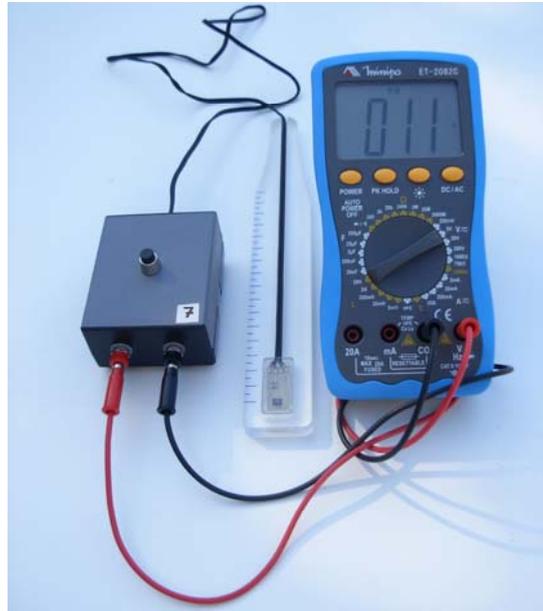
Figura 10.11 - Fotografia do Sensor Hall adaptado para medidas de campo magnético



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

A direção de medida do campo neste sensor é ao longo do da direção de maior comprimento da placa de circuito impresso na qual está montado o sensor Hall. Para fazer as medidas, é preciso pressionar o botão de acionamento. A figura 10.12 mostra o sensor Hall conectado a um voltímetro e um suporte em forma de régua que pode ser utilizado nas medidas de campo.

Figura 10.12 - Sonda Hall. À direita está o conector BNC, e à esquerda o botão de acionamento



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Em geral estamos interessados apenas no campo magnético gerado por uma configuração, e queremos desprezar o campo magnético da Terra e de outras fontes próximas. Então, temos que fazer uma medida preliminar, com a fonte de campo magnético que queremos medir desligada, para medir o *campo de fundo*, que deve ser subtraído da medida feita com a fonte ligada.

Para utilizar a sonda Hall na medida de campos magnéticos é necessário calibrá-la. Isso pode ser realizado usando uma fonte de campo magnético uniforme e conhecido. Este é o caso do campo magnético no centro de um solenóide, que pode ser calculado com

boa precisão em função da corrente que o percorre e de suas dimensões geométricas usando a equação 29. Assim, fazemos a calibração da sonda Hall através da utilização do campo gerado por um solenóide.

10.5 Experimentos

A seguir são propostos experimentos passíveis de serem realizados no contexto deste tópico. Fica a critério de cada docente a definição de quais itens realizar.

Em todos os experimentos realizados, os valores encontrados experimentalmente deverão ser comparados com valores tabelados ou especificados pelos fabricantes dos componentes.

Sempre que surgir uma dúvida quanto à utilização de um instrumento, consulte o professor para esclarecimentos.

Atenção: todas as medidas de corrente deverão ser realizadas com um amperímetro. Não utilize o indicador de corrente das fontes de tensão.

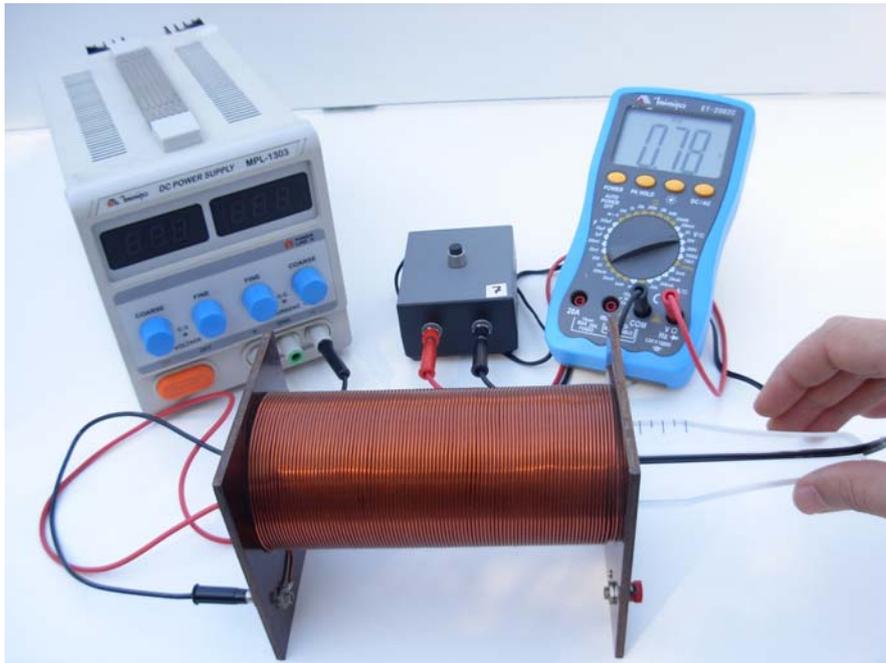
10.5.1 Calibração da sonda Hall

a) Conecte um solenóide longo de comprimento L e raio R em série com o amperímetro para medir a corrente, utilizando o terminal 20A, pois mediremos corrente elevadas. Alimente o conjunto

com uma fonte de tensão (comece com 0 V e aumente lentamente a tensão até que a corrente seja de 0,25 A).

b) Posicione a sonda Hall no centro do solenóide (como na figura 10.13) e meça a tensão nos terminais da sonda com um voltímetro. Meça também o campo de fundo, sem corrente no solenóide. A tensão Hall é a diferença entre esses valores.

Figura 10.13 - Configuração para calibração da sonda Hall



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

c) Repita o item anterior, variando a corrente em passos de 0,25 A, até 2,5 A, anotando as respectivas leituras do voltímetro. Nunca deixe a corrente ultrapassar 3 A.

d) Com os valores da corrente, do comprimento e número de voltas do solenóide, calcule o campo magnético no centro do mesmo. Faça um gráfico do campo magnético como função da tensão V nos terminais da sonda. Deste gráfico obtenha a curva de calibração da sonda Hall em Volts/Tesla.

Essa mesma sonda Hall será utilizada pelo seu grupo em práticas futuras, portanto identifique precisamente a sonda Hall que está utilizando.

Tabela 10.1 - Resultado das medidas de calibração da sonda Hall

Corrente (A)	Tensão Hall (V)	Corrente (A)	Tensão Hall(V)
Número de voltas do Solenóide = Comprimento = Razão campo magnético / corrente = Fator de calibração =			

10.5.2 Medida do campo magnético de um fio retilíneo

O fio retilíneo infinito será simulado, na prática, por uma bobina quadrada com N espiras ($N \cong 30$), como mostrado na figura 10.14a.

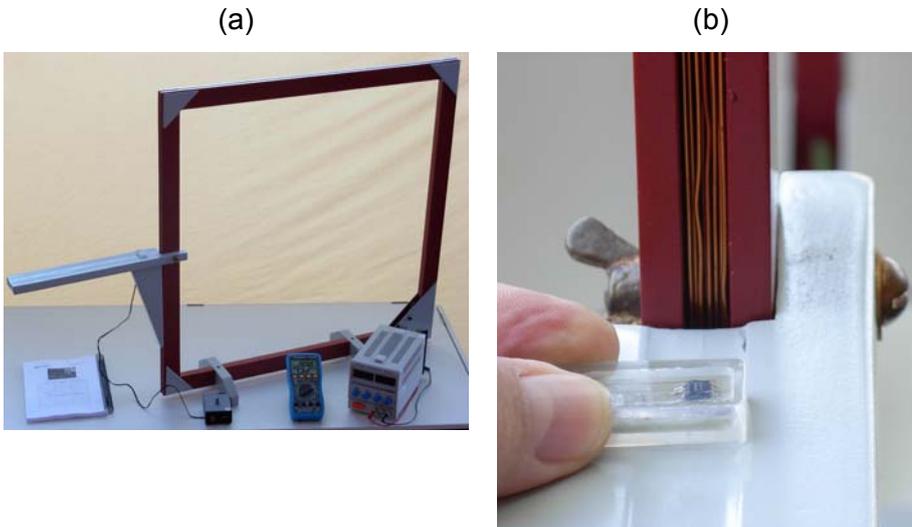
a) Inicialmente, ajuste a fonte para que a corrente na bobina seja aproximadamente 1A.

b) Considere uma das faces do quadrado como sendo um fio ao longo da direção z . Utilizando a sonda Hall, meça o campo magnético A meia altura do comprimento da face e na direção perpendicular a mesma (direção $\hat{\phi}$), figura 10.14b. Faça as medidas em função da distância radial r no lado de fora da bobina. Cuidado: r deve ser tomado como a distância o centro do sensor Hall (chip no interior da sonda) e o centro do conjunto de fios da bobina. Meça 10 valores, espaçados de 1 cm. Lembre-se sempre de descontar os campos de fundo.

c) Em seguida, inverta a corrente da bobina, aumente-a para 2 A e repita o procedimento do item anterior.

d) Faça um gráfico do campo magnético medido, em função de r , e o campo esperado (calculado utilizando a equação 14). Analise a concordância entre o resultado calculado e o experimental.

Figura 10.14 - (a) Bobina quadrada utilizada no experimento de Lei de Ampère. (b) Detalhe da Medida do campo magnético com o sensor Hall.



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Tabela 10.2 - Resultado das medidas do campo magnético de um fio infinito
(1)

r (cm)	Tensão Hall (mV)	Campo magnético (T)
Corrente =		

Tabela 10.3 - Resultado das medidas do campo magnético de um fio infinito
(1)

r (cm)	Tensão Hall (mV)	Campo magnético (T)
Corrente =		

10.5.3 Medida do campo magnético de uma bobina.

a) Apanhe uma das bobinas disponíveis em sua bancada e meça as suas características (diâmetro, número de espiras).

b) Coloque a sonda Hall no centro desta bobina (como na figura 10.15) e faça uma medida sem a aplicação de corrente. Nessa situação, a sonda estará medindo campos externos (campo da Terra, por exemplo) que deverão ser descontados dos valores medidos durante o experimento.

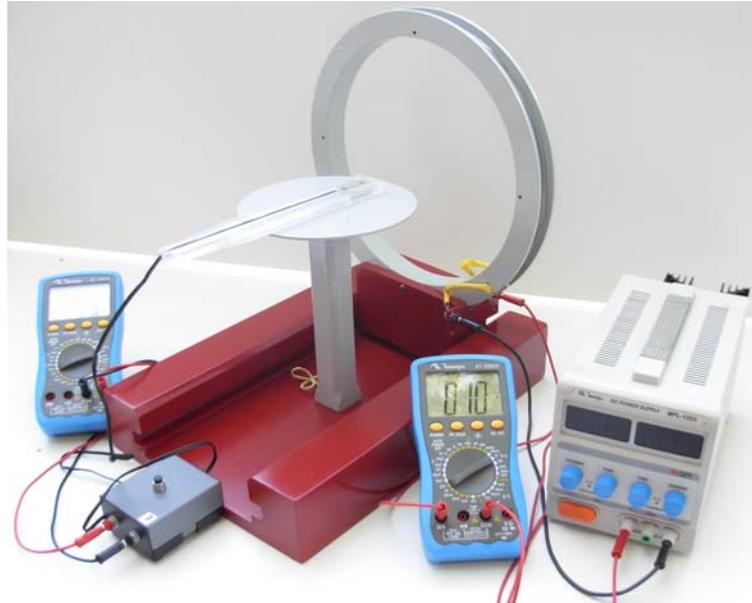
c) Ajuste a corrente na fonte para 1 A e verifique se a leitura do voltímetro conectado a sonda está abaixo da tensão de saturação da mesma. Caso o sensor Hall esteja saturado reduza a corrente.

d) Em seguida, meça o campo magnético, no eixo, em função de z . Meça 20 valores começando de $z = -20$ cm até $z = 20$ cm, espaçados de 2 cm. Como o campo local pode variar para diferentes valores de z , faça também uma medida de campo de fundo para cada posição.

e) Inverta o sentido da corrente na bobina e observe o que acontece.

f) Faça um gráfico do campo magnético medido e do campo esperado (calculado utilizando a equação 23). Analise a concordância entre o resultado calculado e o medido.

Figura 10.15 - Medida do campo magnético gerado pela bobina usando uma sonda Hall



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Tabela 10.4 - Resultado das medidas do campo magnético de uma bobina

z (cm)	Tensão Hall (mV)	Campo magnético (T)
Raio da bobina =		
Corrente =		

10.5.4 Medida do campo magnético para um par de bobinas na configuração de Helmholtz.

a) Apanhe as duas bobinas disponíveis em sua bancada e meça as suas características (diâmetro, número de espiras).

b) Com essas duas bobinas monte um par de Helmholtz (figura 10.16) obedecendo rigorosamente as relações de distâncias mostrada na figura 10.3. Cuidado com o sentido das correntes na bobina, que deve ser tal que os campos magnéticos de cada uma se somem no centro do conjunto.

c) Ajuste a corrente na fonte para 1A e verifique se a leitura do voltímetro conectado a sonda está abaixo da tensão de saturação da mesma. Caso o sensor Hall esteja saturado reduza a corrente.

d) Em seguida, meça o campo magnético, no eixo, em função de z , com o zero no centro das duas bobinas, tal como mostrado na figura 10.16. Meça 10 valores começando de $z = -10$ cm até $z = 10$ cm, espaçados de 2 cm.

e) Faça um gráfico do campo magnético medido e do campo esperado (calculado utilizando a equação 24). Analise a concordância entre o resultado calculado e o medido. Use também a expressão para o campo magnético para qualquer z e compare com o resultado experimental. Em que região o campo pode ser considerado uniforme (expresse em termos de frações do raio da bobina)?

Figura 10.16 - Configuração para mapeamento do campo magnético de uma bobina de Helmholtz



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Tabela 10.5 - Resultado das medidas do campo magnético de uma bobina de Helmholtz

z (cm)	Tensão Hall (mV)	Campo magnético (T)
Corrente =		

10.5.5 Medida do campo magnético de uma bobina anti-Helmholtz.

a) Inverta a corrente em apenas uma das bobinas e meça o campo magnético, no eixo, em função de z , com o zero no centro das duas bobinas. Meça 10 valores começando de $z = -10$ cm até $z = 10$ cm, espaçados de 2 cm.

b) Faça um gráfico do campo magnético medido e do campo esperado (calculado utilizando a equação 26). Analise a concordância entre o resultado calculado e o medido. Em que região a dependência do campo magnético com z pode ser considerada linear? Expresse em termos de frações do raio da bobina.

Tabela 10.6 - Resultado das medidas do campo magnético de uma bobina anti-Helmholtz

z (cm)	Tensão Hall (mV)	Campo magnético (T)
Corrente =		

Bibliografia

HALLIDAY, D.; RESNICK, R. **Física III**. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1974.

NUSSENZVEIG, H.M. **Curso de física básica**: eletricidade e magnetismo. São Paulo: Edgard Blucher, 1998. v.3.

TIPPLER, P.A. **Física**: para cientistas e engenheiros. 3. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 1991. v. 3.

YOUNG, H. D.; FREEDMANN, R. A. **Sears e Zemanski física III**: eletricidade e magnetismo. São Paulo: Pearson, c2004.

Referencias

1 SENTRON a Melexis Company. **CSA-1V**. Disponível em: <www.melexis.com/datasheet/CSA-1V.dowload> Acesso em: 24 julho 2014.

Capítulo 11 Lei de indução de Faraday

Neste Capítulo vamos estudar campos magnéticos que variam lentamente no tempo. Introduziremos a lei de indução de Faraday e a verificaremos experimentalmente. Introduziremos o conceito de indutância, uma nova grandeza elétrica que as bobinas apresentam a serem submetidas a uma corrente que variam no tempo.

Importante: O conteúdo da introdução teórica é apenas um guia para os conceitos necessários para a realização dos experimentos. Você deve aprofundar os conceitos consultando os livros citados na bibliografia ou outros de sua preferência

11.1 Leis de indução de Faraday

Uma das descobertas mais importantes do que conhecemos hoje como eletromagnetismo foi feita pelo inglês Michael Faraday em 1831. Quando Faraday aproximou dois circuitos elétricos, percebeu que no momento em que um deles era ligado ou desligado, aparecia por um instante de tempo uma corrente no outro circuito. Percebeu também que o sentido da corrente era diferente se o circuito estava sendo ligado ou desligado.

Para confirmar que era um efeito magnético, ele aproximou um ímã, e também observou o aparecimento de corrente. Essa corrente só se mantinha enquanto o ímã estava em movimento, e tinha sentido contrário dependendo se o ímã se aproximava ou se

afastava. Ele também manteve o ímã fixo e movimentou o circuito, obtendo os mesmos resultados.

A conclusão de Faraday é que a variação do fluxo magnético que atravessa o circuito produz uma tensão elétrica, que dá origem a corrente. Na verdade, a própria ideia de fluxo é devida em grande parte a Faraday, que imaginava linhas de campo emanando de cargas elétricas e de magnetos para visualizar os campos elétricos e magnéticos, respectivamente. Essa forma de pensar só seria aceita e usada de forma sistemática pelos cientistas após sua morte, mas sua importância pode ser percebida pelo fato de Maxwell ter dado a seu primeiro artigo, de 1856, o título “*On Faraday’s lines of force*”. Em 1861, o artigo em que Maxwell corrige a lei de Ampère foi chamado de “*On physical lines of force*”.

As linhas de campo dão a direção do campo em cada ponto. O fluxo de campo sobre uma superfície aberta é proporcional ao número de linhas que cruzam essa superfície (contadas como positivas se cruzam em um sentido e negativas se cruzam no sentido oposto). Na notação de cálculo vetorial, o fluxo é definido como:

$$\Phi_s = \iint_S \vec{B} \cdot \hat{n} \, dS \quad (1)$$

O campo magnético é solenoidal, ou seja, tem divergente nulo em todos os pontos. Isso tem duas consequências: o fluxo sobre qualquer superfície fechada é nulo, e o fluxo de duas superfícies abertas com a mesma fronteira é igual. Isso permite definir o fluxo através do circuito como sendo o fluxo através de uma superfície qualquer que tenha o circuito como fronteira.

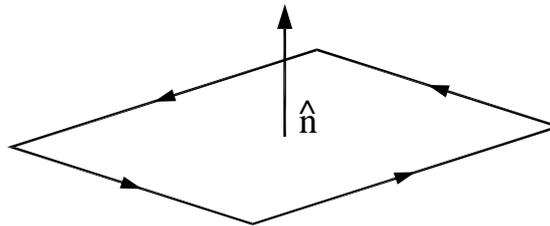
De acordo com a lei de Faraday, a força eletromotriz (fem) induzida sobre o circuito é igual a taxa de variação do fluxo magnético. A forma matemática da lei da indução foi dada em 1845 pelo físico alemão Franz Ernst Neumann:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_s}{dt} \quad (2)$$

Essa é a lei da indução na forma mais apropriada para se trabalhar com circuitos, pois relaciona parâmetros que podem ser medidos diretamente ou calculados a partir da geometria do circuito.

A fórmula acima só tem sentido se for definido o sentido do fluxo e da corrente induzida sobre o circuito, o que é dado pela regra da mão direita: ao curvar a mão direita no sentido da corrente, o polegar aponta no sentido do fluxo positivo. A figura 11.1 mostra essa regra sendo aplicada a um circuito quadrado.

Figura 11.1 - Sentido da tensão positiva e do fluxo positivo em um circuito



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

A força eletromotriz induzida é nada mais do que a integral de linha do campo elétrico sobre o circuito. Logo podemos escrever:

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot \hat{n} \cdot dS \quad (3)$$

Essa é a forma integral da lei de indução, expressa em função dos campos, e é uma das equações de Maxwell. Ela pode ser convertida para uma forma diferencial, usando o teorema de Stokes no lado direito da equação, resultando em:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4)$$

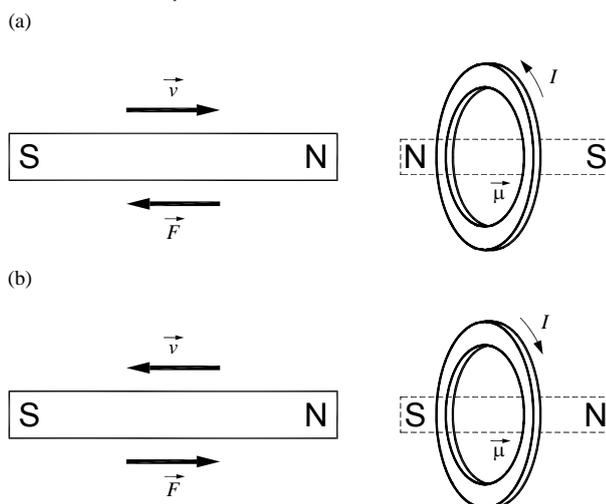
Vemos que, se o campo magnético estiver variando no tempo, o campo elétrico não é mais irrotacional, então não podemos mais pensar em potencial eletrostático, do qual o campo elétrico possa ser obtido fazendo $E = -\nabla\Phi$.

O sinal negativo da lei de indução, que dá a direção da tensão induzida, é explicado pela chamada *lei de Lenz*, publicada por Heinrich Lenz em 1834 (além da lei que leva seu nome, Lenz também descobriu de forma independente a lei de Joule enquanto trabalhava na Universidade de São Petesburgo; por esse motivo, na Rússia, essa lei é conhecida como lei de Joule-Lenz). O sinal negativo garante que a fem induzida é no sentido de criar um campo magnético que vai se *opor* à variação do fluxo. Em outras palavras, se o fluxo está aumentando, a tensão cria uma corrente que gera um fluxo negativo (na figura 11.1, isso corresponde a uma corrente no sentido oposto ao mostrado pelas setas).

A lei de Lenz é uma consequência da conservação de energia. Para ver isso, considere uma espira circular e um ímã com

seus eixos alinhados, com o pólo norte do ímã voltado para a espira, como na figura 11.2. Se o ímã se aproxima da espira (figura 11.2a), é induzida uma corrente anti-horária na espira (vista a partir do ímã). Assim, a espira passa a atuar como um eletroímã, com o pólo norte voltado para o ímã, e eles se repelem. Caso o ímã esteja se afastando (figura 11.2b), a corrente seria no sentido horário, o pólo sul estaria voltado para o ímã, e a força seria de atração. Em qualquer um dos casos, a força é contrária ao movimento. Se não fosse assim, um pequeno movimento em qualquer sentido geraria uma força no mesmo sentido, e a velocidade (e a energia cinética) iria aumentar indefinidamente, o que não é compatível com a conservação de energia.

Figura 11.2 - Lei de Lenz aplicada a um ímã em movimento próximo a uma espira. (a) ímã se aproxima da espira, e é repellido. (b) ímã se afasta da espira, e é atraído.



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Devido às contribuições de Neumann e Lenz, a lei da indução pode ser chamada de lei de Faraday, lei de Faraday-Lenz ou lei de Faraday-Neumann-Lenz.

11.2 Indutância mútua e auto-indutância

A corrente em um circuito gera um campo magnético que produz fluxo sobre o próprio circuito; assim, a variação de corrente produz uma tensão no circuito, fenômeno que é conhecido como *auto-indução*. O fluxo magnético é proporcional a corrente; a constante de proporcionalidade, que depende da geometria e das propriedades magnéticas do meio, é chamada de indutância (ou auto-indutância) do circuito, denotada por L . Essa definição de indutância foi dada por Oliver Heaviside em 1886 (Heaviside foi também o criador dos termos impedância, condutância, permeabilidade e eletreto). De acordo com essa definição:

$$\Phi = LI \quad (5)$$

A auto-indutância de um circuito é sempre positiva.

Com esse conceito, podemos reescrever a lei de indução de Faraday para o caso de um circuito fixo:

$$\varepsilon = -L \frac{dI}{dt} \quad (6)$$

Se houver um segundo circuito próximo, a corrente nesse também pode produzir fluxo magnético sobre o primeiro, que é proporcional a corrente no segundo circuito. Dessa maneira, dois

circuitos eletricamente isolados podem influenciar um ao outro quando a corrente em um deles estiver variando. Esse fenômeno é conhecido como *indução mútua*.

Os fluxos sobre os circuitos 1 e 2 pode ser escritos como:

$$\Phi_1 = L_{11}I_1 + L_{12}I_2 \quad (7a)$$

$$\Phi_2 = L_{21}I_1 + L_{22}I_2 \quad (7b)$$

Aqui L_{12} representa o fluxo sobre o circuito 1 provocado pela corrente no circuito 2, e a auto-indutância é representada com índices repetidos. Um fato importante, que não poderá ser provado aqui, é:

$$L_{12} = L_{21} \quad (8)$$

A indutância mútua é o coeficiente de proporcionalidade entre a corrente em um circuito pela corrente em outro. Seu valor pode ser positivo ou negativo; um valor positivo significa que o aumento da corrente em um circuito provoca uma diminuição da corrente no outro. Depende, portanto da definição (arbitrária) do sentido positivo das correntes em cada circuito.

11.3 Armazenamento de energia em indutores

Quando um circuito é desligado da fonte, sua corrente varia e ele pode induzir uma corrente em um outro circuito próximo. Isso pode parecer a princípio estranho, porque um campo magnético constante não realiza trabalho. No entanto, quando a corrente está

aumentando, é necessário compensar a tensão induzida pela variação de corrente, e isso requer energia. É essa energia que fica armazenada e pode ser reaproveitada em outro momento.

Vamos considerar um circuito de auto-indutância L_1 , e vamos elevar sua corrente de 0 a I_1 . Sendo a corrente em certo instante é i_1 , a energia necessária para esse processo é:

$$W_1 = \int L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} dt = L_1 \int_0^{I_1} i_1 di_1 = \frac{1}{2} L I_1^2 \quad (9)$$

Essa é a energia armazenada em um circuito devido a auto-indutância. Se a corrente i_2 em um circuito próximo estiver variando de 0 a I_2 , a energia necessária para manter a corrente no primeiro circuito constante é:

$$W_{12} = \int L_{12} I_1 \frac{di_2}{dt} dt = L_{12} I_1 \int_0^{I_2} di_2 = L_{12} I_1 I_2 \quad (10)$$

Essa é a energia armazenada nos dois circuitos devido a indutância mútua.

Então, quando a corrente no circuito 1 for I_1 e a corrente em 2 for I_2 , a energia armazenada nessa configuração é:

$$W = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + L_{12} I_1 I_2 \quad (11)$$

A energia tem que ser positiva para quaisquer valores de I_1 e I_2 , porque, se não fosse assim, haveria uma situação com correntes

energeticamente mais favorável do que a situação sem correntes; assim poderiam ser observados correntes aparecendo espontaneamente. A expressão 11 pode ser considerada um polinômio de segundo grau em I_1 , e seu determinante deve ser negativo para que a expressão seja sempre positiva:

$$\Delta = (L_{12}^2 - L_1 L_2) I_2^2 \leq 0 \quad (12)$$

A condição para isso é:

$$|L_{12}| \leq \sqrt{L_1 L_2} \quad (13)$$

A indutância mútua é sempre menor (em módulo) do que a média geométrica das auto-indutâncias. Isso permite definir um parâmetro, o acoplamento magnético entre dois circuitos, que varia de 0 a 1:

$$k = \frac{|L_{12}|}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (14)$$

Acoplamento magnético igual a 1 significa que as linhas de fluxo que atravessam um circuito são as mesmas que atravessam o outro. Acoplamento magnético igual a 0 significa que nenhuma linha de fluxo atravessa ambos os circuitos. O acoplamento magnético é uma medida da capacidade de dois circuitos influenciarem magneticamente um no outro.

11.4 Indutância de algumas configurações simples

a) Solenóide longo

O campo no interior de um solenóide longo, de raio r , número de espiras N e comprimento l , percorrido por corrente I , é:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l} \quad (15)$$

O fluxo é:

$$\Phi = NBA = \frac{\mu_0 N^2 \pi r^2}{l} I \quad (16)$$

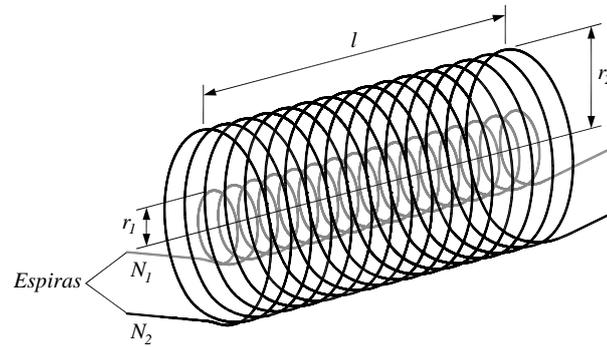
A auto-indutância é:

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 \pi r^2}{l} \quad (17)$$

b) Dois solenóides longos coaxiais (indutância mútua)

Vamos considerar dois solenóides coaxiais: o mais interno tem raio r_1 e N_1 voltas; o mais externo tem raio r_2 e N_2 voltas. O comprimento l dos dois é igual. Essa situação está mostrada na figura 11.3.

Figura 11.3 - Dois solenóides coaxiais



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Na aproximação de solenóide longo, o campo magnético que o solenóide externo gera na região próxima ao eixo comum é:

$$B_2 = \frac{\mu_o N_2 I_2}{l} \quad (18)$$

O fluxo sobre o solenóide interno é:

$$\Phi_1 = N_1 B_2 A_1 = \frac{\mu_o N_1 N_2 \pi r_1^2}{l} I_2 \quad (19)$$

A indutância mútua é a razão entre o fluxo e a corrente:

$$L_{12} = \frac{\Phi_1}{I_2} = \frac{\mu_o N_1 N_2 \pi r_1^2}{l} \quad (20)$$

A indutância mútua depende apenas de fatores geométricos e das propriedades magnéticas do meio onde os solenóides estão inseridos.

Vamos agora calcular a indutância mútua considerando que o campo é gerado pelo solenóide interno e induz no solenóide externo. O campo devido ao solenóide interno é:

$$B_1 = \frac{\mu_o N_1 I_1}{l} \quad (21)$$

Esse campo está presente apenas na região interna ao solenóide interno, e é nulo fora. O fluxo sobre o solenóide externo é o proporcional à área do solenóide *interno*:

$$\Phi_2 = N_2 B_1 A_1 = \frac{\mu_o N_1 N_2 \pi r_1^2}{l} I_1 \quad (22)$$

A indutância mútua é a razão entre o fluxo e a corrente:

$$L_{21} = \frac{\Phi_2}{I_1} = \frac{\mu_o N_1 N_2 \pi r_1^2}{l} \quad (23)$$

Vemos então que $L_{12} = L_{21}$. De acordo com o que foi dito anteriormente, trata-se de uma relação geral.

O acoplamento magnético entre os dois solenóides é:

$$k = \frac{r_1}{r_2} \quad (24)$$

11.5 Experimentos

A seguir são propostos experimentos passíveis de serem realizados no contexto deste tópico. Fica a critério de cada docente a definição de quais itens realizar.

Em todos os experimentos realizados, os valores encontrados experimentalmente deverão ser comparados com valores tabelados ou especificados pelos fabricantes dos componentes.

Sempre que surgir uma dúvida quanto à utilização de um instrumento, consulte o professor para esclarecimentos.

Atenção: Para quantificar o comportamento instantâneo de tensões, correntes e campos magnéticos que variam no tempo utilizaremos uma bobina solenoidal (bobina maior mostrada na figura 11.3) para gerar um campo magnético variável o qual será medido com a ajuda de um sensor Hall. Também mediremos a f.e.m. induzida por esse campo variável em uma bobina de prova solenoidal com raio menor, figura 11.3, que será colocada no interior da bobina maior. Utilizaremos um osciloscópio para medida da dependência temporal das correntes e tensões. Uma vez que um dos objetivos desse experimento também é medir os sinais e fases relativas entre a corrente na bobina maior, campo magnético produzido pela

mesma e a tensão induzida na bobina de prova, é crucial que as referências de zero de tensão (terra) no osciloscópio e na fonte sejam comuns. Portanto, preste muita atenção para fazer a ligação dos cabos de terra do osciloscópio de modo que esses estejam sempre ligados de acordo com o indicado nos circuitos.

11.5.1 Caracterização dos solenoides a serem utilizados.

a) Antes de iniciar os experimentos meça as características geométricas (comprimento, raio médio, número de espira) das duas bobinas a serem utilizadas.

b) Nos experimentos é também imprescindível padronizar o sentido em que a corrente circula nos enrolamentos das bobinas utilizadas. Convencionaremos que o “início” do enrolamento é o terminal em que uma corrente convencional (do potencial mais positivo para o mais negativo) entra no enrolamento e o “final” do enrolamento como o terminal em que a corrente sai. Como em alguns casos é difícil fazer essa identificação somente através da observação visual das bobinas, utilizaremos o campo magnético produzido pelas mesmas para fazê-lo. Para isso, conecte uma fonte de corrente contínua na bobina de prova (bobina menor) e anote quais terminais da mesma estão conectados aos pólos positivo e negativo da fonte (tente conectar a bobina seguindo a convenção vermelho para o terminal positivo e preto para o terminal negativo-se os terminais da bobina tiverem outras cores, anote qual terminal é

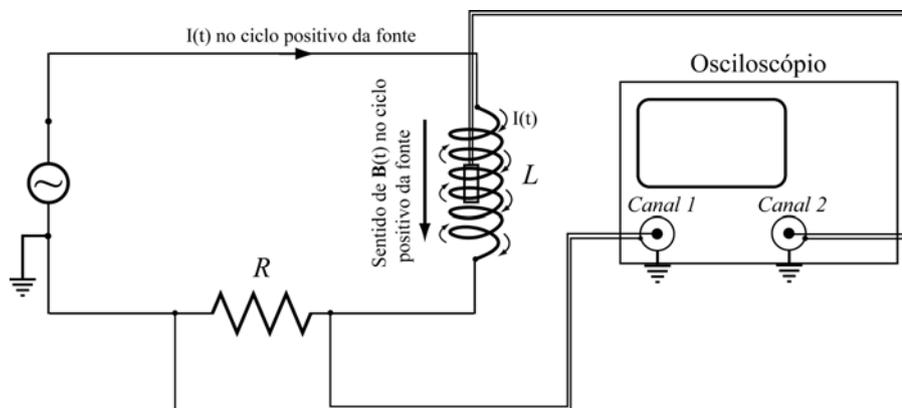
cada um). Posicione uma bússola logo acima do enrolamento da bobina de prova e oriente a bobina de modo que o seu eixo seja perpendicular a direção da agulha da bússola. Ligue a fonte e ajuste a tensão até que uma corrente contínua de ~ 50 mA circule no enrolamento da bobina (utilize um amperímetro em série com a bobina para medir essa corrente). A bússola irá mudar a sua orientação indicando o sentido do campo magnético na parte exterior da bobina de prova, sendo que o polo norte magnético da agulha da bússola (aquele que aponta para o norte geográfico e é usualmente colorido com a cor vermelha e/ou marcado com um ponto) indica a direção do campo magnético no exterior do enrolamento da bobina. Logo, o campo magnético no interior da bobina de prova terá sentido contrário ao indicado pela bússola. Em seguida, utilizando o sentido da corrente aplicada e do campo magnético no interior da bobina, identifique o sentido de enrolamento dos fios da bobina de prova e os terminais onde estão conectados o “início” e o “final” do enrolamento. Com a fonte desligada, substitua a bobina de prova pela bobina maior e ajuste a tensão para fazer circular na mesma uma corrente de ~ 1 A. Repita o mesmo procedimento anterior, e também encontre o sentido de enrolamento dos fios da bobina maior assim como os terminais onde estão conectados o “início” e o “final” do enrolamento.

11.5.2 Medida do campo magnético de um solenóide percorrido por uma corrente que varia no tempo

a) Monte um circuito, como o mostrado na figura 11.4, utilizando um resistor de 10Ω em série com uma bobina solenoidal

(bobina maior). Como mencionado acima, é crucial que as referências de zero de tensão (terra) no osciloscópio e na fonte sejam comuns. Além disso, como o sentido do campo magnético no interior da bobina inverte a cada meio ciclo da corrente alternada, convencionaremos como sentido positivo do campo magnético aquele correspondente ao ciclo positivo da corrente (quando a tensão instantânea no terminal terra da fonte é negativa em relação ao outro terminal). Assim, o sentido de medida de campo magnético da sonda Hall deve ser tal que coincida com o campo magnético produzido no ciclo positivo da corrente no solenoide. Justifique o porquê dessas condições em seu relatório. Assim, em sua montagem siga exatamente o circuito proposto, respeitando a posição dos terras do osciloscópio e da fonte. Conecte o solenoide no circuito de modo que os terminais correspondentes ao “início” e “final” do enrolamento produzam uma corrente que no ciclo positivo tem o sentido indicado na figura 11.4.

Figura 11.4 - Circuito para alimentar um indutor com corrente alternada



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

b) Ajuste o gerador de funções para a máxima tensão (amplitude) e uma onda senoidal com frequência de aproximadamente 100 Hz.

c) Para visualizar a corrente que percorre a bobina, conecte os terminais do no canal 1 do osciloscópio para medir a tensão sobre o resistor (que é proporcional à corrente).

d) Conecte a saída da sonda Hall no canal 2 do osciloscópio. Introduza a sonda no centro da bobina maior, fazendo com que a direção do sensor seja paralela ao campo magnético gerado pelo solenoide e também que o sentido positivo de medida de campo magnético do sensor seja o mesmo do campo no interior do solenoide no ciclo positivo da fonte (como na figura 11.5). Observe a curva de tensão na sonda Hall (proporcional ao campo magnético no centro da bobina) juntamente com a curva da tensão nos terminais do resistor (ajuste o osciloscópio para visualizar ambos os canais, em modo Alt e canal 2 Normal. Compare as curvas da corrente (medida no canal 1 do osciloscópio) e da tensão Hall (medida no canal 2 do osciloscópio) e discuta a relação de fases entre elas. Qual a relação de fase esperada? Justifique sua resposta. A dependência temporal da corrente e do campo magnético estão de acordo com o esperado? Explique por que.

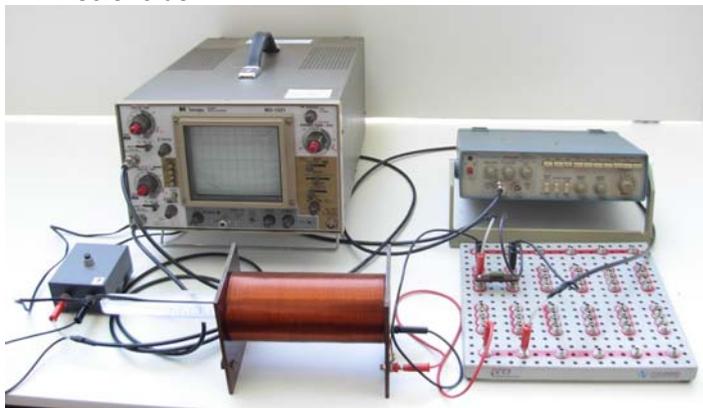
e) Utilizando os dados da calibração da sonda Hall, obtenha quantitativamente o valor de pico e a frequência de oscilação do campo magnético no interior do solenóide.

f) Faça um esboço do gráfico do campo magnético e da corrente na bobina como função do tempo em papel milimetrado, indicando os parâmetros relevantes (valor de pico, período e fase relativa).

g) Utilizando os parâmetros geométricos da bobina, as característica magnética do meio e a corrente do circuito, calcule o valor de pico do campo magnético no interior do solenoide usando a equação para o campo do solenóide finito de comprimento L e raio R percorrido por uma corrente I .

h) Faça um esboço do gráfico do campo magnético como função de tempo utilizando a equação para o campo do solenóide finito no mesmo papel milimetrado usado no item f) e compare essa curva com a experimental.

Figura 11.5 - Configuração para medir o campo magnético no interior de um solenoide



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Tabela 11.1 - Medida do campo magnético de um solenóide percorrido por uma corrente que varia no tempo

Período =
Corrente (valor de pico) =
Tensão Hall (valor de pico) =
Campo Magnético (valor de pico) =
Fase relativa entre corrente e campo magnético =

11.5.3 Caracterização da tensão induzida em uma bobina

a) Na montagem anterior, aplique um sinal de tensão com forma de onda triangular e frequência de 100 Hz na bobina maior.

b) Observe a curva de tensão na sonda Hall (proporcional ao campo magnético no centro da bobina) juntamente com a curva da tensão nos terminais do resistor (ajuste o osciloscópio para visualizar ambos os canais, em modo Alt e canal 2 Normal, tomando os mesmos cuidados de montagem que no item anterior). Compare as curvas da corrente e da tensão Hall e discuta a forma das curvas. O comportamento observado é esperado? Explique por que utilizando as equações pertinentes.

c) Calcule o valor de pico do campo magnético a partir da tensão Hall medida e escreva uma expressão analítica que descreva a curva experimental do campo magnético como função do tempo expressando explicitamente a dependência temporal. Dica: Expresse a função separada em regiões. Por exemplo, no caso da função triangular é conveniente dividir a função de 0 a $T/2$; de $T/2$ a T , onde T é o período da função triangular.

d) Calcule o valor de pico do campo magnético utilizando os parâmetros geométricos da bobina, as características magnéticas do meio, e a corrente do circuito. Compare com o valor de pico obtido no item c).

e) Repita os itens a) e b) aplicando na bobina maior uma onda quadrada de 100 Hz.

f) Nos experimentos sobre Lei de indução de Faraday manteremos o solenóide do item anterior como fonte de campo magnético, mas, ao invés de caracterizar o campo magnético em seu

interior com uma sonda Hall, utilizaremos a bobina de prova e mediremos a tensão induzida na mesma. Assim, substitua a sonda Hall pela bobina de prova posicionando-a no centro da bobina maior, como mostrado na figura 11.6 (O suporte branco serve para garantir que as bobinas fiquem coaxiais). Neste experimento também estaremos interessados em medir o sinal e a fase relativa entre as correntes na bobina maior e na bobina de prova. Para isso, é imprescindível que os sentidos das correntes nos dois solenoides tenham a todo instante a mesma convenção de sinal. Explique o porquê desta necessidade em seu relatório. Deste modo, certifique-se que as duas bobinas estão posicionadas com o mesmo sentido de enrolamento (lembrando que o sentido do enrolamento é aquele que a corrente convencional percorre o solenoide) e que os cabos terra dos dois canais do osciloscópio estejam ligados ao “início” de cada enrolamento.

g) Use o canal 1 do osciloscópio para visualizar a tensão sobre o resistor e o canal 2 para visualizar a tensão induzida na bobina de prova. Compare esses sinais. O comportamento observado é esperado de acordo com a lei de Faraday-Lenz? Explique por que usando as equações pertinentes.

h) Meça o valor de pico da tensão induzida e escreva uma expressão analítica que descreva a curva experimental da tensão induzida como função do tempo.

i) Utilize a expressão da lei de Faraday-Lenz, os parâmetros geométricos da bobina e a expressão para o campo magnético obtida no item c) para também obter a expressão analítica da tensão induzida como função do tempo. Calcule o valor de pico da tensão

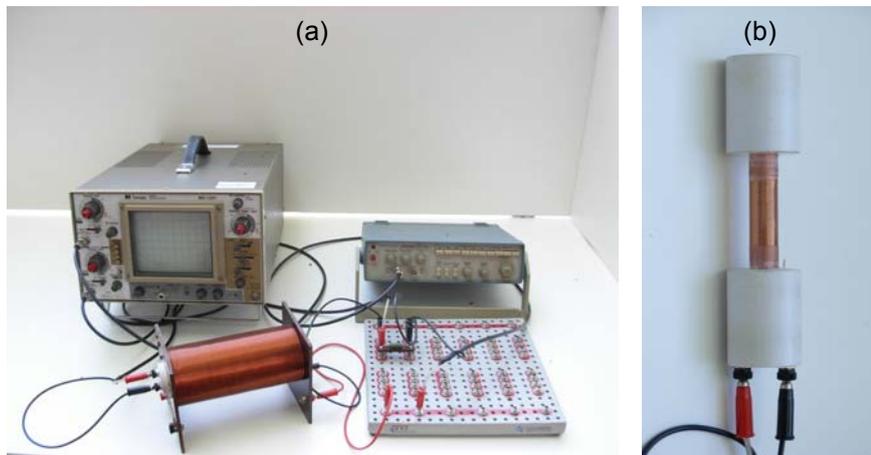
induzida e compare essa expressão com a obtida no item h) e discuta o resultado.

j) Repita o item g) aplicando na bobina maior uma onda quadrada de 100 Hz.

Tabela 11.2 - Lei de Indução de Faraday

Forma de onda na bobina maior	Parâmetros
Triangular	Período =
	Valor de pico da Corrente no solenoide maior =
	Tensão induzida na bobina de prova =
	Forma de Onda induzida na bobina de prova =
Quadrada	Período =
	Valor de pico da Corrente no solenoide maior =
	Tensão induzida na bobina de prova =
	Forma de Onda induzida na bobina de prova =

Figura 11.6 - (a) Montagem para observação da f.e.m induzida em uma bobina de prova soleinoidal. (b) Bobina de prova.



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

11.5.4 Lei de Indução de Faraday-Lenz e indutância mútua entre dois solenóides

a) Na montagem da figura 11.6 (tome os mesmos cuidados anteriores), aplique um sinal de tensão com forma de onda senoidal de frequência 1 kHz na bobina maior.

b) Use o canal 1 do osciloscópio para medir a tensão sobre o resistor e o canal 2 para medir a tensão induzida na bobina de prova. Compare as formas de onda observadas e discuta a fase relativa entre elas. O comportamento observado é esperado de acordo com a lei de Faraday-Lenz? Explique por que.

c) Meça o valor de pico, o período e a fase relativa de ambos os sinais de tensão e faça um esboço, em um mesmo papel milimetrado, das duas formas de onda indicando esses parâmetros.

d) Varie a frequência da fonte para 500, 1000, 1500, 2000 Hz. Para cada frequência meça a amplitude (valor de pico) da corrente

no solenóide externo (I_0) e da força eletromotriz induzida (\mathcal{E}_0) na bobina de prova. Faça um gráfico de \mathcal{E}_0 como função de ωI_0 . Qual deve ser o comportamento da curva segundo lei de Faraday?

e) Deduza a expressão que relaciona \mathcal{E}_0 com a indutância mútua entre as bobinas, a frequência angular ω e a amplitude da corrente na bobina maior I_0 .

f) Com base neste resultado determine a indutância mútua entre as duas bobinas a partir do gráfico feito no item d).

g) Calcule a indutância mútua utilizando as características geométricas da bobina e utilizando a expressão derivada com o campo da bobina maior na aproximação de solenoide infinito.

h) Deduza a expressão da indutância mútua considerando a expressão para o campo de um solenóide finito para o cálculo do campo magnético da bobina maior. Calcule a indutância mútua entre as bobinas usando essa expressão.

i) Compare os valores calculados nos itens g) e h) com o valor determinado experimentalmente e discuta os resultados.

Tabela 11.3 - Indutância Mútua entre dois solenóides - Onda senoidal no solenóide maior

Período =	
Corrente =	
Tensão induzida na segunda bobina =	
Indutância mútua =	
Indutância mútua esperada (Aprox. de solenoide infinito) =	
Indutância mútua esperada (Aprox. de solenóide finito) =	

Bibliografia

HALLIDAY, D.; RESNICK, R. **Física III**. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1974.

NUSSENZVEIG, H.M. **Curso de física básica: eletricidade e magnetismo**. São Paulo: Edgard Blucher, 1998. v.3.

TIPPLER, P.A. **Física: para cientistas e engenheiros**. 3. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 1991. v. 3.

YOUNG, H. D.; FREEDMANN, R. A. **Sears e Zemanski física III: eletricidade e magnetismo**. São Paulo: Pearson, c2004.

Capítulo 12 Circuitos de corrente alternada I

Neste Capítulo estudaremos circuitos de corrente alternada e introduziremos a notação complexa para análise dos mesmos. Em particular, estudaremos as curvas de tensão versus corrente para resistores, indutores e capacitores submetidos a tensões alternadas. Estudaremos também os circuitos RC e RL e sua utilização como filtros de frequências.

Importante: O conteúdo da introdução teórica é apenas um guia para os conceitos necessários para a realização dos experimentos. Você deve aprofundar os conceitos consultando os livros citados na bibliografia ou outros de sua preferência

12.1 Definições gerais

Nos circuitos de corrente contínua, a resistência elétrica é a única grandeza que expressa o impedimento a passagem da corrente elétrica. Em corrente alternada, existem outros efeitos além do resistivo que influenciam a passagem de corrente no circuito; por exemplo, a indutância quando o circuito contém bobinas, ou a capacitância quando o circuito contém capacitores. Deste modo, a razão tensão/corrente em um circuito de corrente alternada não depende apenas das resistências elétricas do mesmo.

Por esse motivo, a razão entre tensão e corrente em um circuito de corrente alternada recebe um outro nome: impedância, um termo que foi proposto por Oliver Heaviside em 1886. Heaviside deu grandes contribuições à teoria eletromagnética, tendo reformulado as equações de Maxwell na notação vetorial moderna. As contribuições de Heaviside também incluem o cálculo vetorial, métodos de resolução de equações diferenciais e teoria de circuitos elétricos e linhas de transmissão, além de ter introduzido outros termos como indutância, condutância e eletretos.

A impedância de um circuito é composta de três componentes:

- g) Z_R : componente resistiva da impedância ou simplesmente resistência (R);
- h) Z_C : componente capacitiva da impedância ou reatância capacitiva (X_C);
- i) Z_L : componente indutiva da impedância ou reatância indutiva (X_L);

Uma outra grandeza importante na descrição de circuitos de corrente alterna é a frequência das tensões e correntes do circuito. A frequência linear é medida em Hertz (Hz) e é igual ao número de ciclos por segundo; seu símbolo é usualmente f . A frequência angular é medida em rad / s e é igual a taxa de variação da fase da corrente; seu símbolo é normalmente ω . A relação entre as duas é:

$$\omega = 2\pi f \quad (1)$$

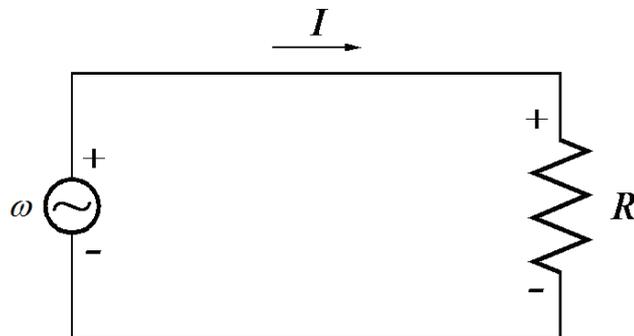
12.2 Circuitos resistivos, capacitivos ou indutivos

Na prática, é impossível obter circuitos de corrente alternada com características puramente resistivas, indutivas ou capacitivas. Mesmo assim é didático tratar esses casos ideais, para se ter uma ideia de seu comportamento. Neste caso, o tratamento pode ser feito através de equações diferenciais simples. As características previstas individualmente são mantidas quando tratarmos de circuitos que contenham combinações desses elementos.

a) Circuito Puramente Resistivo

Anteriormente, estudamos os efeitos da tensão e da corrente contínua em resistores. Agora vamos estudar um resistor submetido a uma fonte de tensão alternada da forma $V = V_o \cos(\omega t + \delta)$, como na figura 12.1.

Figura 12.1 - Esquema elétrico de um circuito puramente resistivo



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

A corrente que flui através do resistor pode ser calculada utilizando-se a lei de Ohm:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{V_o}{R} \cos(\omega t + \delta) = I_o \cos(\omega t + \delta) \quad (2)$$

Neste caso, observamos que tensão e corrente variam cossenoidalmente no tempo, e não existe diferença de fase entre ambas. A amplitude da corrente, I_o , é dada simplesmente por V_o / R . A potência instantânea dissipada no resistor é dada por:

$$P = VI = \frac{V_o^2}{R} \cos^2(\omega t + \delta) \quad (3)$$

O valor médio da potência dissipada em um ou mais períodos completos é dado por:

$$P_{med} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{V_o^2}{R} \cos^2(\omega t + \delta) dt = \frac{1}{2} \frac{V_o^2}{R} \quad (4)$$

Na equação 4, T representa um ou mais períodos completos. Vemos dessa equação que a potência média é diferente de zero para qualquer valor de ω , isto é, independentemente da frequência um resistor sempre dissipa a mesma potência elétrica em um circuito onde tensão e corrente variam no tempo.

A impedância do circuito, em módulo, é dada pela razão entre os valores de pico da tensão (V_o) e da corrente (I_o):

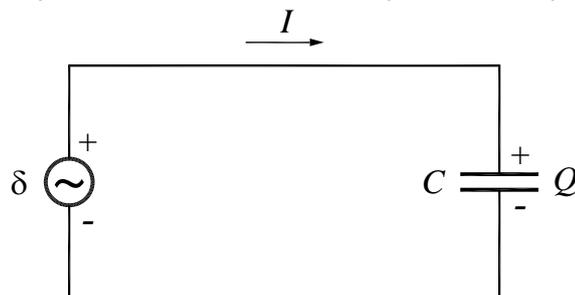
$$Z = \frac{V_o}{I_o} = R \quad (5)$$

Portanto, neste caso a impedância é simplesmente a resistência do circuito.

b) Circuito Puramente Capacitivo:

Na figura 12.2 mostramos um capacitor submetido a uma diferença de potencial V da forma $V = V_o \cos(\omega t + \delta)$. A carga acumulada no capacitor é $Q = Q_o \cos(\omega t + \delta)$, onde $Q_o = CV_o$.

Figura 12.2 - Esquema elétrico de um circuito puramente capacitivo



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

A corrente I que flui através do circuito pode ser calculada da seguinte forma:

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega CV_o \sin(\omega t + \delta) = I_o \cos(\omega t + \delta + \pi/2) \quad (6)$$

Neste caso, observamos que tensão e corrente variam no tempo, mas estão fora de fase por um ângulo de 90° ($\pi/2$ rad). Em um circuito puramente capacitivo a corrente é adiantada em relação à tensão (ou seja, o pico de corrente ocorre antes do pico de tensão) e tem amplitude dada por $I_o = \omega CV_o$. Note que esse comportamento é de fato esperado, pois assim que o capacitor descarregado é ligado no circuito a corrente é máxima e a tensão é mínima (pois o capacitor está descarregado) e à medida que o tempo passa a corrente diminui e a tensão aumenta (a carga vai se acumulando nas placas do capacitor) e depois de um certo tempo a corrente é zero e a tensão é máxima (capacitor carregado). A potência dissipada neste circuito é dada por:

$$P = VI = -CV_o^2 \cos(\omega t + \delta) \cdot \sin(\omega t + \delta) \quad (7)$$

A potência média é:

$$P_{med} = CV_o^2 \frac{1}{T} \int_0^T \sin(\omega t + \delta) \cos(\omega t + \delta) dt = \frac{1}{2} CV_o^2 \frac{1}{T} \int_0^T \sin(2\omega t + 2\delta) dt = 0 \quad (8)$$

A potência média dissipada em um circuito puramente capacitivo é sempre nula, para qualquer valor de ω . Em outras palavras, um capacitor não dissipa potência; ele armazena energia (em forma de energia eletrostática) durante uma parte do ciclo para fornecê-la durante a outra parte, de modo que o fluxo médio é nulo.

A impedância do circuito, em módulo, é dada pela razão entre os valores máximos de tensão (V_o) e de corrente (I_o), ou seja:

$$Z = X_c = \frac{V_o}{I_o} = \frac{1}{\omega C} \quad (9)$$

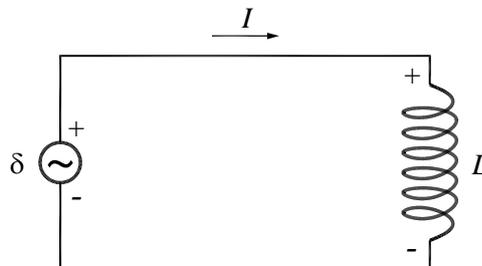
A impedância capacitiva (ou reatância capacitiva) é inversamente proporcional à frequência da tensão alternada. No limite de tensão contínua, vai a infinito, o que significa que não há corrente. De fato, quando um capacitor é ligado a uma fonte de tensão contínua, ele se carrega (usualmente de forma rápida) até a tensão da fonte e a corrente deixa de circular.

c) *Circuito Puramente Indutivo:*

Na figura 12.3 mostramos um indutor submetido a uma força eletromotriz V da forma $V = V_o \cos(\omega t + \delta)$. A diferença de potencial sobre um indutor pode ser escrita como:

$$V = L \frac{dI}{dt} = V_o \cos(\omega t + \delta) \quad (10)$$

Figura 12.3 - Esquema elétrico de um circuito puramente indutivo



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

A corrente I que flui através do circuito pode ser calculada da seguinte forma:

$$I = \frac{V_o}{L} \int \cos(\omega t + \delta) dt = \frac{V_o}{\omega L} \sin(\omega t + \delta) + C = I_o \cos(\omega t + \delta - \frac{\pi}{2}) + C \quad (11)$$

A tensão e a corrente variam periodicamente no tempo, e estão fora de fase por um ângulo de 90° . Entretanto, no caso do circuito puramente indutivo a corrente é atrasada em relação à tensão. Esse resultado pode ser compreendido qualitativamente se lembrarmos que a força contra eletromotriz no indutor é proporcional a taxa de variação da corrente no tempo (lei de Faraday-Lenz). Quando o indutor é ligado ao circuito ele se comporta como um curto-circuito (estamos desprezando o efeito resistivo) e a corrente tende a aumentar rapidamente (máxima taxa de variação) e imediatamente aparece uma tensão nos terminais do indutor (força contra-eletromotriz) de modo a impedir que a corrente se estabeleça. À medida que o tempo passa a força eletromotriz da fonte faz com que a corrente vai se estabelecendo de forma mais lenta e a tensão no indutor vai diminuindo até que a corrente atinja um valor que equilibra e a tensão nos terminais do indutor seja nula. O pico de máxima tensão no indutor ocorre antes da máxima corrente e, portanto, a tensão está adiantada em relação a corrente. Como no caso do circuito puramente capacitivo, a potência média dissipada no circuito é nula para qualquer valor de ω . O indutor armazena energia (em forma magnética) durante uma parte do ciclo e fornece essa energia na outra parte do ciclo.

A impedância do circuito é, em módulo, a razão entre V_o e I_o , ou seja:

$$Z = X_L = \frac{V_o}{I_o} = \omega L \quad (12)$$

A impedância de um circuito puramente indutivo cresce com a frequência, e vai a zero em circuitos de corrente contínua. De fato, como nesses circuitos a corrente não varia, a tensão sobre o indutor é nula.

Um indutor real (bobina) é composto por muitas voltas de fios enrolados e possui, além da indutância, uma resistência. Assim, costuma-se dizer que na prática toda indutância vem sempre acompanhada de uma resistência. Porém essa afirmação não é totalmente verdadeira, já que hoje existem materiais que em baixa temperaturas podem atingir o estado supercondutor e ter resistência elétrica nula. Em outras palavras uma bobina feita de um material supercondutor é um indutor puro, ou seja, converte energia elétrica em energia magnética da forma mais eficiente possível. Isso pode parecer a princípio uma idealização sem muita aplicação, mas, de fato, nos equipamentos de ressonância magnética nuclear, comuns em hospitais hoje em dia, a geração do alto campo magnético necessário ao experimento (ou exame clínico, no caso) é feita através de um solenóide feito de material supercondutor, justamente para aproveitar essa máxima eficiência na conversão de energia elétrica em energia magnética.

12.3 A notação complexa

Na análise de circuitos de corrente alternada, é bastante útil usar o formalismo da impedância complexa, que usa as propriedades

das exponenciais imaginárias para simplificar a análise de problemas que envolvem valores (tensões e correntes) que variam senoidalmente. A grande vantagem é que as equações diferenciais lineares transformam-se facilmente em equações ordinárias. Em todos os casos, o valor de fato das tensões e correntes (valor que pode ser medido em um experimento) é a parte real do número complexo.

Na notação complexa, tensão e corrente alternadas senoidais são expressas como:

$$V(t) = V_o e^{i\omega t} \quad (13a)$$

$$I(t) = I_o e^{i\omega t} \quad (13b)$$

V_o e I_o podem assumir valores complexos.

O conceito de impedância também pode ser generalizado na notação complexa, como sendo a razão entre os valores complexos da tensão e da corrente. O resultado é em geral um número complexo, cujo módulo é igual à impedância real (razão entre os valores de pico) e o argumento é igual à diferença de fase entre a corrente e a tensão (positivo se a tensão for adiantada com relação à corrente).

No caso de um resistor, a tensão e a corrente estão em fase, logo a impedância complexa é um número real, igual à impedância real:

$$Z_R = R \quad (14)$$

No caso do capacitor, a corrente é adiantada de 90° em relação à tensão, logo a impedância complexa está no eixo imaginário negativo. Seu módulo é dado pela equação 9. Portanto:

$$Z_C = iX_C = -\frac{i}{\omega C} \quad (15)$$

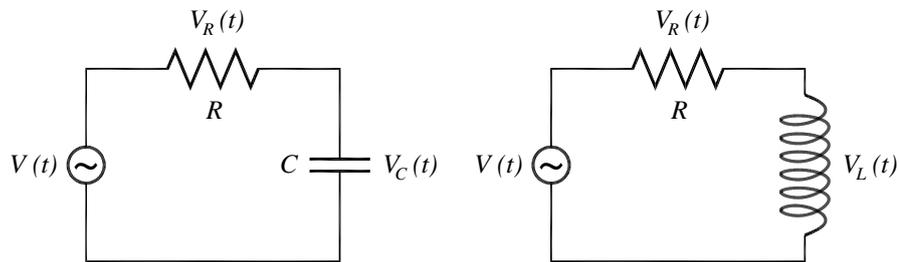
No caso do indutor, a corrente é atrasada de 90° em relação à tensão, logo a impedância complexa está no eixo imaginário positivo, com módulo dado pela equação 12. Portanto:

$$Z_L = iX_L = i\omega L \quad (16)$$

12.4 Circuitos RC e RL série

Na análise dos circuitos esquematizados na figura 12.4a e 12.4b, utilizaremos o formalismo da impedância complexa. Vamos assumir que os circuitos são alimentados por uma fonte de tensão senoidal da forma $V(t) = V_o \cos(\omega t)$, que na notação complexa se escreve $V(t) = V_o e^{i\omega t}$. A corrente que atravessa o circuito é também senoidal, e dada por $I(t) = K e^{i\omega t}$.

Figura 12.4 - Circuitos de corrente alternada. (a) RC; (b) RL



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Para o circuito RC, utilizando a lei de Kirchhoff, podemos escrever:

$$V(t) = V_R + V_C \quad (17)$$

As tensões no resistor e no capacitor são dadas por:

$$V_R = RI(t) = RK e^{i\omega t} \quad (18)$$

$$V_C = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \int I(t).dt = \frac{K}{i\omega C} e^{i\omega t} \quad (19)$$

Substituindo na equação 17 e cancelando a exponencial que é comum a todos os termos, obtemos:

$$V_o = R.K + \frac{K}{i\omega C} \quad (20)$$

Isso permite determinar K :

$$K = \frac{V_o}{R - i \frac{1}{\omega C}} \quad (21)$$

A impedância complexa é a razão entre os valores complexos da tensão e da corrente:

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{V_o}{K} = R - i \frac{1}{\omega C} \quad (22)$$

O módulo da impedância, que é a razão entre os valores de pico da tensão e da corrente, é o módulo desse valor:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (23)$$

No circuito RL, figura 12.4b, a tensão sobre o indutor é dada por:

$$V_L = L \frac{dI}{dt} = \omega L K e^{i\omega t} \quad (24)$$

A tensão total é dada por $V(t) = V_R + V_L$. Logo:

$$V_o = RK + i\omega LK \quad (25)$$

Logo:

$$K = \frac{V_o}{R + i\omega L} \quad (26)$$

A impedância complexa e o seu módulo são, portanto:

$$Z = R + i\omega L \quad (27)$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \quad (28)$$

Com o formalismo de impedâncias complexas a análise dos circuitos de corrente alternada fica muito parecida com o tratamento dados aos circuitos de corrente contínua. Do mesmo modo que uma combinação de resistores em série e em paralelo pode ser representada por um único resistor equivalente, um circuito contendo uma combinação arbitrária de resistores, indutores e capacitores pode ser representado por uma impedância total Z . As equações 21 e 26 mostram que a impedância complexa equivalente de componentes ligados em série é a soma das impedâncias complexas individuais, como acontece com as resistências em circuitos de corrente contínua. Da mesma forma, a regra de associação de impedâncias complexas em paralelo é idêntica à das resistências.

No entanto, devemos ressaltar que:

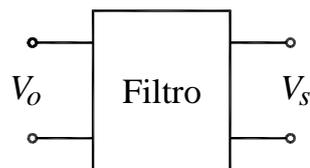
f) O formalismo de impedância complexa é útil para tratar relações lineares, como, por exemplo, uma equação de malha, mas não pode ser usado quando as relações não são lineares, como no cálculo de potência.

g) O formalismo de impedância complexa pode ser aplicado diretamente a circuitos com geradores de onda senoidal, mas não a circuitos com geradores de outro tipo de onda.

12.5 Filtros RC (“passa-alta”) e RL (“passa-baixa”)

Os circuitos RL e RC possuem propriedades muito interessantes quando analisados como função da frequência. Esses circuitos funcionam como filtros elétricos e são utilizados em instalações elétricas e equipamentos eletrônicos para rejeitar ruído e para protegê-los, por exemplo, contra transientes induzidos pela queda de raios durante as tormentas. De modo geral um filtro pode ser representado como um circuito com dois terminais de entrada e dois de saída, como na figura 12.5.

Figura 12.5 - Representação de um filtro elétrico



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Todo filtro é caracterizado por uma função de transferência, $T(\omega)$, definida como sendo o quociente entre a tensão (complexa) nos terminais de saída pela tensão (complexa) nos terminais da entrada:

$$T(\omega) = \frac{V_s}{V_o} = \frac{(V_s)_{\max}}{(V_o)_{\max}} e^{i\phi} \quad (29)$$

O módulo da função de transferência é a razão entre os valores de pico da tensão nos terminais de saída e entrada; o argumento é a diferença de fase entre eles (positivo se a saída estiver adiantada em relação à entrada).

b) Filtro RC (ou “passa-alta”)

A associação em série de um resistor e um capacitor (mostrado na figura 12.4a) forma um circuito simples, porém de muita utilidade. Neste circuito, observa-se um comportamento característico da tensão no resistor (V_R) em função da frequência. Considerando que a saída do filtro está nos terminais do resistor, a função de transferência pode ser escrita da seguinte forma:

$$T(\omega) = \frac{V_R}{V_o} = \frac{R}{Z} = \frac{1}{1 - i \frac{1}{\omega RC}} \quad (30)$$

O módulo da função de transferência é:

$$|T(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega RC}\right)^2}} \quad (31)$$

Para altas frequências ($\omega \gg 1/RC$), a tensão de V_R é aproximadamente igual à tensão de entrada do gerador (V_o). Em baixas frequências, V_R é menor que a tensão de entrada. Logo este circuito privilegia a passagem de correntes alternadas com altas frequências, sendo por isso conhecido como *filtro passa-alta*. Na frequência $\omega_o = 1/RC$, metade da potência fornecida é atenuada pelo circuito, e por isso esse valor é denominado *frequência de meia-potência*. A função de transferência pode ser escrita em termos dessa frequência:

$$|T(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_o / \omega)^2}} \quad (32)$$

A função de transferência é definida em termo das tensões. Em algumas aplicações, é mais interessante pensar em termos de potência. Para uma dada carga que será alimentada pela saída do filtro, a potência é proporcional ao quadrado da tensão. Portanto, a razão entre as potências é igual ao quadrado da função de transferência.

c) *Filtro RL (ou “passa-baixa”)*

Da mesma forma, a associação em série de um resistor e um indutor, figura 12.4b, forma um outro circuito de grande utilidade. Neste caso a função de transferência pode ser escrita como:

$$T(\omega) = \frac{V_R}{V_o} = \frac{R}{Z} = \frac{1}{1 + i \frac{\omega L}{R}} \quad (33)$$

O módulo da função de transferência é:

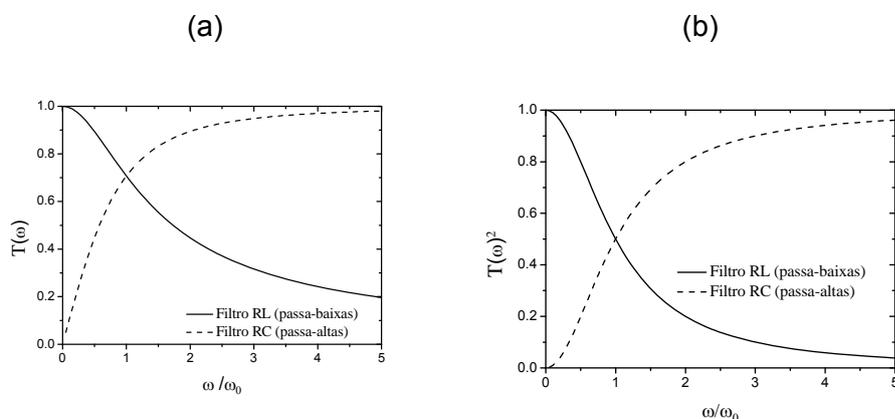
$$|T(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}} \quad (34)$$

Neste circuito, a tensão V_R é aproximadamente igual a tensão V_o a baixas frequências ($\omega \ll R/L$). Em altas frequências a tensão V_R sobre a resistência (ou seja, a corrente) é atenuada e por isso o filtro é denominado filtro *passa-baixa*. A frequência $\omega_o = R/L$ é a frequência de meia-potência, como no filtro RC. Esta frequência pode ser adotada como a “frequência de corte” do filtro. A função de transferência pode ser escrita em termos dessa frequência:

$$|T(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_o)^2}} \quad (35)$$

Na figura 12.6a, há o gráfico da função de transferência para os filtros RC e RL. Na figura 12.6b, há um gráfico de potência, que é igual ao quadrado da função de transferência. Note no gráfico do quadrado da função de transferência que, quando $T(\omega)^2 = 0.5$ $\omega = \omega_o$, justificando a denominação frequência de meia potência.

Figura 12.6 - Resposta de filtros RC e RL em função da frequência. (a) Função de transferência. (b) Relação entre potência de saída e potência de entrada.



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Os filtros RC e RL são muito usados como filtros de frequência em várias aplicações; um exemplo é nos sistemas de som com várias caixas. A caixa maior, chamada de *woofers*, executa melhor os sons graves (de baixa frequência), e a caixa menor (o *twitter*) executa melhor os agudos (de alta frequência). O sinal que vai para o *woofers* passa por um filtro passa-baixas (RL), e o sinal que vai para o *twitter* passa por um filtro passa-altas (RC). O resultado é que cada caixa reproduz apenas a faixa de frequências para a qual seu desempenho é melhor, o que melhora a qualidade do som.

12.6 Formulação do Modelo de Drude para correntes alternadas

O modelo de Drude é um modelo teórico permite prever e calcular as propriedades elétricas de materiais. Há várias maneiras

de formular o modelo; em uma delas, faz-se a hipótese de que sobre os elétrons age, além da força elétrica, uma força de arrasto proporcional a sua velocidade. Isso não entra em contradição com a hipótese de o elétron só interagir com a rede de íons de fundo durante as colisões porque o que conta é o comportamento médio total dos elétrons. Com essa hipótese, a equação de movimento é:

$$m \frac{dv_m}{dt} = -eE - \gamma v_m \quad (35)$$

Essa é uma equação diferencial de primeira ordem, linear e não-homogênea na variável v_m , que é a velocidade média dos elétrons. Ela admite uma solução estacionária (v_m constante no tempo) se E for constante também:

$$v_m = -\frac{eE}{\gamma} \quad (36)$$

A corrente que atravessa um fio de seção transversal A e comprimento ΔL é:

$$I = -neAv_m = \frac{ne^2AE}{\gamma} \quad (37)$$

Lembrando que $E = V / \Delta L$, escrevemos:

$$I = \frac{ne^2}{\gamma} \frac{A}{\Delta L} V \quad (38)$$

Vemos então que a hipótese da força de arrasto proporcional à velocidade tem como consequência que a corrente é proporcional a diferença de potencial, à área e inversamente proporcional ao comprimento do fio, o que foi demonstrado experimentalmente por Ohm.

A resistência desse condutor é:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\gamma}{ne^2} \frac{\Delta L}{A} \quad (39)$$

A resistividade do material é:

$$\rho = \frac{\gamma}{ne^2} \quad (40)$$

A grande vantagem dessa formulação é que ela permite também considerar o caso de corrente alternada, quando o campo elétrico varia senoidalmente no tempo. Nesses casos, a equação 35 deve ser resolvida assumindo um campo elétrico da forma:

$$E = E_o \cos(\omega t) \quad (41)$$

Para facilitar a resolução, vamos utilizar a notação complexa e permitir que o campo elétrico e a velocidade dos elétrons assumam valores complexos. O campo elétrico é escrito então como uma exponencial imaginária:

$$E = E_o \exp(i\omega t) \quad (42)$$

A solução particular a ser procurada deve ter a mesma dependência temporal do campo elétrico:

$$v_m = v_o \exp(i\omega t) \quad (43)$$

Substituímos 42 e 43 em 35 e resolvemos para v_o :

$$v_o = \frac{-eE_o}{\gamma + im\omega} \quad (44)$$

A diferença entre essa expressão e a 36 é que o denominador γ foi substituído por $\gamma + im\omega$ (que vale γ no caso de corrente contínua).

Seguindo os mesmos passos que levaram da 36 até a 38, o resultado é:

$$I = \frac{ne^2 A}{(\gamma + im\omega)\Delta L} V \quad (45)$$

A impedância do fio condutor vale:

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{\gamma}{ne^2} \frac{\Delta L}{A} + i \frac{m\omega}{ne^2} \frac{\Delta L}{A} \quad (45)$$

Vemos então que a impedância de um condutor tem uma parte real constante e uma parte imaginária proporcional à

frequência. O primeiro termo tem a forma da impedância de uma resistência, enquanto o segundo tem a forma da impedância de uma indutância. Em outras palavras, todo condutor é igual à associação de um resistor com um indutor. A resistência e indutância características são:

$$R = \frac{\gamma}{ne^2} \frac{\Delta L}{A} \quad (46)$$

$$L = \frac{m}{ne^2} \frac{\Delta L}{A} \quad (47)$$

Como era esperado, o valor da resistência é o mesmo que foi calculado no caso de corrente contínua.

Da mesma forma que foi definida a resistividade, também definimos a indutividade e a impeditividade de um material.

Para poder ter uma ideia do efeito indutivo do fio retilíneo, vamos calcular a razão entre a reatância indutiva e a resistência do fio:

$$\frac{X_L}{R} = \frac{\omega L}{R} = \frac{\omega}{\gamma / m} \quad (A16)$$

Na frequência $\omega = \gamma / m$, a reatância indutiva e a resistência tem o mesmo valor. Nos condutores metálicos, o valor típico de γ / m é da ordem de 10^{13} s^{-1} . Assim, mesmo a frequências relativamente altas $\sim 100 \text{ MHz}$, a reatância indutiva é várias ordens de grandeza menor que a resistência, e pode certamente ser desprezada.

12.7 Experimentos

A seguir são propostos experimentos passíveis de serem realizados no contexto deste tópico. Fica a critério de cada docente a definição de quais itens realizar.

Em todos os experimentos realizados, os valores encontrados experimentalmente deverão ser comparados com valores tabelados ou especificados pelos fabricantes dos componentes.

Sempre que surgir uma dúvida quanto à utilização de um instrumento, consulte o professor para esclarecimentos.

Atenção: Para quantificar o comportamento instantâneo de tensões e correntes que variam no tempo, utilizaremos um osciloscópio e um gerador de funções. Um detalhe importante em algumas das montagens propostas é que será necessário que o nível de terra de um dos equipamentos esteja isolado do terra da rede elétrica. Isso se dá porque para observar as diferenças de potenciais em dois componentes distintos simultaneamente é inevitável que o terra do osciloscópio e do gerador de funções sejam ligados em pontos distintos do circuito, o que acarreta em um “loop” de terra que pode vir a provocar um curto circuito no gerador ou em algum dos componentes, gerando medições imprecisas ou

introdução de alto nível de ruído no sistema. Assim, para realizar os experimentos propostos, o cabo terra do gerador de funções não pode estar conectado ao pino terra da rede elétrica, o que pode ser conseguido através da utilização de um adaptador de três (fase, neutro e terra) para dois (fase e neutro) pinos. No caso de montagens com muitas bancadas funcionando simultaneamente o terra osciloscópio também deve ser isolado da rede para evitar que haja interferência entre as bancadas. Além disso, você deve prestar muita atenção na ligação do osciloscópio para que os cabos “terra” do mesmo estejam sempre ligados no mesmo ponto do circuito.

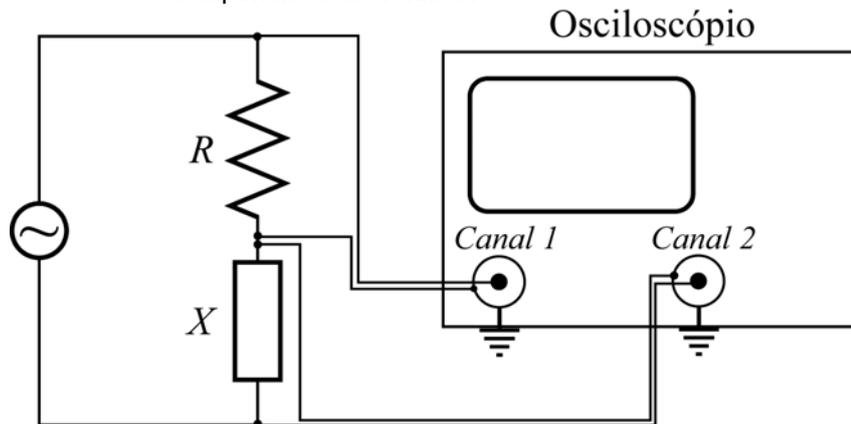
12.7.1 Tensão e corrente em resistores, capacitores e indutores em circuitos de corrente alternada

Nesta parte da prática estaremos interessados em caracterizar o comportamento instantâneo das curvas de tensões como função do tempo (curvas $V \times t$) para resistores, indutores e capacitores.

a) Utilizaremos um osciloscópio e um gerador de funções para medir a curva $V \times t$ de resistores, capacitores e indutores em regime de corrente alternada. Para isso, monte o circuito da figura 12.7, com o osciloscópio no modo X-t. No canal 1 (eixo horizontal), você deverá medir a corrente, a menos de um fator de escala (lembre-se que, em um resistor, $I = V / R$); no canal 2 (eixo vertical),

you will need to measure the voltage across the component to be studied. For the correct visualization of the signal of the voltage in channel 2, this must be in inverted mode (justify the reason in your report).

Figura 12.7 - Circuito utilizado para medir as tensões nos terminais de componentes eletrônicos.



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

b) Para monitorar a corrente coloque um resistor de $R = 100 \Omega$ e ajuste o gerador de funções para um sinal senoidal de máxima amplitude e frequência de cerca de 1 kHz.

c) Coloque um segundo resistor R_x (sugere-se um resistor de 47Ω) no lugar do componente indicado como X na figura 12.7.

d) Configure o osciloscópio para observar as tensões dos dois componentes como função do tempo simultaneamente. Lembre-se que os terras do osciloscópio devem estar conectados em um mesmo ponto do circuito e que o canal 2 deve estar em modo invertido.

e) Meça o valor de pico dos sinais de tensão nos terminais dos dois resistores e calcule o valor de pico da corrente no circuito.

Meça também a menor diferença de tempo entre os máximos das tensões nos dois resistores e a partir daí calcule a fase relativa entre a corrente e a tensão no resistor de 47Ω (produto entre o tempo entre máximos consecutivos e a frequência angular).

f) Com os valores da amplitude das tensões nos resistores e a fase relativa entre elas, construa um diagrama de fasores (tensões e correntes no plano complexo) em escala, indicando os fasores referentes a tensão no resistor R_X e a corrente no circuito.

g) Considerando a tensão aplicada na fonte e os valores das resistências dos dos resistores utilizados (meça esses valores com um ohmímetro), faça um cálculo de qual deve ser a corrente no circuito, a tensão no resistor R_X e fase ente a tensão em R_X e a corrente.

h) Substitua o resistor R_X por um capacitor (sugere-se um capacitor de capacitância nominal de $\sim 0,22 \mu\text{F}$) e ajuste o osciloscópio para observar os sinais de tensão nos terminais do resistor de $R = 100 \Omega$ e no capacitor simultaneamente. Antes de conectar o capacitor, meça o valor exato da capacitância utilizando o multímetro digital.

i) Meça o valor de pico dos sinais de tensão nos terminais do resistor e do capacitor. Meça também a menor diferença de tempo entre os máximos das tensões no resistor e no capacitor e a partir daí calcule a fase relativa entre a corrente e a tensão nos terminais do capacitor.

j) Desconecte o canal 2 do osciloscópio e utilize o canal 1 para medir o valor de pico da tensão na fonte. Nesta medida conecte o cabo terra do osciloscópio no mesmo ponto que o cabo terra da fonte.

k) Calcule o módulo da impedância do circuito tomando a razão entre os valores de pico da tensão na fonte e da corrente.

l) Com os valores da amplitude das tensões no resistor e no capacitor e da fase relativa entre elas, construa um diagrama de fasores em escala, indicando os fasores referentes a tensão no resistor, a tensão no capacitor, a corrente no circuito e o ângulo de fase entre a tensão e corrente. Utilize esse diagrama para determinar a tensão da fonte e compare com o valor medido experimentalmente.

m) A partir dos valores dos componentes e da frequência da fonte, determine a impedância complexa do circuito e a fase entre a tensão e corrente, representando-os em um diagrama de fasores. Calcule o módulo da impedância e compare com o valor obtido no item k).

n) Retorne o circuito a configuração mostrada na figura 12.7, porém substituindo o capacitor por uma bobina (sugere-se uma bobina com indutância ~ 45 mH). Antes de conectar a bobina, meça o valor exato da indutância utilizando o multímetro digital. Ajuste o osciloscópio para observar os sinais de tensão nos terminais do resistor de $R = 100 \Omega$ e na bobina simultaneamente.

o) Meça o valor de pico dos sinais de tensão nos terminais do resistor e da bobina. Meça também a menor diferença de tempo entre os máximos das tensões no resistor e na bobina e a partir daí calcule a fase relativa entre a corrente e a tensão nos terminais do capacitor.

p) Desconecte o canal 2 do osciloscópio e utilize o canal 1 para medir o valor de pico da tensão na fonte. Nesta medida conecte o cabo terra do osciloscópio no mesmo ponto que o cabo terra da fonte.

q) Calcule o módulo da impedância do circuito tomando a razão entre os valores de pico da tensão na fonte e da corrente.

r) Com os valores da amplitude das tensões no resistor e na bobina e da fase relativa entre elas, construa um diagrama de fasores em escala, indicando os fasores referentes a tensão no resistor, a tensão na bobina, a corrente no circuito e o ângulo de fase entre a tensão e corrente. Utilize esse diagrama para determinar a tensão da fonte e compare com o valor medido experimentalmente.

s) A partir dos valores dos componentes e da frequência da fonte, determine a impedância complexa do circuito e a fase entre a tensão e corrente, representando-os em um diagrama de fasores. Calcule o módulo da impedância e compare com o valor obtido no item k). Compare também o valor do ângulo de fase entre tensão e corrente obtido neste item com o valor obtido no item r. Se observar uma diferença apreciável, justifique o porque e recalcule o valor com as devidas correções.

12.7.2 Curva V_{xl} de resistores, capacitores e indutores

Nesta parte da prática estaremos interessados em caracterizar o comportamento instantâneo das curvas de tensões como função da corrente (curvas V_{xl}) para resistores, indutores e capacitores.

a) Utilizaremos um osciloscópio e um gerador de funções para medir a curva V_{xl} de resistores, capacitores e indutores em regime de corrente alternada. Para isso, use a montagem da figura 12.7, com o osciloscópio no modo X-Y. No canal 1 (eixo horizontal), você deverá medir a corrente, a menos de um fator de escala

(lembre-se que, em um resistor, $I = V / R$); no canal 2 (eixo vertical), você deverá medir a tensão sobre o componente.

b) Coloque um resistor de $R = 1 \text{ k}\Omega$ e ajuste o gerador de sinais para um sinal senoidal de máxima amplitude e frequência de cerca de 1 kHz.

c) Configure o osciloscópio no modo X-Y, ambos os canais em 2 V/div e acoplamento DC e o canal 2 invertido (justifique o porquê em seu relatório). Lembre-se que os terras do osciloscópio devem estar conectados em um mesmo ponto do circuito.

d) Coloque um resistor no lugar do componente X e observe a curva V_{xI} na tela do osciloscópio. Varie a frequência da fonte (de alguns Hz até dezenas de kHz) e descreva o que acontece com a curva. Determine o coeficiente angular e explique esse resultado.

e) Coloque um capacitor de $0,22 \text{ }\mu\text{F}$ no lugar do componente X e observe a curva V_{xI} na tela do osciloscópio. Varie a frequência da fonte (desde alguns Hz até dezenas de kHz) e descreva como é a curva observada e o seu comportamento como função da frequência. Formule matematicamente o problema de modo a prever o tipo de curva observada e o comportamento como função da frequência.

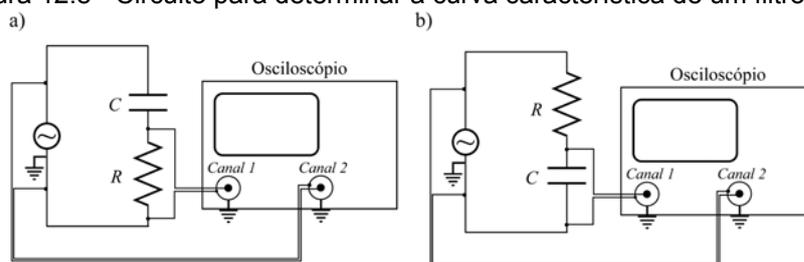
f) Coloque um indutor de 44 mH no lugar do componente X e observe a curva V_{xI} na tela do osciloscópio. Varie a frequência da fonte (desde alguns Hz até dezenas de kHz) e descreva o que acontece com a curva. Formule matematicamente o problema de modo a prever o tipo de curva observada e o comportamento como função da frequência.

12.7.3 Filtro RC (passa-alta)

Nesta parte da prática estaremos interessados em verificar o comportamento das curvas de transferência de filtros passa-alta.

a) Monte o circuito RC mostrado na Figura 12.8a, com $R = 1 \text{ k}\Omega$ e $C = 0,22 \text{ }\mu\text{F}$. Ajuste o gerador de funções para obter um sinal senoidal de frequência 1 kHz com amplitude máxima.

Figura 12.8 - Circuito para determinar a curva característica de um filtro RC



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

g) Utilizando os dois canais do osciloscópio, ajuste a escala de tempo do osciloscópio para a escala adequada e levante a curva da função de transferência do circuito, ou seja, meça o valor da tensão no gerador (V_o) e na resistência (V_R), em função da frequência, variando essa desde 50Hz até 20kHz. **Obs:** durante toda a medida verifique o valor da tensão V_o (não assuma que ele será o mesmo sempre). Além disso, certifique-se que os cabos de “terra” dos dois canais do osciloscópio estejam conectados no mesmo ponto do circuito, juntamente com o terra do gerador de funções; para isso, siga a montagem proposta na Figura 12.8a.

h) **(Optativo)** Repita o procedimento anterior para medir tensão no gerador (V_o) e no capacitor (V_C). Siga a montagem

proposta na Figura 12.8b para a medida simultânea de (V_o e V_c), garantido que todos os terras do osciloscópio encontrem-se em um mesmo ponto do circuito, juntamente com o terra do gerador de funções.

i) Faça um gráfico de V_R / V_o e V_C / V_o em função da frequência em radianos. Uma sugestão é variar de 50 Hz até 20 kHz.

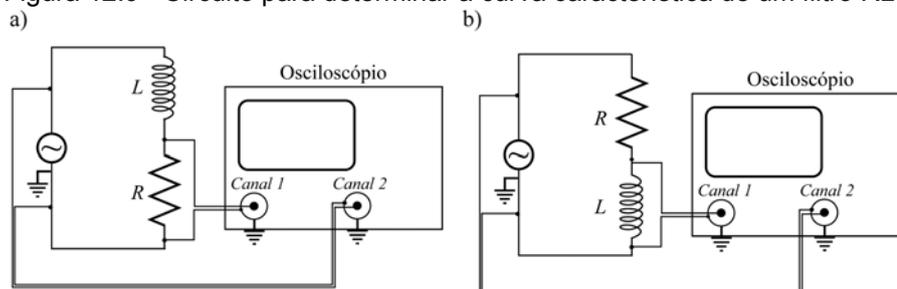
j) A partir do gráfico de V_R / V_o em função da frequência, determine a frequência de corte do filtro e compare com o valor esperado $\omega_0 = 1/RC$. Para isso, também meça os valores de capacitância e resistência dos componentes utilizando um multímetro.

12.7.4 Filtro RL (passa-baixa)

Nesta parte da prática estaremos interessados em verificar o comportamento das curva de transferência de filtros passa-baixa.

a) Monte o circuito RL, utilizando $R = 100 \ \Omega$ e $L = 44 \text{ mH}$. O circuito está mostrado na figura 12.9a.

Figura 12.9 - Circuito para determinar a curva característica de um filtro RL



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

k) Proceda da mesma maneira que no experimento anterior: Para as medidas de V_o e V_R como função da frequência, monte o circuito exibido na Figura 12.9a; para as medidas de V_o e V_L , monte o circuito exibido na Figura 12.9b. Em ambos os casos lembre-se de manter todos os terras em um mesmo ponto do circuito.

l) Faça um gráfico de V_R / V_o e V_L / V_o em função da frequência. Uma sugestão é variar de 100 Hz até 20 kHz.

m) Faça um gráfico da potência dissipada em R como função da frequência em radianos e, com esses dados, determine a frequência de corte do filtro, e compare com o valor esperado $\omega_o = R/L$. Para isso, com um multímetro, meça a resistência e indutância dos componentes utilizados.

Bibliografia

HALLIDAY, D.; RESNICK, R. **Física III**. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1974.

NUSSENZVEIG, H.M. **Curso de física básica: eletricidade e magnetismo**. São Paulo: Edgard Blucher, 1998. v.3.

TIPPLER, P.A. **Física: para cientistas e engenheiros**. 3. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 1991. v. 3.

YOUNG, H. D.; FREEDMANN, R. A. **Sears e Zemanski física III: eletricidade e magnetismo**. São Paulo: Pearson, c2004.

Capítulo 13 Circuitos de corrente alternada II

Neste Capítulo continuaremos o estudo circuitos de corrente alternada, analisando tanto o comportamento transiente como em regime estacionário dos circuitos RC, RL e RLC em série. Uma ênfase especial será dada a análise do fenômeno da ressonância em circuitos RLC.

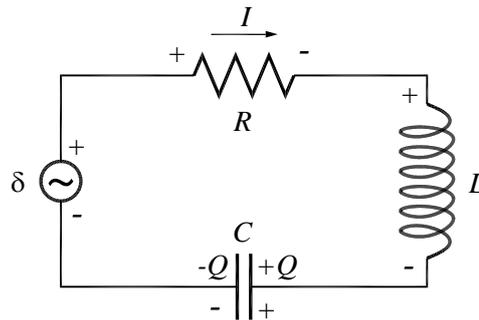
Importante: O conteúdo da introdução teórica é apenas um guia para os conceitos necessários para a realização dos experimentos. Você deve aprofundar os conceitos consultando os livros citados na bibliografia ou outros de sua preferência

13.1 Circuito RLC série (Análise estacionária)

A figura 13.1 mostra um circuito RLC série alimentado por uma fonte de tensão alternada cossenoidal que oscila com frequência angular constante ω . A tensão aplicada ao circuito pode ser escrita como:

$$V = V_o \cos(\omega t) \quad (1)$$

Figura 13.1 - Esquema elétrico de um circuito RLC série



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Usando a lei de Kirchhoff das malhas, podemos escrever $V = V_R + V_C + V_L$, onde as tensões em cada componente são dadas por:

$$V_R = RI \quad (2a)$$

$$V_C = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \int Idt \quad (2b)$$

$$V_L = L \frac{dI}{dt} \quad (2c)$$

Substituindo as equações 2 na equação 1, e utilizando a notação complexa, obtemos:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int Idt = V_0 e^{i\omega t} \quad (3)$$

A corrente no circuito também deve oscilar harmonicamente:

$$I = I_0 e^{i\omega t} \quad (4)$$

Substituindo a equação 4 na equação 3:

$$I_0 \left(R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} \right) = V_0 \quad (5)$$

Isso permite calcular I_0 :

$$I_0 = \frac{V_0}{R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}} \quad (6)$$

Esse é um número complexo, o que indica que há uma diferença de fase entre a corrente e a tensão na fonte. É mais conveniente expressar esse número na forma polar:

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} e^{-i\varphi} \quad (7)$$

O argumento φ é dado por:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \right) \quad (8)$$

A impedância e o seu módulo valem, respectivamente:

$$Z = \frac{V_o}{I_o} = R + i\omega L - i \frac{1}{\omega C} \quad (9a)$$

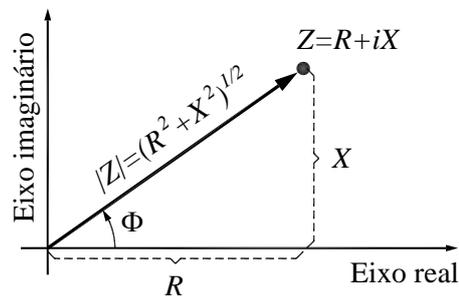
$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (9b)$$

Vemos que a impedância é simplesmente a soma das impedâncias do resistor, do capacitor e do indutor (representadas como números complexos).

A figura 13.2 mostra a impedância representada no plano complexo. A parte real é a resistência e a parte imaginária é chamada de reatância, sendo dada por:

$$X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C} \quad (10)$$

Figura 13.2 - Diagrama da impedância no plano complexo

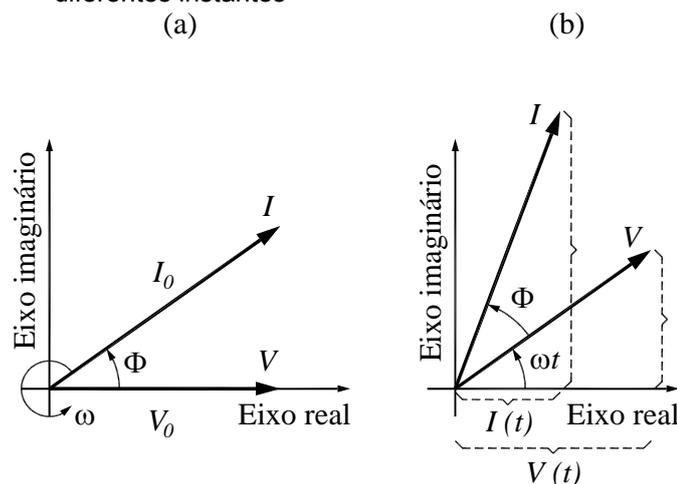


Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Na figura 13.3 está mostrada a chamada representação por fasores (vetores girantes) da tensão e da corrente em um circuito

RLC. A voltagem e a corrente são representadas por vetores que giram com velocidade angular ω mantendo uma diferença de fase φ entre si. Em qualquer instante os valores máximos da tensão ou da corrente podem ser determinados pela projeção do vetor corresponde sobre o eixo real.

Figura 13.3 - Diagramas de tensões e correntes no plano complexo, em diferentes instantes



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Como discutido anteriormente a notação complexa é bastante adequada para simplificar os cálculos na análise dos circuitos, mas para obter os valores instantâneos das grandezas é necessário tomar a parte real. Assim a corrente é obtida tomando-se a parte real da equação 4, após substituir a equação 7, o que resulta em:

$$I(t) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cos(\omega t - \varphi) \quad (11)$$

Como a tensão da fonte foi assumida igual a $V = V_o \cos(\omega t)$, nota-se claramente, a partir da equação 11, que em geral a corrente não está em fase com a tensão na fonte, sendo a diferença de fase entre elas dada por:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega L - 1/\omega C}{R}\right) \quad (12)$$

13.2 Ressonância

Uma característica importante de circuitos RLC é que eles possuem uma frequência natural de oscilação. Para compreender melhor o que isso significa, lembremos de um oscilador mecânico do tipo massa mola. Sabemos dos cursos anteriores, que quando comprimimos ou estiramos um sistema massa mola à partir do repouso e depois o liberamos este sistema oscila naturalmente com

uma frequência $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, onde k é a constante elástica da mola e m

a massa. Se não houver atrito, esta oscilação permanecerá infinitamente à custa da troca de energia entre o elemento restaurador (mola) e o de inércia (massa). Em um circuito elétrico ideal constituído por um indutor L e um capacitor C a situação é análoga. Qualitativamente, isso pode ser entendido considerando um circuito onde um capacitor inicialmente carregado é associado em série com um indutor em $t = 0$ de modo a formar um circuito fechado, figura 13.8 com $R = 0$. A carga está inicialmente no capacitor, o que quer dizer que a energia está armazenada no campo elétrico do mesmo. À medida que o tempo passa, a carga flui através do indutor

(que inicialmente se comporta como um curto-circuito) dando origem a uma corrente elétrica que faz surgir um campo magnético crescente no interior do mesmo. Assim, há uma transferência de energia entre o capacitor e o indutor. No entanto, de acordo com a lei de Faraday-Lenz, surge uma força contra-eletromotriz nos terminais do indutor que tende a se contrapor a variação da corrente, o que faz com que quando o capacitor se descarrega totalmente, a corrente passe a fluir no sentido contrário de modo a carregar o capacitor novamente, ou seja, convertendo a energia magnética armazenada no campo magnético do indutor em energia elétrica armazenada no campo elétrico do capacitor. Se não houver forma de dissipação de energia essa troca de energia entre os dois elementos permanecerá indefinidamente, analogamente a um sistema massa mola. Portanto este sistema é um oscilador elétrico e, como será mostrado adiante, possui uma frequência natural de oscilação que é dada por $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

Note que se $\omega L = 1/(\omega C)$ na equação 12, ou seja, $\omega = 1/\sqrt{LC}$, a corrente e a tensão na fonte estão em fase. Em outras palavras, quando o circuito é forçado a oscilar com a sua frequência natural a resposta (corrente) ocorre em fase com a excitação (tensão da fonte) como ocorre em qualquer oscilador forçado. Se a frequência for maior que a frequência natural, a corrente estará atrasada em relação a tensão, como acontece com indutores; por isso, diz-se que nessa situação o circuito tem comportamento indutivo. Se a frequência for menor, a corrente estará adiantada, como ocorre nos capacitores; o circuito nesse caso tem comportamento capacitivo. O comportamento capacitivo ou indutivo está relacionado ao sinal da reatância e varia de acordo com a

frequência. Na condição $\omega L = 1/(\omega C)$, diz que o sistema está em ressonância, e nessa situação o circuito tem propriedades únicas e por isso merece um estudo especial.

Os fenômenos de ressonância têm grande aplicação prática. Um exemplo são os circuitos sintonizadores de rádios, nos quais a antena capta os sinais alternados de várias rádios, em frequências diferentes. Um circuito ressonante seleciona apenas a faixa de frequências correspondente à emissora desejada. Logo, um bom rádio deve possuir um circuito ressonante altamente seletivo em termos de frequência (diz que ele deve ter alto fator de mérito ou alto fator de qualidade), para que o ruído ou as estações que emitem em frequências próximas não seja também amplificado e resulte em má qualidade do som.

Para entender a ressonância, vamos analisar a equação 11. Seu denominador é a raiz da soma de termos, um dos quais é constante e o outro depende da frequência. Há uma frequência para a qual esse termo se cancela:

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (13)$$

Como visto esta frequência é a chamada de frequência natural de oscilação do circuito RLC. Quando a frequência da excitação é igual à frequência natural, o denominador é mínimo e a corrente é máxima. Esse é o fenômeno conhecido como ressonância. Diz-se que um circuito RLC está em ressonância quando a frequência da fonte externa é igual à frequência natural de oscilação.

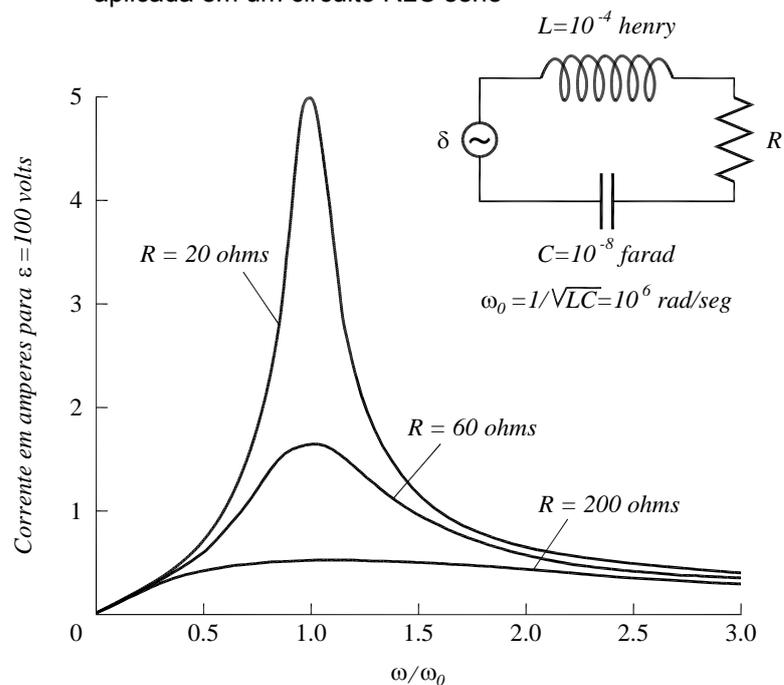
A figura 13.4 mostra três gráficos obtidos segundo a equação 11 para três valores de R , usando $L = 0,1 \text{ mH}$, $C = 10 \text{ nF}$ (o que dá $\omega_0 = 10^6 \text{ s}^{-1}$) e $V_0 = 100 \text{ V}$.

Na figura pode-se ver que há um pico em torno da frequência natural, o que quer dizer que a resposta do circuito é maior se a excitação for feita próxima dessa frequência. Quanto menor a resistência, mais alto e estreito esse pico é.

A potência dissipada em um circuito RLC pode ser escrita como:

$$P = VI = V_0 I_0 \cos(\omega t - \varphi) \cos(\omega t) \quad (14)$$

Figura 13.4 - Uma tensão elétrica com $V_0 = 100 \text{ volts}$ e frequência variável aplicada em um circuito RLC série



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

A potência média dissipada é dada por:

$$P_{med} = \frac{1}{T} \int_0^T V_0 I_0 \cos(\omega t - \varphi) \cos(\omega t) dt = \frac{1}{2} V_0 I_0 \cos \varphi \quad (15)$$

A potência média depende da diferença de fase entre a corrente e a tensão. O fator $\cos \varphi$ é usualmente chamado *fator de potência*. A potência média é máxima na ressonância ($\omega = \omega_0$), onde o fator de potência vale 1. Em termos de V_0 , R , L e C , a potência média dissipada é:

$$P_{med} = \frac{1}{2} \frac{V_0^2 R}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \quad (16)$$

Substituindo $\omega = \omega_0$ nas equações 9, 10, 11, 12 e 16, podemos perceber algumas características de um circuito RLC em ressonância:

- I. A impedância é mínima, e vale $Z(\omega_0) = R$.
- II. A reatância é nula: $X(\omega_0) = 0$. Isto é, a associação em série de L e C é equivalente a um curto-circuito.
- III. A corrente do circuito é máxima e sua amplitude vale $I(\omega_0) = V_0 / R$.
- IV. A corrente está em fase com a tensão da fonte ($\varphi(\omega_0) = 0$)
- V. A potência média dissipada no circuito é máxima, e vale $P(\omega_0) = V_0^2 / 2R$.

A largura de banda da ressonância é definida como o intervalo de frequência dentro do qual a potência $P(\omega)$ é maior ou igual a metade do valor máximo. Em outras palavras, é igual a largura a meia altura da curva de $P(\omega)$ como função de ω . Em radianos / s esta largura é igual a:

$$\Delta\omega = R/L \quad (17)$$

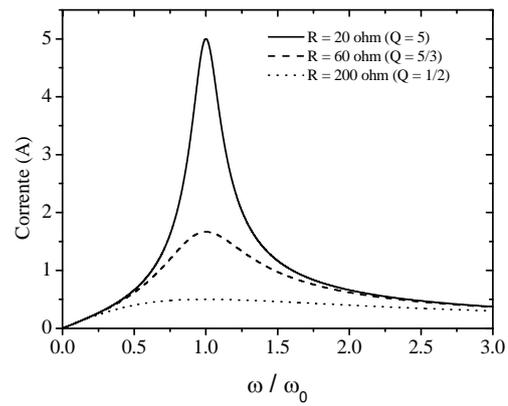
O fator de mérito (ou fator de qualidade), Q , do circuito ressonante caracteriza o qual estreito é a curva $P(\omega)$ por ω e é definido como:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \quad (18)$$

O fator de mérito é inversamente proporcional à largura de banda. Circuitos com alto fator de mérito possuem uma banda estreita, o que é altamente desejável. Para conseguir isso, a resistência do circuito deve ser pequena. Na figura 13.5, as curvas correspondem a $Q = 5$, $Q = 5/3$ e $Q = 1/2$.

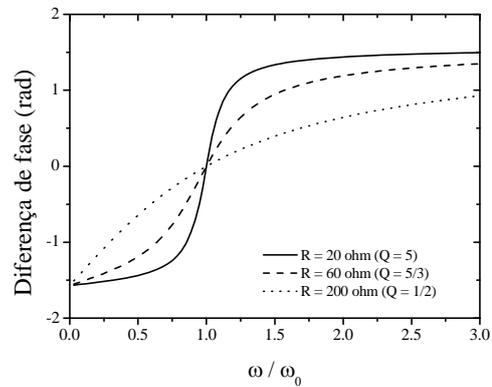
As figuras a seguir mostram a corrente (figura 13.5), a fase entre a corrente e a tensão (figura 13.6) e a potência dissipada (figura 13.7) em um circuito RLC para alguns valores do fator de mérito. Os valores da tensão na fonte, da capacitância e da indutância são idênticos ao usados na figura 13.4 ($V_0 = 100$ V, $L = 0,1$ mH e $C = 10$ nF).

Figura 13.5 - Corrente em um circuito RLC série



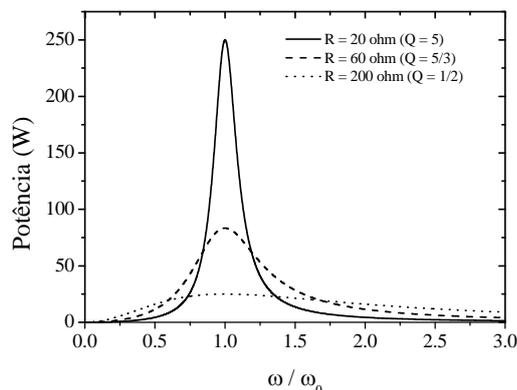
Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Figura 13.6 - Diferença de fase entre a tensão na fonte e a corrente em um circuito RLC série



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Figura 13.7 - Potência média dissipada em um circuito RLC série



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

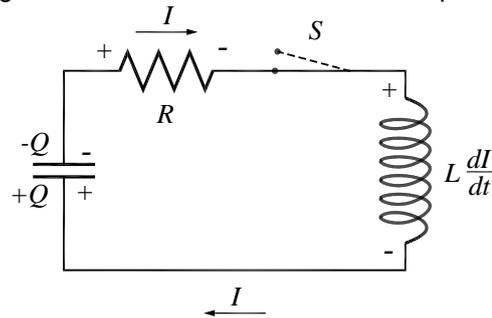
Um caso limite é quando a resistência vai a zero: a corrente e a potência dissipada tendem a infinito na ressonância. Na prática, isso não ocorre porque os fios e a própria bobina possuem resistência e limitam a corrente do circuito.

13.3 Análise do comportamento transiente

Até agora analisamos o comportamento dos circuitos RLC em regime estacionário. No entanto, como todo oscilador, assim que a excitação é ligada ou desligada, existe uma resposta transiente do circuito e é essa resposta que desejamos analisar nesta sessão.

Na figura 13.8 mostramos um circuito RLC sem fonte, mas com o capacitor carregado com carga Q_0 . No instante $t = 0$ a chave S é ligada e a energia elétrica armazenada no capacitor começa a ser transferida para o indutor em forma de energia magnética, enquanto parte desta energia é dissipada no resistor R.

Figura 13.8 - Diagramas de um circuito RLC com o capacitor carregado



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Com a chave S ligada, podemos aplicar a lei das malhas de Kirchhoff a esse circuito:

$$L \frac{dI}{dt} + R.I + \frac{Q}{C} = 0 \quad (19)$$

Mas $I = dQ/dt$. Logo:

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \quad (20)$$

No circuito RLC, a tendência é que a energia fique oscilando entre o capacitor e o indutor, sendo progressivamente dissipada no resistor. Assim, podemos supor que a carga no capacitor pode ser expressa por uma oscilação amortecida:

$$Q = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \alpha) \quad (21)$$

O fator exponencial descreve o amortecimento, e o parâmetro γ é chamado de constante de decaimento. O termo de cosseno é responsável pelas oscilações, que ocorrem em uma frequência ω_1 ,

não necessariamente igual a ω_0 ; o fator de fase α aparece para permitir o ajuste às condições iniciais.

Para facilitar os cálculos, vamos utilizar a notação complexa:

$$Q = Ae^{pt} \quad (22)$$

Agora substituimos a equação 22 na equação 20:

$$p^2L + pR + \frac{1}{C} = 0 \quad (23)$$

Temos uma equação algébrica de segundo grau para p , cujas soluções são:

$$p_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (24a)$$

$$p_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (24b)$$

Se o radicando for negativo, podemos escrever:

$$p_1 = -\frac{R}{2L} - i\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \quad (25a)$$

$$p_2 = -\frac{R}{2L} - i\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \quad (25b)$$

A solução geral é a combinação linear das duas soluções independentes:

$$Q = Ae^{-\left(\frac{R}{2L}\right)t} \left(Be^{i\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}t} + Ce^{-i\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}t} \right) \quad (26)$$

A parte real da equação 26 é:

$$Q = Ae^{-\left(\frac{R}{2L}\right)t} \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}t + \alpha\right) \quad (27)$$

Comparando com a equação 21, podemos identificar os parâmetros γ e ω_1 :

$$\gamma = \frac{R}{2L} \quad (28a)$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2} \quad (28b)$$

A constante de decaimento γ é proporcional a resistência, o que era esperado, porque a resistência é o elemento que dissipa energia. A frequência de oscilação ω_1 é menor do que a frequência natural ω_o .

Para determinar a corrente, é preciso derivar a equação 21:

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = -\omega_o Ae^{-\gamma t} \sin\left(\omega_1 t + \alpha - \arctan\left(\frac{\gamma}{\omega_1}\right)\right) \quad (29)$$

Agora que podemos determinar γ e ω_1 , resta o trabalho de adequar a solução (equações 21 e 29) com as condições iniciais através das variáveis A e α . As condições iniciais são:

$$Q(t=0) = Q_o \quad (30a)$$

$$I(t=0) = 0 \quad (30b)$$

Substituindo nas equações 21 e 29, calculamos A e δ :

$$A = \frac{Q_o}{\cos(\arctan(\gamma / \omega_1))} = Q_o \frac{\omega_o}{\omega_1} \quad (31a)$$

$$\alpha = -\arctan\left(\frac{\gamma}{\omega_1}\right) \quad (31b)$$

Para uma resistência pequena ($R \ll \sqrt{L/C}$), podemos considerar que a carga e a corrente oscilaram com frequência angular muito próxima a frequência natural do circuito (isso equivale a fazer $\omega_1 \approx \omega_o$).

As oscilações amortecidas só ocorrem se sua frequência (ω_1) for real. Da equação 28b, vemos que isso acontece se $\gamma < \omega_o$ (que corresponde a $R < 2\sqrt{L/C}$). Essa situação é chamada de *regime sub-amortecido*, ou *amortecimento sub-crítico*.

O caso em que $\gamma > \omega_o$ (que corresponde a $R > 2\sqrt{L/C}$) é chamado de *regime super-amortecido*, ou de *amortecimento super-crítico*. As soluções para p são reais e diferentes:

$$p_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2} \quad (32a)$$

$$p_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2} \quad (32b)$$

Ambos os valores são negativos, portanto a solução geral é uma soma de dois decaimentos exponenciais a taxas diferentes:

$$Q = Ae^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2})t} + Be^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2})t} \quad (33)$$

Finalmente, o caso em que $\gamma = \omega_o$ (que corresponde a $R = 2\sqrt{L/C}$) é chamado de *regime criticamente amortecido*, ou de *amortecimento crítico*. As duas soluções para p são iguais:

$$p_{1,2} = -\gamma \quad (34)$$

Nesse caso, a outra solução independente é:

$$Q = te^{-\gamma t} \quad (35)$$

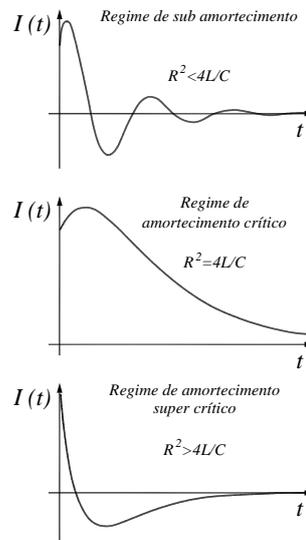
A solução geral é portanto:

$$Q = (a + bt)e^{-\gamma t} \quad (36)$$

A figura 13.9 mostra o comportamento típico da corrente como função do tempo é mostrado para os diferentes regimes de amortecimento (sub-crítico, crítico e super-crítico).

No amortecimento sub-crítico, a corrente realiza algumas oscilações antes de alcançar a situação de equilíbrio, enquanto nos amortecimentos crítico e super-crítico há um decaimento exponencial da corrente. A situação em que a corrente decai mais rapidamente é no amortecimento crítico; nesse caso, aumentar o fator de amortecimento *umenta* o tempo necessário para atingir o equilíbrio.

Figura 13.9 - Comportamento da corrente em um circuito RLC série nos diferentes regimes de amortecimento



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

13.4 Solução geral do circuito RLC

A solução geral do circuito RLC na presença de uma fonte de tensão alternada é composta por dois termos: o primeiro é a solução estacionária (equação 11), e o segundo termo é a solução transiente (que depende do tipo de amortecimento). O termo estacionário é uma oscilação de amplitude constante, enquanto o termo transiente é uma oscilação que decai com o tempo. Assim, depois de um certo tempo (que pode ser bastante rápido), o termo transiente se torna desprezível frente ao termo estacionário.

13.5 Analogia eletro-mecânica

As equações que governam o circuito RLC são completamente análogas às que governam osciladores mecânicos (sistema massa-mola) quando há atrito viscoso (proporcional à velocidade). O sistema massa-mola também apresenta as propriedades de ressonância e os três tipos de comportamento transiente observados no circuito RLC. Assim podemos fazer uma analogia entre circuitos elétricos e sistemas mecânicos:

Tabela 13.1-Parâmetros em sistemas mecânicos e circuitos elétricos

Parâmetros Mecânicos	Parâmetros Elétricos
Deslocamento, x	Carga, q
Velocidade, $v = \frac{dx}{dt}$	Corrente, $i = \frac{dq}{dt}$
Aceleração, $a = \frac{d^2x}{dt^2}$	Variação da corrente, $\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$
Massa, m	Indutância, L
Constante elástica da mola, k	Inverso da capacitância, $1/C$
Coefficiente de atrito, b	Resistência, R
Força de atrito, $-b \frac{dx}{dt}$	Queda de tensão, $-Ri = -R \frac{dq}{dt}$

Fonte: Elaborada pelos compiladores.

13.6 Experimentos

A seguir são propostos experimentos passíveis de serem realizados no contexto deste tópico. Fica a critério de cada docente a definição de quais itens realizar.

Em todos os experimentos realizados, os valores encontrados experimentalmente deverão ser comparados com valores tabelados ou especificados pelos fabricantes dos componentes.

Sempre que surgir uma dúvida quanto à utilização de um instrumento, consulte o professor para esclarecimentos.

Atenção: Para quantificar o comportamento instantâneo de tensões e correntes que variam no tempo, utilizaremos um osciloscópio. Preste muita atenção na ligação do osciloscópio para que os cabos “terra” do mesmo estejam sempre ligados no mesmo ponto do circuito.

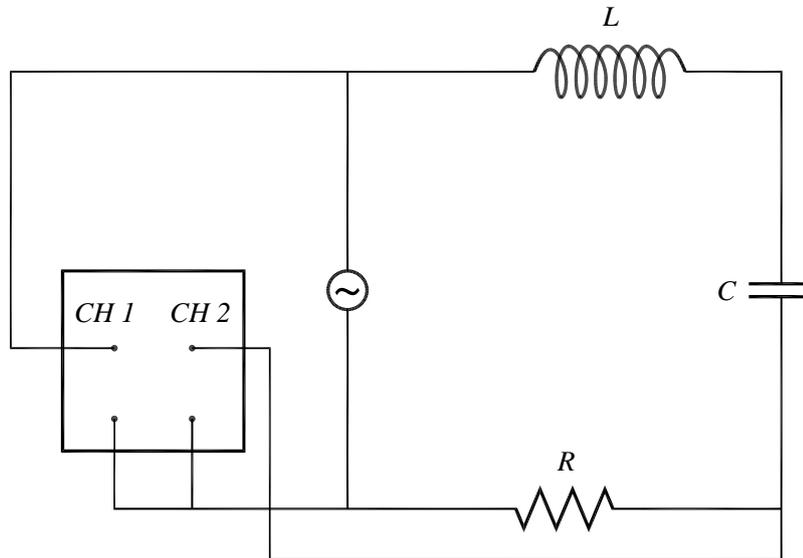
13.6.1 Circuito RLC-solução estacionária

Nesta parte da prática analisaremos o comportamento dos circuitos RLC em regime estacionário. Verificaremos a validade das leis de Kirchoff em corrente alternada e mediremos a diferença de fase em tensão e corrente de acordo com os elementos do circuito.

e) Monte o circuito RLC mostrado na figura 13.10 utilizando $L = 44 \text{ mH}$ (bobina disponível na bancada sem o núcleo de ferro),

$C = 0.1 \mu\text{F}$ e $R = 1 \text{ k}\Omega$ e aplique uma tensão senoidal de cerca de 10 V e frequência de cerca de 1 kHz.

Figura 13.10 - Circuito RLC



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

f) Meça a tensão total aplicada e a tensão em todos os elementos do circuito com um osciloscópio e com um multímetro. Meça também a frequência usando o osciloscópio. A configuração sugerida é a seguinte: visualização de ambos os canais (em modo Alt), com canal 2 invertido, escala vertical em 5 V/div e base de tempo em 0,2 ms/div, com acoplamento DC para ambos os canais e trigger no modo Auto. Se o sinal medido em algum canal for pequeno você poderá aumentar sensibilidade da escala vertical. Na figura 13.10, o canal 1 está medindo a tensão total na fonte, e o canal 2

está medindo a tensão sobre o resistor. Para medir a tensão no capacitor e no indutor, troque-os de posição com o resistor.

g) Utilizando os valores dos componentes calcule o módulo das tensões nos terminais de cada elemento do circuito, e compare com os valores medidos. Discuta a validade da lei de Kirchhoff para as tensões para circuitos de corrente alternada.

h) Utilizando dois canais do osciloscópio meça a diferença de fase entre a tensão nos terminais do resistor, do indutor e do capacitor em relação à tensão total do circuito. Se necessário, diminua a base de tempo para ter maior precisão. Esse resultado é consistente com a equação 15?

i) Faça um diagrama mostrando todas as tensões no plano complexo.

Tabela 13.2 - Tensões em um circuito RLC série (solução estacionária)

	Total	Resistor	Capacitor	Indutor
Tensão pico-a-pico (osciloscópio)				
Tensão rms (multímetro)				
Fase				
Tensão esperada				
Fase esperada				

13.6.2 Circuito RLC-ressonância

Nesta parte da prática estudaremos o fenômeno da ressonância em circuitos RLC. O objetivo principal é avaliar a resposta do circuito (amplitude e fase da corrente) como função da frequência e da resistência R do circuito.

a) No circuito RLC da figura 13.10 utilize $L = 44 \text{ mH}$, $C = 0,22 \mu\text{F}$ e $R = 10 \Omega$. Ajuste a tensão do gerador de funções para uma onda senoidal com tensão de pico a pico fornecido ao circuito de 5V para a frequência $\omega/2\pi = 400\text{Hz}$.

b) Utilizando os dois canais do osciloscópio, meça o valor da tensão no gerador (V_o) e na resistência (V_R), em função da frequência. Faça um gráfico de V_R / V_o em função da frequência. A configuração sugerida para o osciloscópio é: visualização de ambos os canais (em modo Alt e com canal 2 normal), acoplamento DC em ambos os canais, *trigger* em modo *Auto*. **Obs:** Este gráfico deve ser feito durante a aquisição dos dados para que você possa espaçar os pontos adequadamente, concentrando-os na região da frequência de ressonância. Além disso, mantenha o “terra” dos dois canais do osciloscópio no mesmo ponto do circuito, por exemplo entre a fonte e o resistor como mostrado na figura 13.10.

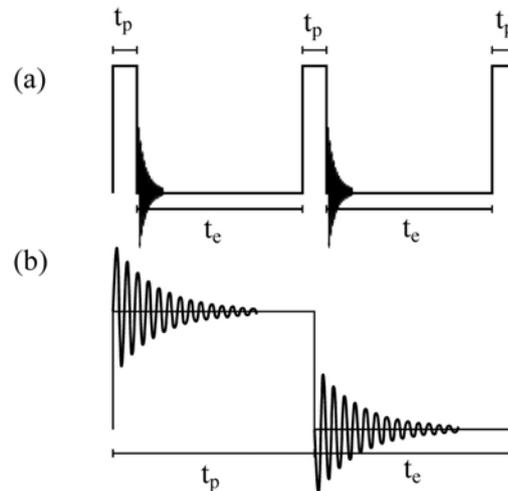
c) Faça o mesmo substituindo o resistor por um de 100Ω .

d) Determine o valor da frequência de ressonância do circuito. Verifique se na condição de ressonância ocorre $V_L = V_C$, $V_o = V_R$, e $\varphi = 0$.

e) Nesse circuito, insira o núcleo de ferro no interior do indutor. No modo xy encontre a frequência de ressonância ω_0 do

- a) No circuito RLC série da figura 13.10 utilize $L = 10 \text{ mH}$, $C = 47 \text{ nF}$ e $R = 47 \Omega$. Com esses valores, qual é o tipo de amortecimento esperado?
- b) Ajuste o gerador de sinais para obter uma onda quadrada com as características mostradas na figura 13.11a (o sinal do gerador de sinais será mostrado no canal 1)
- c) Como mostrado na figura 13.10, o canal 2 do osciloscópio mede a tensão nos terminais do resistor (V_R), que é diretamente proporcional ao valor da corrente no circuito. A configuração sugerida para o osciloscópio é: apenas canal 2, $0,2 \text{ V/div}$, acoplamento DC, *trigger* Auto com *Source* no canal 2.
- d) Ajuste a escala de tempo do osciloscópio para $0,2 \text{ ms/div}$, de modo a visualizar o sinal transiente parecido com o mostrado na figura 13.11b.
- e) Calcule a partir dessa curva o período e a frequência de oscilação.

Figura 13.11 - Formas de onda para a excitação e a resposta transiente do circuito RLC. Sugere-se que o pulso tenha uma largura $t_p \sim 15\text{ms}$ e que o tempo entre pulsos $t_e \sim 80\text{ms}$



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

f) Coloque o canal 2 em GND (terra) e ajuste a posição do sinal para ficar em cima da linha central do osciloscópio.

g) Coloque o canal 2 em acoplamento AC. Meça a frequência de oscilação e a amplitude de cada pico e cada vale com relação ao terra. A partir desses dados, calcule a constante de decaimento γ do sinal. Descreva qual o tipo de regime transiente observado: sub amortecido, criticamente amortecido ou super amortecido.

h) Repita o item g) para $L = 44\text{ mH}$.

i) Coloque o núcleo de ferro no interior do indutor. Repita as medidas efetuadas no item g). Calcule a constante de decaimento γ do sinal e a partir dela determine a auto - indutância do indutor com o núcleo de ferro inserido. Compare o valor obtido com o valor obtido

no item 2-e). Descreva também qual o tipo de regime transiente observado e se esse concorda com o previsto por seus cálculos.

j) Compare os valores de decaimento do sinal obtidos nos itens g), h) e i), descrevendo o que acontece com a curva à medida que se varia a indutância do circuito.

k) Substitua o capacitor por um de capacitância de aproximadamente $6.6 \mu\text{F}$ e utilize $L = 44 \text{ mH}$. Descreva o que acontece com a curva de decaimento. O fenômeno observado condiz com seus cálculos?

l) Peça ao seu professor um conjunto de resistores distintos e adicione ao circuito de modo a obter amortecimento crítico e super crítico. Faça um esquema em escala das formas de onda nos diferentes regimes.

Tabela 13.4 - Transiente RLC-indutor com núcleo de ar ($L = 10 \text{ mH}$, $C = 47 \text{ nF}$: item g)

Pico	Tensão	Pico	Tensão
$T =$		$\omega_o =$	
$\gamma =$			

Tabela 13.5 - Transiente RLC-indutor com núcleo de ar ($L = 44$ mH, $C = 47$ nF: item h)

Pico	Tensão	Pico	Tensão
$T =$		$\omega_o =$	
$\gamma =$			

Tabela 13.6 - Transiente RLC-indutor com núcleo de ferro ($C = 47$ nF: item i)

Pico	Tensão	Pico	Tensão
$T =$		$\omega_o =$	
$\gamma =$		$L =$	

Tabela 13.7 - Transiente RLC-indutor com núcleo de ar ($L = 44$ mH, $C = 6.6$ μ F: item k)

Pico	Tensão	Pico	Tensão
$T =$		$\omega_o =$	
$\gamma =$			

Bibliografia

HALLIDAY, D.; RESNICK, R. **Física III**. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1974.

NUSSENZVEIG, H.M. **Curso de física básica**: eletricidade e magnetismo. São Paulo: Edgard Blucher, 1998. v.3.

TIPPLER, P.A. **Física**: para cientistas e engenheiros. 3. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 1991. v. 3.

YOUNG, H. D.; FREEDMANN, R. A. **Sears e Zemanski física III**: eletricidade e magnetismo. São Paulo: Pearson, c2004.