

Experiências 5 e 6 - Técnicas de projeto de controladores PID

1 Introdução

Existem duas abordagens para projetar controladores que serão implementados através de um computador digital. A primeira consiste em projetar o controlador em tempo contínuo, depois discretiza-lo, usando algum método de integração numérica de equações diferenciais, para permitir a sua implementação em um computador. A segunda consiste em projetar o controlador diretamente em tempo discreto usando o modelo em tempo discreto do sistema a ser controlado. O segundo método em geral é mais eficiente, pois dispensa a discretização do controlador, que consiste em uma aproximação numérica, além do que sistemas em tempo discreto são mais gerais do que sistemas em tempo contínuo. Em tempo discreto existem sistemas com dinâmicas que não são possíveis em tempo contínuo, como por exemplo, sistemas com tempo de resposta igual a zero ou sistemas de 1ª ordem oscilatórios.

Na Seção 2 é apresentada uma breve introdução sobre controladores tipo PID em tempo contínuo e em tempo discreto. Na Seção 4 são apresentadas duas técnicas de projeto de controladores em tempo contínuo e na Seção 5 são apresentadas as técnicas equivalentes de projeto de controladores em tempo discreto. Na Seção 6 são apresentadas algumas considerações práticas sobre implementação e funcionamento de controladores tipo PID.

2 Controladores PID

2.1 Controlador PID em tempo contínuo

A equação tradicional que representa um controlador tipo PID no domínio do tempo contínuo é dada por:

$$u(t) = K \left(e(t) + \frac{1}{T} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{e(t)}{dt} \right), \quad (1)$$

onde u é a variável de controle, e é o erro de controle ($e = r - y$). A variável de controle u é portanto a soma de três termos: O termo P (que é proporcional ao erro), o termo I (que é proporcional à integral do erro) e o termo D (que é proporcional à derivada do erro). Os parâmetros do controlador são proporcionais ao ganho K , à constante de tempo integral T_i e à constante de tempo derivativa T_d .

Ação Proporcional

No caso de uma ação de controle puramente proporcional, a Equação 1 de controle se reduz a:

$$u(t) = Ke(t) + u_b \quad (2)$$

A ação de controle é simplesmente proporcional ao erro de controle e . A variável u_b é um *offset* ou um *reset*. Quando o erro de controle e é zero, a variável de controle assume o valor $u(t) = u_b$. O *offset* u_b é frequentemente escolhido como $(u_{max} + u_{min})/2$, mas pode ser algumas vezes ajustado manualmente tal que o erro estacionário de controle seja zero para um determinado valor de referência.

Análise estática Muitas propriedades do controle proporcional podem ser entendidas através do seguinte argumento baseado apenas em considerações estáticas. Considere a malha de realimentação, ilustrada na Figura 1, que é composta de um processo e um controlador. Assuma que o controlador tem ação proporcional e que o processo é modelado através do modelo estático:

$$x = K_p(u + l) \quad (3)$$

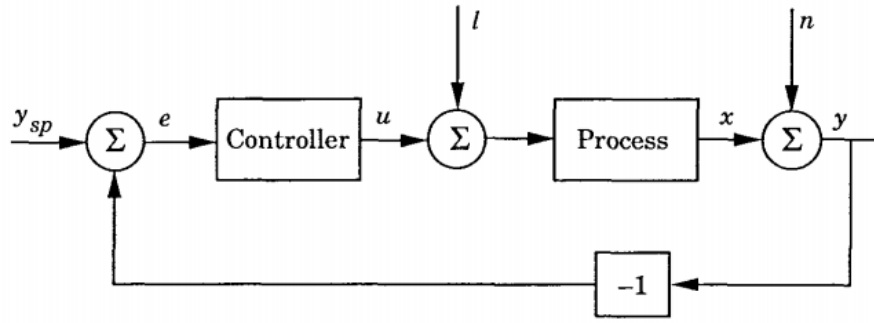


Figura 1: Sistema de controle em malha fechada

onde x é a variável de processo, u é a variável de controle, l é um distúrbio de carga e K_p é o ganho estático do processo. As seguintes equações podem ser obtidas do diagrama de blocos:

$$y = x + n \quad (4)$$

$$y = K_p(u + l) \quad (5)$$

$$u = K(r - y) + u_b \quad (6)$$

onde n é um ruído inserido no processo durante a medição da variável de saída. A partir destas equações, é possível estabelecer relações entre a variável de processo x , o valor de referência r , o distúrbio de carga l , e o ruído de medida n :

$$x = \frac{KK_p}{1 + KK_p}(r - n) + \frac{K}{KK_p}(1 + u_b) \quad (7)$$

O produto KK_p é um número adimensional denominado Ganho de Malha. Muitas propriedades interessantes podem ser deduzidas a partir da Equação 7:

- Inicialmente assuma que n e u_b são zero. Então o ganho de malha deve ser grande para que o valor da variável de saída x fique próximo ao valor de referência r ;
- Um ganho de malha grande também permite que o sistema se torne insensível ao distúrbio de torque l .
- Entretanto, se o ruído de medida n for diferente de zero, ele pode influenciar o valor da saída do processo da mesma maneira que o valor de referência r ;
- Para evitar que o sistema seja sensível ao ruído de medida n , o ganho de malha não pode ser escolhido muito grande.
- Além disso, o *offset* do controlador u_b influencia o sistema da mesma forma que um distúrbio de torque.

Dessa forma, o projeto do controlador é uma solução de compromisso entre diferentes objetivos de controle, e não existe uma resposta simples para qual o valor mais adequado para o ganho de malha. Isto irá depender de qual objetivo de controle é escolhido como mais importante.

Também pode ser determinado pela Equação 7, que normalmente haverá um erro estacionário ($e \neq 0$ para $t \rightarrow +\infty$) com a adoção de controle proporcional. Isto pode ser deduzido intuitivamente observando a Equação 7 que o erro de controle é zero apenas quando $u = u_b$ em regime estacionário. O erro, portanto, pode ser feito zero apenas para um determinado ponto de operação através de uma escolha adequada para o *offset*, u_b , ou quando $u_b = 0$.

A análise estática apresentada acima é baseada no fato de que o processo pode ser descrito por um modelo estático. Isto deixa de fora várias propriedades importantes da dinâmica de malha fechada do sistema. A mais importante é que o sistema será normalmente instável para ganhos de malha grandes. Na prática, o ganho de malha máximo é determinado através da consideração das características dinâmicas do processo.

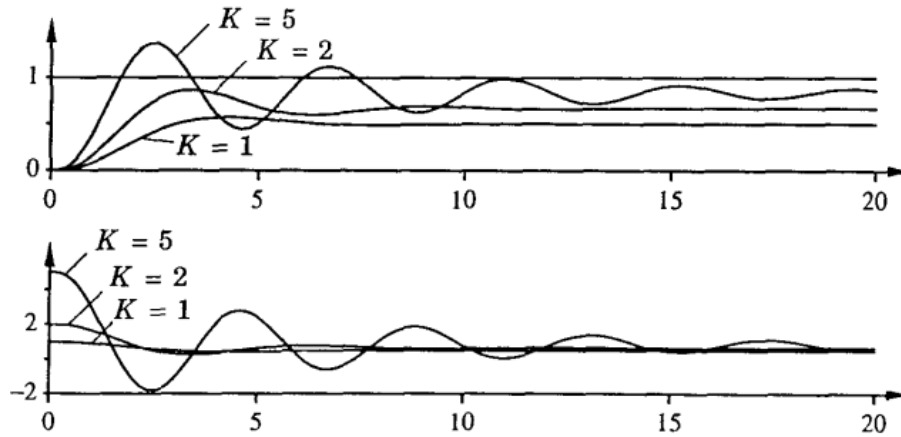


Figura 2: Simulação de um sistema de controle em malha fechada com controle proporcional. (a) sinal de referência saída do sistema; (b) entrada do sistema.

Um exemplo típico de controle proporcional está ilustrado na Figura 2 para um processo de função de transferência $G(s) = 1/(s+1)^3$. A figura mostra o comportamento da saída do processo y e o sinal de controle u após uma mudança no valor de referência na forma de degrau unitário. O termo de *offset* u_b , o distúrbio de carga l e o ruído de medida n são todos zeros para as simulações. Com um ganho do controlador $K = 1.0$ e o ganho estático do processo $K_p = 1.0$, o erro é portanto 50%. A figura mostra que o erro estacionário, e , diminui com o aumento do ganho do controlador. Note também que a resposta se torna mais oscilatória com o aumento do ganho do controlador.

Ação Integral

A função principal da ação integral é assegurar que a saída do processo y atinja o mesmo valor que o valor de referência r em regime estacionário. Com um controle proporcional normalmente existe um erro de regime estacionário diferente de zero. Com uma ação integral, um erro positivo vai sempre levar a um aumento do sinal de controle, e um erro negativo vai sempre levar a uma diminuição do sinal de controle independente do tamanho do erro.

Os seguintes argumentos mostram que o erro estacionário será sempre zero com a ação de controle integral. Assuma que o sistema esteja em regime estacionário com uma ação de controle u_0 e um erro constante e_0 . Segue da Equação 1 que o sinal de controle é dado por:

$$u_0 = K \left(e_0 + \frac{e_0}{T_i} t \right) \quad (8)$$

Desde que $e_0 \neq 0$, isto claramente mostra que o sinal de controle u_0 não pode ser constante. Um controlador com ação integral vai sempre fornecer um erro estacionário nulo.

As propriedades da ação de controle integral estão ilustradas na Figura 3, que ilustra a simulação de um processo de função de transferência $G(s) = 1/(s+1)^3$ com controlador PI. O Ganho proporcional K é igual a 1.0 em todas as curvas, e o tempo integral é mudado. O caso $T_i = \infty$ corresponde a um controlador proporcional puro. Este caso é idêntico ao caso $K = 1.0$ na Figura 2, onde o erro estacionário é de 50%. O erro estacionário é removido com valores finitos de T_i . Para valores grandes de tempo de integração, a resposta do sistema vai vagarosamente em direção ao valor de referência. O processo é aproximadamente exponencial com constante de tempo T_i/KK_p . O processo é mais rápido para valores menores de T_i e é também mais oscilatório.

Ação Derivativa

A proposta da ação derivativa é o aumento da estabilidade da malha fechada. A razão de uma possível instabilidade pode ser descrita intuitivamente como se segue. Devido à dinâmica do processo, levará algum tempo

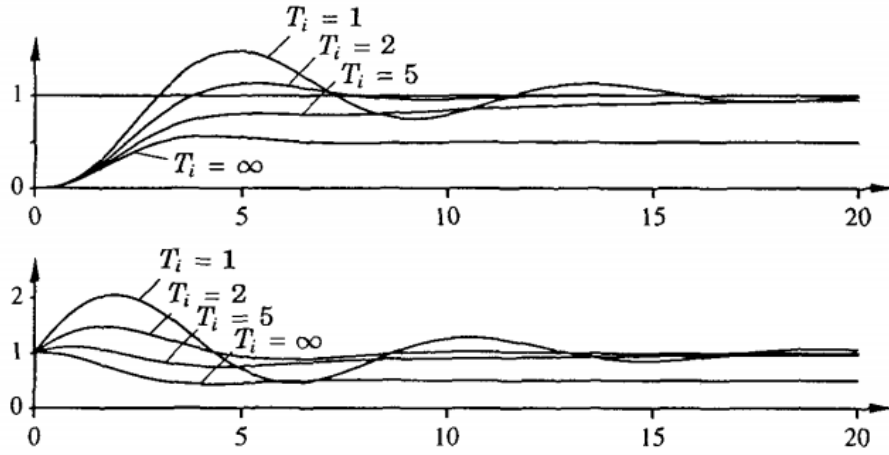


Figura 3: Simulação de um sistema de controle em malha fechada com controlador PI. (a) sinal de referência e saída do sistema; (b) entrada do sistema.

até que o efeito da mudança na variável de controle u seja notado na saída do processo y . Portanto, o sistema de controle passará a agir tardiamente para uma correção de erro. A ação de um controlador com uma ação de controle proporcional e derivativa pode ser interpretada como proporcional à saída predita do processo, onde a predição é feita extrapolando o erro através da tangente à curva de erro. A estrutura básica de um controlador PD é dada por:

$$u(t) = K \left(e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (9)$$

A expansão em Série de Taylor de $e(t + T_d)$ fornece:

$$e(t + T_d) \cong e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} \quad (10)$$

A ação de controle é portanto proporcional à estimativa do erro de controle no tempo $t + T_d$, onde esta estimativa é obtida através de extrapolação linear.

As propriedades da ação de controle derivativa estão ilustradas na Figura 4, que mostra a simulação de um sistema de malha fechada com um processo de função de transferência $G(s) = 1/(1 + s)^3$ e um controlador PID. O ganho do controlador e o tempo de integração são mantidos constantes, $K = 3$ e $T_i = 2$, e o tempo derivativo T_d é mudado. Para $T_d = 0$ tem-se um controlador PI puro. O sistema de malha fechada é oscilatório para os parâmetros escolhidos. Inicialmente, o amortecimento aumenta com o aumento do tempo derivativo, mas diminui novamente quando o tempo derivativo se torna bastante grande.

3 Controlador PID em tempo discreto

Um controlador PID digital pode ser definido pela seguinte função de transferência em z :

$$U(z) = K \left(1 + \frac{T_a}{T_i} \frac{1}{z-1} + \frac{T_d}{T_a} \frac{z-1}{z-\alpha} \right) E(z) \quad (11)$$

onde T_a é o período de amostragem e α é um polo introduzido na parte derivativa para tornar este termo causal e evitar a amplificação de ruídos pelo processo de derivação.

A operação e funcionamento de um controlador PID digital segue os mesmos princípios de um controlador PID em tempo contínuo, como foi discutido no item anterior.

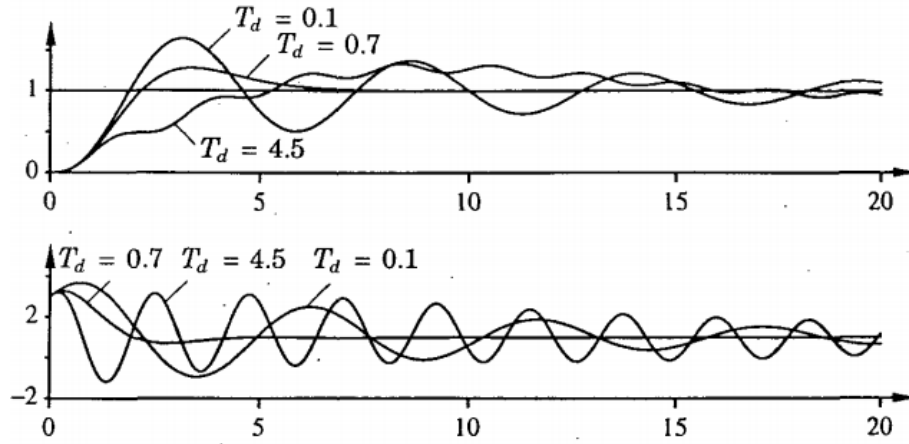


Figura 4: Simulação de um sistema de controle em malha fechada com controlador PID. (a) sinal de referência e saída do sistema; (b) entrada do sistema.

Em geral os controladores tipo PID digitais são obtidos através de aproximações numéricas dos controladores PID em tempo contínuo. Os métodos mais utilizados são diferenças para frente, diferenças para trás, casamento de polos e zeros etc. Assim, para cada método de integração numérica utilizado para aproximar a Equação 1 do PID em tempo contínuo, obtém-se um controlador digital diferente. Observa-se que ao obter o controlador digital a partir do contínuo, o controlador digital mantém a relação entre os seus tempos integrativos e derivativos com os do controlador PID em tempo contínuo equivalente.

Calculando o mínimo múltiplo comum e rearranjando de forma a colocar todos os termos em potências de z negativas, a Equação 11 fica:

$$U(z) = K \left[\frac{\left(1 + \frac{T_d}{T_a}\right) + \left(\frac{T_a}{T_i} - 1 - \alpha - 2\frac{T_d}{T_a}\right)Z^{-1} + \left(\alpha + \frac{T_a}{T_i}\alpha + \frac{T_d}{T_a}\right)Z^{-2}}{1 - (1 + \alpha)Z^{-1} + \alpha Z^{-2}} \right] \quad (12)$$

A Equação de diferenças correspondente a este controlador PID é dada pela seguinte expressão:

$$u(k) = a_1 u(k-1) + a_0 u(k-2) + Kb_2 e(k) + Kb_1 e(k-1) + Kb_0 e(k-1) \quad (13)$$

onde os coeficientes a_1 , a_0 , b_2 , b_1 e b_0 são dados por:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 + \alpha \\ a_0 &= -\alpha \\ b_2 &= 1 + \frac{T_d}{T_a} \\ b_1 &= \frac{T_a}{T_i} - 1 - \alpha + 2\frac{T_d}{T_a} \\ b_0 &= \alpha - \frac{T_a}{T_i}\alpha + \frac{T_d}{T_a} \end{aligned} \quad (14)$$

Controlador PI

No caso de se ter somente os termos proporcionais e integrais, ou seja, um controlador PI, a função de transferência torna-se a seguinte:

$$U(z) = K \left[\frac{1 + \left(\frac{T_a}{T_i} - 1\right)Z^{-1}}{1 - Z^{-1}} \right] \quad (15)$$

cujas equações de diferenças serão dadas por:

$$u(k) = u(k-1) + ke(k) + kb_1e(k-1) \quad (16)$$

com b_1 sendo dado por: $b_1 = \frac{T_d}{T_i} - 1$.

Observa-se que o polo deste controlador é localizado em $z = 1$ e o zero em $z = -b_1$.

Controlador PD

No caso de existir somente os termos proporcionais e derivativos, ou seja, um controlador PD, a função de transferência se torna a seguinte:

$$U(z) = K \left[\frac{\left(1 + \frac{T_d}{T_a}\right) - \left(\alpha - \frac{T_d}{T_a}\right)z^{-1}}{1} \right] E(z) \quad (17)$$

A equação de diferenças será dada por:

$$u(k) = \alpha u(k-1) + kb_2e(k) + kb_1e(k-1) \quad (18)$$

com b_2 sendo dado por: $b_2 = 1 + \frac{T_d}{T_a}$ e b_1 por: $b_1 = \frac{T_d}{T_i} - 1$. O polo do controlador PD é localizado em $z = \alpha$ e o zero em $z = b_1/b_2$.

Nota-se que não é necessário manter qualquer relação entre os termos derivativos e integrativos entre o controlador digital e um controlador equivalente em tempo contínuo. Assim, um controlador PID digital pode ser simplesmente definido por uma função de transferência do seguinte tipo:

$$U(z) = K \left(1 + \beta \frac{1}{z-1} + \lambda \frac{z-1}{z-\alpha} \right) E(z) \quad (19)$$

onde β e λ são constantes do controlador a serem definidas durante o projeto. Rearranjando esta equação, tem-se:

$$U(z) = K \left[\frac{(1+\lambda)z^2 + (\beta - 2\lambda - 1 - \alpha)z + (\alpha - \beta\alpha + \lambda)}{z^2 - (1-\alpha)z + \alpha} \right] E(z) \quad (20)$$

Nota-se que o controlador PID digital tem dois polos, um localizado em $z = \alpha$ e outro em $z = 1$, e dois zeros localizados em:

$$z = -\frac{\beta - 2\lambda - 1 - \alpha}{2(1+\lambda)} \pm \frac{1}{2(1+\lambda)} \sqrt{(\beta - 2\lambda - 1 - \alpha)^2 - 4(1+\lambda)(\alpha - \beta\alpha + \lambda)} \quad (21)$$

4 Técnicas de projeto de controladores PID em tempo contínuo

4.1 polos dominantes

Qualquer sistema de ordem n pode ser considerado como sendo composto por subsistemas de 1ª e de 2ª ordens. Além disso, para o projeto de controladores PID é possível utilizar o conceito de polos dominantes. Assim, pode-se considerar apenas os polos que dominam a resposta do sistema, ou seja, aqueles que fornecem as maiores constantes de tempo para o sistema. Dentro desse contexto, o sistema resultante em malha fechada é aproximado como sendo um sistema de 1ª ou de 2ª ordem. Quanto menor forem as partes reais dos polos dominantes em relação aos outros polos melhor a aproximação.

Tanto para sistemas de 1ª como para de 2ª ordens, é possível correlacionar facilmente as características transitórias no domínio do tempo com os polos do sistema. Assim, dadas as especificações transitória e estacionária do sistema de controle, é possível escolher os parâmetros do controlador de tal forma a alocar os polos em uma região que satisfaça as especificações desejadas.

A seguir é apresentado uma análise da resposta transitória de sistemas de 2ª ordem seguido de uma apresentação do método do lugar das raízes que pode ser utilizado para o projeto do controlador. A resposta transitória de sistemas de 1ª ordem foi apresentada na apostila da Experiência 2 e portanto não será repetida aqui.

Resposta transitória a degrau de um sistema de 2ª ordem

Um sistema de segunda ordem pode ser descrito pela seguinte função de transferência:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (22)$$

onde, $Y(s)$ é a saída do sistema, $R(s)$ é a entrada do sistema, ω_n é a frequência natural do sistema e ξ é o coeficiente de amortecimento. A resposta a degrau deste sistema pode ser categorizada em três tipos distintos (veja Figura 5):

- Caso Sub-amortecido ($0 < \xi < 1$): para este caso, a função de transferência do sistema, $G(s)$, pode ser escrita como:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \xi\omega_n + j\omega_d)(s + \xi\omega_n - j\omega_d)} \quad (23)$$

onde $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$ é a frequência de oscilação do sistema, também chamada de frequência natural amortecida.

Para uma entrada a degrau a resposta no tempo para a saída do processo, y , pode ser escrita como:

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \omega_d t + \arctan \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}, t \geq 0 \quad (24)$$

A frequência das oscilações transitórias é a frequência natural amortecida, ω_d , que varia com o coeficiente de amortecimento ξ . Se o coeficiente de amortecimento ξ é igual a zero, a resposta se torna não amortecida, oscilando indefinidamente.

- Caso de Amortecimento Crítico $\xi = 1$: para esse caso a função de transferência $G(s)$ pode ser escrita como:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2} \quad (25)$$

Nesse caso os dois polos do sistema são reais e iguais a $-\omega_n$

Para uma entrada degrau, a resposta no tempo para a saída do processo y pode ser escrita como:

$$y(t) = 1 - e^{(-\omega_n t)}(1 + \omega_n t), t \geq 0. \quad (26)$$

- Caso super-amortecido ($\xi > 1$): nesse caso os dois polos do sistema tem as partes reais negativas e distintas. A função de transferência $G(s)$, nesse caso, pode ser escrita como:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1})(s + \xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1})} \quad (27)$$

Para uma entrada a degrau, a resposta no tempo para a saída do processo y pode ser escrita como:

$$y(t) = 1 - e^{-(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t} - e^{-(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t} \quad (28)$$

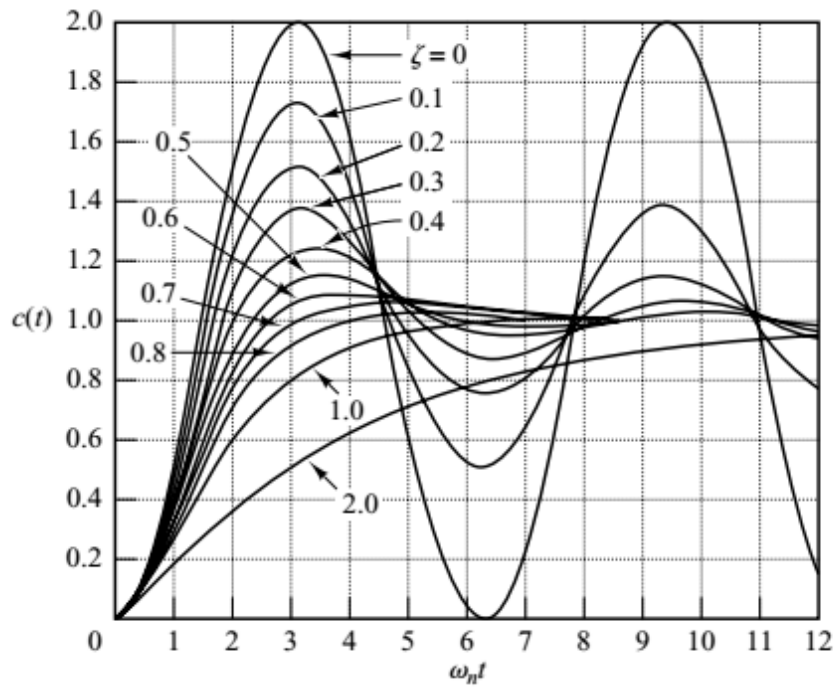


Figura 5: Resposta a degrau de um sistema de 2ª ordem.

Definição das especificações da resposta transitória.

Em muitos casos práticos, as características de desempenho de sistemas de controle são especificados no domínio do tempo através da resposta transitória a degrau unitário.

A resposta transitória de um sistema de controle frequentemente exibe oscilações com amortecimento até chegar ao regime permanente. Ao especificar as características de resposta transitória a uma entrada na forma de degrau unitário, é comum especificar as seguintes grandezas:

1. Tempo de atraso, t_d : o tempo de atraso é o tempo requerido para a resposta do sistema alcançar a metade do valor final pela primeira vez.
2. Tempo de subida, t_r : o tempo de subida é o tempo requerido para a resposta do sistema subir de 10% a 90%, 5% a 95% ou 0% a 100% do seu valor final. Para sistemas sub-amortecidos de 2ª ordem, a especificação de 0% a 90% é normalmente utilizada. Para sistemas super-amortecidos de 2ª ordem ou sistemas de 1ª ordem, o valor de 0% a 90% é mais comumente utilizado.
3. Instante do de pico, t_p : o instante de pico é o tempo requerido para a resposta atingir o primeiro pico do sobressinal.
4. Máximo sobressinal (percentual), M_p : o máximo sobressinal é definido como o maior valor percentual do pico em relação ao valor final. Este valor pode ser definido como:

$$M_p = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100\% \quad (29)$$

5. Tempo de acomodação, t_s : é o tempo requerido para a resposta atingir um valor dentro de um intervalo de $\pm 2\%$ do valor final (utiliza-se também o valor de $\pm 5\%$). O tempo de acomodação está obviamente relacionado à maior constante de tempo do sistema.

A Figura 6 apresenta graficamente estas especificações através da resposta transitória de um sistema de 2ª ordem.

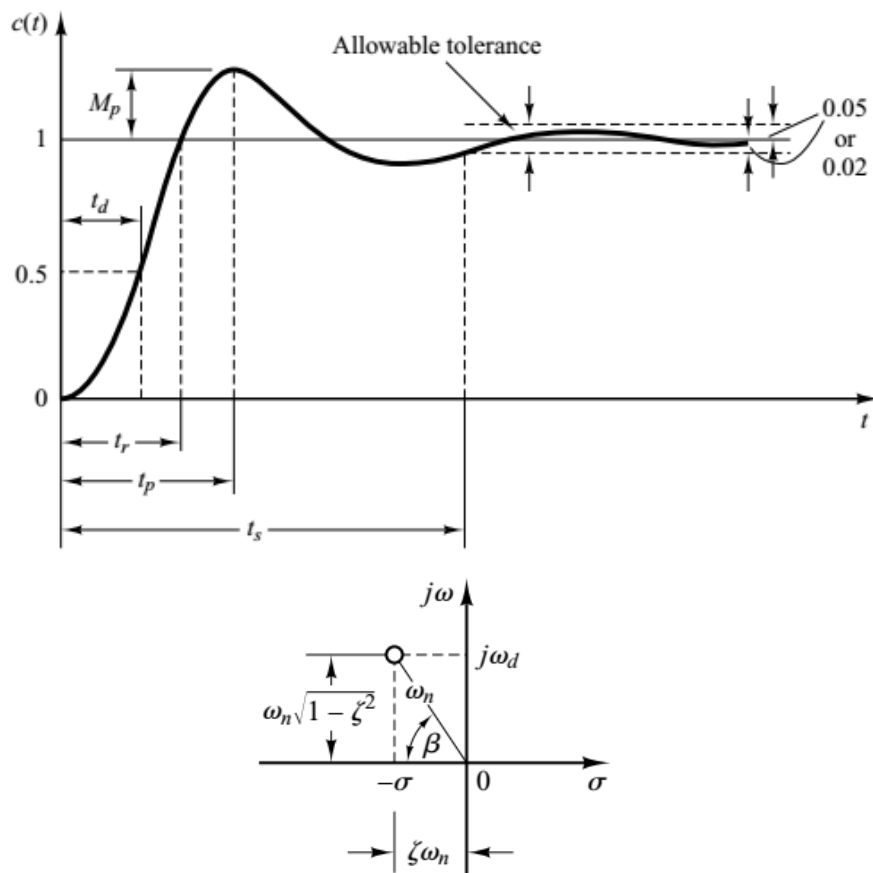


Figura 6: Resposta a degrau e especificações transitórias para resposta a degrau.

Para um sistema de 2ª ordem tem-se as seguintes relações, ver Figura 6:

- Frequência natural ω_n :

$$\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega_d^2} \quad (30)$$

- Ângulo β :

$$\beta = \arccos \frac{\sigma}{\omega_n} \quad (31)$$

- Coeficiente de amortecimento ξ :

$$\xi = \cos \beta = \frac{\sigma}{\omega_n} \quad (32)$$

- Frequência natural amortecida ω_d :

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (33)$$

- Tempo de acomodação t_s 2%:

$$t_s \simeq \frac{4}{\xi \omega_n} \quad (34)$$

Um determinado valor fixo de tempo de assentamento t_s define uma reta vertical no plano complexo s já que $\sigma = \xi \omega_n$. Usualmente procura-se relações de desigualdade do tipo $t_s \leq \alpha$ (onde α é uma constante). Esta

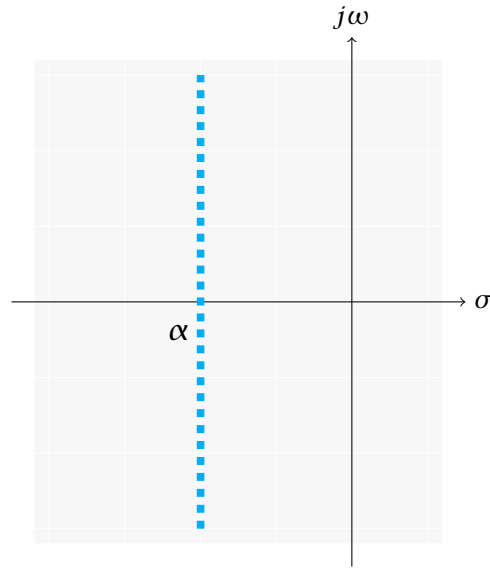


Figura 7: Semi-plano definido por t_s .

relação de desigualdade define então um lugar geométrico equivalente a um semiplano onde a reta vertical que o delimita é dada por:

$$\sigma = -\frac{4}{\alpha} \quad (35)$$

O semiplano delimitado por σ é ilustrado na Figura 7

- Tempo de subida t_r :

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} \quad (36)$$

- Máximo sobressinal M_p :

$$M_p = \exp\left(\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \quad (37)$$

O máximo sobressinal tem conexão direta com o coeficiente de amortecimento ξ . Em geral, a especificação de sobressinal em um sistema de controle é feito através de uma desigualdade do tipo:

$$M_p \leq \gamma \quad (38)$$

onde γ é uma constante. Através da Equação 37 pode-se calcular quais os valores de ξ que satisfazem a desigualdade dada pela Equação 38, ou seja:

$$\xi \geq \sqrt{\frac{\ln^2 \gamma}{\pi^2 + \ln^2 \gamma}} \quad (39)$$

Como $\xi = \cos \beta$ então a região que satisfaz a desigualdade original corresponde a uma região com um ângulo:

$$\beta \leq \arccos \sqrt{\frac{\ln^2 \gamma}{\pi^2 + \ln^2 \gamma}} \quad (40)$$

A Figura 8 ilustra esse lugar geométrico

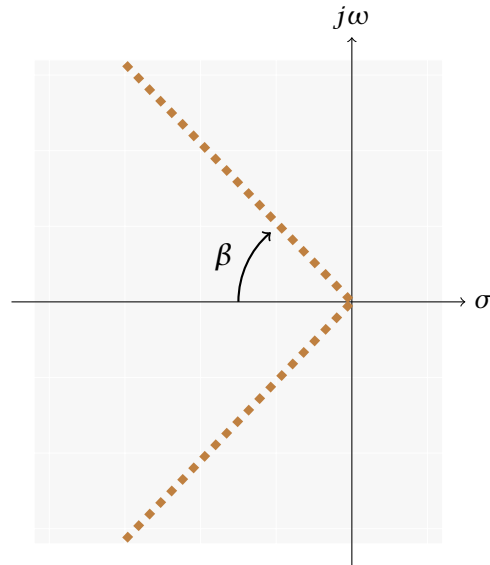


Figura 8: Polos de um sistema de 2ª ordem no plano complexo.

No caso de sistemas de 1ª ordem, tem-se um único polo no eixo real. Assim, para caracterizar a sua resposta dinâmica pode-se usar t_s ou t_r , que estão relacionados com a constante de tempo do sistema, T , da seguinte forma:

$$t_s = 4T \quad (41)$$

$$t_r \simeq 2.3T \quad (42)$$

Nota-se que as especificações de resposta transitória para um sistema de 2ª ordem são mais amplas do que para um sistema de 1ª ordem. Além disso, as especificações de resposta transitórias de um sistema de 2ª ordem engloba todas as especificações de um sistema de primeira ordem, fato fácil de ser observado se for lembrado que o polo de um sistema de 1ª ordem está localizado em $\sigma = -1/T$. Assim, na prática utiliza-se somente as características de resposta transitória de sistemas de 2ª ordem para definir o lugar geométrico, ou **região desejada**, dos polos da malha fechada que satisfazem as especificações.

Lugar das Raízes

Considere o sistema apresentado na Figura 9. A função de transferência de malha fechada é dada por:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (43)$$

Onde $G(s)$ representa a planta e $H(s)$ o controlador.

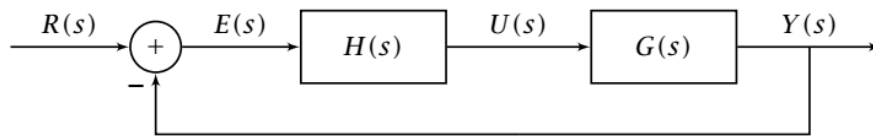


Figura 9: Diagrama esquemático de um sistema de controle em malha fechada.

A equação característica para este sistema é obtida igualando-se o denominador a zero, ou seja:

$$1 + G(s)H(s) = 0 \quad (44)$$

Os valores de s que satisfazem essa condição são as raízes da equação característica ou os polos de malha fechada. Em geral, deseja-se obter os polos de malha fechada em função do ganho do controlador. O gráfico que fornece os polos da malha fechada em função do ganho é chamado de lugar das raízes.

Para se obter o lugar das raízes de uma malha fechada inicialmente é necessário reescrever a Equação 44 de forma que o ganho do controlador apareça explicitamente. Assim, para um sistema de 1ª ordem do tipo:

$$G_w(s) = \frac{K_w}{Ts + 1} \quad (45)$$

e um controlador PI:

$$H(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) \quad (46)$$

Obtém-se:

$$1 + G_w(s)H(s) = 1 + \frac{K(1 + T_i s)}{T_i s} \frac{K_w}{(Ts + 1)} = 0 \quad (47)$$

Antes que se possa aplicar o método do lugar das raízes na equação acima é preciso que todas os parâmetros com exceção do ganho K sejam especificados, ou seja, **deve-se definir a localização do zero do compensador**, pela escolha de T_i , para que o único parâmetro variável seja o ganho K . Assim, a equação acima deve ser escrita na seguinte forma:

$$1 + K \frac{b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = 0 \quad (48)$$

onde os coeficientes a_i e b_i são constantes que dependem de T , T_i e K_w .

Esta é a função de transferência para a qual deve ser feito o lugar das raízes. A melhor localização do zero do compensador PI, para esse sistema, é à esquerda do polo da planta em $-1/T$.

Com o gráfico do lugar das raízes basta verificar o ganho K referente à posição dos polos da malha fechada que satisfazem as especificações do sistema de controle.

Um exemplo Suponha que se deseja obter o lugar das raízes de um sistema composto de um sistema de 1ª. ordem e um controlador PI. Os parâmetros referentes ao sistema e o tempo de integração T_i escolhido para o controlador PI são os seguintes:

- $K_w = 1.0$
- $T = 0.35$
- $T_i = 0.25$

Para estes parâmetros, o gráfico do lugar das raízes obtido está ilustrado na Figura 10.

No gráfico do lugar das raízes, pode-se observar o local onde se encontram os polos de malha fechada, a medida que K varia de zero a infinito. Deve-se observar que, quando $K = 0$ os polos da malha fechada são os polos da malha aberta, ou seja, $s = 0$ e $s = -1/T$. A medida que K aumenta, os dois polos se aproximam até se encontrar. Depois se separam em direções distintas, caminhando sobre um círculo. Quando se encontram novamente do outro lado do círculo, tomam direções opostas. Sendo que um vai em direção ao zero dado por $s = -1/T_i$ e o outro caminha em direção a $-\infty$ sobre o eixo real. Para cada valor de K têm-se um par de polos no domínio s . Na Figura 10 está evidenciado um ponto sobre a curva, juntamente com um quadrado onde está descrita a grandeza relacionada àquele ponto particular.

Obviamente, quando deseja-se obter um ganho K do controlador que satisfaça as especificações escolhidas para o sistema de controle, deve-se procurar as raízes que estejam simultaneamente sobre o gráfico do lugar das raízes e que satisfaçam as especificações dadas e traduzidas em termos de uma região desejada para os polos de malha fechada.

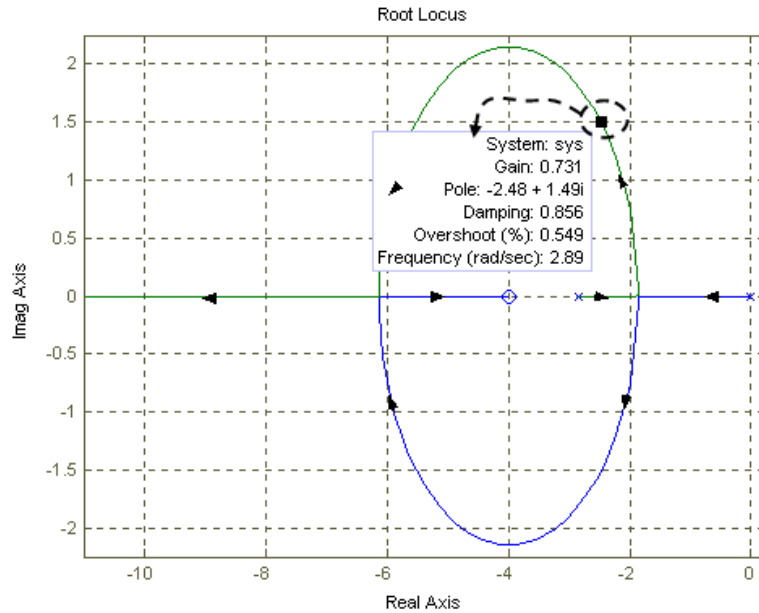


Figura 10: Gráfico do lugar das raízes - Sistema de 1ª ordem + Controlador PI.

É importante ter em mente que este método é aproximado, já que as Equações 30 a 37 valem para um sistema de 2ª ordem do tipo dado pela Equação 22, ou seja, um sistema que não possui zeros. No caso do motor, que é um sistema de 1ª ordem em conjunto com o controlador PI existe a presença de um zero. No gráfico do lugar das raízes, pode-se observar o local onde se encontram os polos de malha fechada, a medida que K varia de zero a infinito. Deve-se observar que, quando $K = 0$ os polos da malha fechada são os polos da malha aberta, ou seja, $s = 0$ e $s = -1/T$. A medida que K aumenta, os dois polos se aproximam até se encontrar. Depois se separam em direções distintas, caminhando sobre um círculo. Quando se encontram novamente do outro lado do círculo, tomam direções opostas. Sendo que um vai em direção ao zero dado por $s = -1/T_i$ e o outro caminha em direção ao menos infinito sobre o eixo real. Para cada valor de K tem-se um par de polos no domínio s . Na Figura 10 está evidenciado um ponto sobre a curva, juntamente com um zero em $s = -1/T_i$.

4.2 Uma outra maneira - Alocação de polos

Uma outra maneira de projetar um controlador PI para um sistema de 1ª ordem é o método de alocação de polos. Suponha que o processo possa ser descrito pela seguinte função de transferência:

$$G_w(s) = \frac{K_w}{Ts + 1} \quad (49)$$

e o controlador PI:

$$H(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) \quad (50)$$

A função de transferências de 2ª ordem é dada por:

$$G(s) = \frac{G_w(s)H(s)}{1 + G_w(s)H(s)} \quad (51)$$

Os polos de malha fechada podem ser escolhidos arbitrariamente através da escolha adequada do ganho K e do tempo integral T_i do controlador. Os polos são obtidos através da seguinte equação característica:

$$1 + G_\omega(s)H(s) = 0 \quad (52)$$

que se torna:

$$s^2 + s \frac{1 + K_\omega K}{T} + \frac{K_\omega K}{T T_i} = 0 \quad (53)$$

Suponha agora que os polos da malha fechada desejada possam ser caracterizados pelo coeficiente de amortecimento ξ e pela frequência natural ω_n . A equação característica pode então ser escrita como:

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (54)$$

$$2\xi\omega_n = \frac{1 + K_\omega K}{T} \quad (55)$$

Resolvendo essas equações para a determinação dos parâmetros do controlador, obtém-se:

$$K = \frac{2\xi\omega_n T - 1}{K_\omega} \quad (56)$$

e

$$T_i = \frac{2\xi\omega_n T - 1}{\omega_n^2 T} \quad (57)$$

5 Projeto de controladores PID em tempo discreto

As técnicas utilizadas para projetar um controlador em tempo discreto são exatamente as mesmas utilizadas para projetar controladores em tempo contínuo. Não há diferenças significativas no emprego dessas técnicas para o domínio de tempo contínuo ou discreto. A única diferença é que a região desejada para os polos da malha fechada em tempo discreto é diferente da região desejada para os polos de tempo contínuo. Assim, todas as regras e procedimentos utilizados para calcular o lugar das raízes em tempo contínuo são exatamente iguais para sistemas em tempo discreto. O procedimento de alocação de polos também é o mesmo.

5.1 Região desejada para os polos da malha fechada em tempo discreto

Na medida em que o sistema trabalha em tempo contínuo, a região desejada para os polos em tempo discreto também é obtida pelas especificações da resposta transitória em tempo contínuo. Contudo, para se obter a região desejada no plano z deve-se usar a expressão que mapeia os planos z e s , ou seja:

$$z = e^{sT_a} \quad (58)$$

A Figura 11 ilustra o mapeamento entre o plano complexo s e o plano complexo z . Por exemplo, o semi-plano esquerdo em s é mapeado em um disco unitário em z . Note que o semi-plano esquerdo em s é a região que contém os polos que definem sistemas estáveis. Desta forma, a região que contém os polos que definem os sistemas estáveis em z é um disco unitário.

O mapeamento não é bijetor já que muitos pontos em s são mapeados no mesmo ponto em z . Para polos na faixa fundamental S_0 da Figura 11(b), existe uma relação simples entre polos contínuos e discretos.

Note que o lugar dos polos com mesmo coeficiente de amortecimento, que no plano s é uma reta inclinada com ângulo β , se transforma no plano z em uma curva com formato tipo espiral. Você saberia dizer como o lugar dos polos com mesma constante de decaimento (σ) é mapeada no plano z ? Você vai precisar disso para projetar o controlador em tempo discreto.

Dessa forma, através do mapeamento entre os domínios s e z é fácil determinar a região desejada para os polos de malha fechada em tempo discreto.

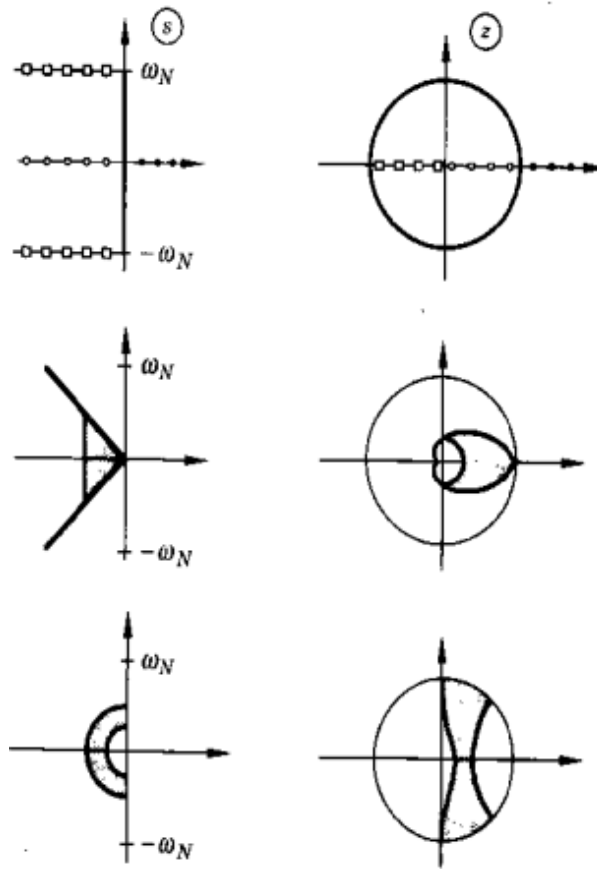


Figura 11: (a) mapeamentos entre o plano s e o plano z .

Para a determinação da região desejada para os polos da malha fechada somente os polos do sistema interessam. Contudo, além de polos um sistema podem existir zeros, e uma questão que surge é como esses zeros são mapeados entre os planos s e z ? Para os zeros não é possível estabelecer uma relação tão direta entre o domínio s e o domínio z . Se uma função de transferência de tempo contínuo é vista como uma função racional, ela possui r zeros finitos no numerador e d zeros no infinito, onde d é o excesso de polos, isto é, a diferença entre o número de polos e o números de zeros finitos. Um sistema em tempo discreto possui em geral $n - 1$ zeros, pois o procedimento de amostragem provoca o aparecimento de zeros adicionais além dos r zeros já existentes.

Para períodos de amostragem curtos, um sistema em tempo discreto possui zeros em: $z \simeq e^{s_i T_a}$, onde os s_i são os zeros do sistema de tempo contínuo. Os $r = d - 1$ zeros introduzidos pela amostragem tenderão para os zeros do polinômio Z_d da Tabela 1 na medida em que o período de amostragem tende a zero, isso porque para valores de s grande, a função de transferência do sistema contínuo é dada por $G(s) \simeq s^{-d}$.

Tabela 1: Zeros introduzidos durante a discretização de um sistema.

| d | Z_d |
|-----|---------------------------------|
| 1 | 1 |
| 2 | $z + 1$ |
| 3 | $z^2 + 4z + 1$ |
| 4 | $z^3 + 11z^2 + 11z + 1$ |
| 5 | $z^4 + 26z^3 + 66z^2 + 26z + 1$ |

Observa-se que para sistemas de ordem maior do que 2 o processo de discretização provoca o aparecimento de zeros de fase não mínima no sistema. Zeros de fase não mínima são zeros fora do círculo unitário e, portanto,

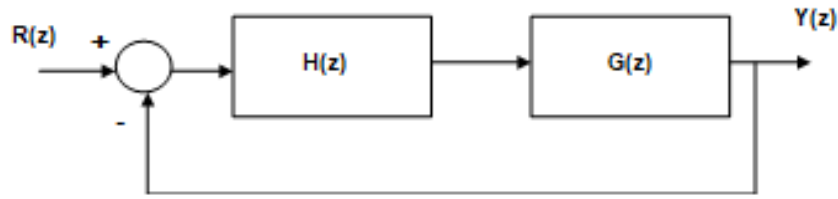


Figura 12: Diagrama esquemático de um sistema em tempo discreto em malha fechada.

na região de instabilidade do plano z . Como, os polos tendem para os zeros quando o ganho do controlador aumenta, em tempo discreto tem-se uma dificuldade adicional no projeto de controladores, que é a tendência do sistema sempre se tornar instável para altos valores de ganho.

5.2 Lugar das Raízes em tempo discreto

Considere o sistema em tempo discreto apresentado na Figura 12. A função de transferência de malha fechada é dada por:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)H(z)}{1 + G(z)H(z)} \quad (59)$$

A equação característica para esse sistema é dada por:

$$1 + G(z)H(z) = 0 \quad (60)$$

Os valores de z que satisfazem essa condição são as raízes da equação característica ou polos da malha fechada em tempo discreto. Para uma planta de 1ª ordem do tipo:

$$G_w = \frac{b}{z - a} \quad (61)$$

e um controlador PI digital:

$$H(z) = K \left(1 + \beta \frac{1}{z - 1} \right) \quad (62)$$

Obtém-se a seguinte equação característica:

$$1 + G_w(z)H(z) = 1 + K \frac{(z - 1 + \beta)}{z - 1} \frac{b}{z - a} = 0 \quad (63)$$

Como em tempo contínuo, antes que se possa aplicar o método do lugar das raízes na equação acima é preciso que todos os parâmetros com exceção do ganho K sejam especificados, ou seja, deve-se definir a localização do zero do compensador, pela escolha de β , para que o único parâmetro variável seja o ganho K . Assim, a equação acima pode ser escrita da seguinte forma:

$$1 + K \frac{c_1 z + c_0}{d_2 z^2 + d_1 z + d_0} = 0 \quad (64)$$

onde os coeficientes c_i e d_i são constantes que dependem de β , a e b .

Esta é a função de transferência para a qual deve ser feito o lugar das raízes. A melhor localização do zero do compensador PI (localizado em $1 - \beta$), para a planta em questão, é à esquerda do polo da planta em a .

Com o gráfico do lugar das raízes feito, basta verificar o ganho K referente à posição dos polos da malha fechada que satisfazem as especificações do sistema de controle.

5.3 Alocação de polos em tempo discreto

Como mencionado, o método de alocação de polos em tempo discreto é praticamente o mesmo que para tempo contínuo.

Dado o processo e o controlador definidos pelas Equações 61 e 62 respectivamente, a equação característica da malha fechada resultante, de 2ª ordem, é dada por:

$$z^2 + (Kb - 1 - a)z + a - kb(1 - \beta) = 0 \quad (65)$$

Como em tempo contínuo, os polos de malha fechada podem ser escolhidos arbitrariamente através da escolha adequada do ganho K e do coeficiente β do controlador.

Os polos de malha fechada desejada podem ser caracterizados pelo coeficiente de amortecimento e pela frequência natural desejados, que consequentemente define duas posições no plano z , ou seja, p_1 e p_2 . A equação característica pode então ser escrita como:

$$s^2 - (p_1 + p_2)z + p_1p_2 = 0 \quad (66)$$

Igualando-se as Equações 65 e 66, tem-se:

$$p_1p_2 = a - Kb(1 - \beta) \quad (67)$$

$$p_1 + p_2 = 1 + a - Kb \quad (68)$$

Resolvendo estas equações obtém-se os parâmetros do controlador, ou seja:

$$K = \frac{1 + a - p_1 - p_2}{b} \quad (69)$$

$$\beta = 1 + \frac{p_1p_2 - a}{Kb} \quad (70)$$

6 Algumas considerações práticas

6.1 Quando controladores PID podem ser utilizados

Os requisitos para um sistema de controle podem incluir muitos fatores como tempo de resposta a comandos, insensibilidade a ruído de medida e a variações do processo, e rejeição de distúrbios de torque. O projeto de sistemas de controle envolve ainda aspectos como as características dinâmicas do processo, a saturação de atuadores, e as características dos distúrbios no processo. A experiência na área permite concluir que a maioria dos processos industriais podem ser controlados razoavelmente bem com um controlador PID desde que os requisitos de desempenho do controlador não sejam muito altos.

Quando controladores PI são suficientes? O termo derivativo é frequentemente não utilizado. É interessante observar que na maioria dos controladores industriais a parte derivativa opera em geral desligada. Pode ser demonstrado que controladores PI são adequados para todos os processos onde as dinâmicas são essencialmente de 1ª ordem.

Quando controladores PID são suficientes? Similarmente controladores PID são suficientes para processos onde as dinâmicas dominantes são de segunda ordem. Um caso típico de benefício com o uso do termo derivativo, são a utilização em processos onde as constantes de tempo são bastante distintas (polos diferentes em magnitude). Por exemplo, em processos de controle de temperatura. Neste caso, a ação derivativa pode diminuir o tempo de resposta do sistema.

6.2 Faixas de operação e saturação de atuadores

Quando se projeta um sistema de controle algumas considerações práticas devem ser observadas. Uma das mais importantes é a viabilidade física dos parâmetros K , T_i e T_d projetados. Em sistemas analógicos, a constante proporcional K , por exemplo, está claramente associada ao ganho de amplificadores e estes possuem limites claros de potência fornecida, faixa de operação de tensão de entrada, faixa de operação de tensão de saída, etc.

Para o caso de controladores digitais, deve-se considerar a faixa de operação da tensão da entrada da placa de aquisição (no caso de $\pm 0.05V$ a $\pm 10V$), a faixa de operação da tensão de saída da placa de aquisição (no caso de $\pm 10V$) e a faixa de operação da tensão de entrada do amplificador do módulo de Motor CC (no caso de $\pm 5V$).

A consequência desta limitação é que dependendo da tensão de referência e dos parâmetros do controlador, o sistema pode operar muitas vezes sob saturação. Para evitar a saturação pode-se diminuir a faixa de operação do sistema, ou reprojeter o sistema de controle diminuindo os requisitos de desempenho.

Quando o sistema opera em saturação, o laço de controle é descontinuado e o sistema opera como se estivesse em malha aberta porque o atuador vai permanecer no seu limite independente da saída do processo y . Se um controlador com ação integral é utilizado, o erro pode continuar a ser integrado. Isto significa que o termo integral pode se tornar muito grande, um fenômeno comumente conhecido como *WINDUP*. Para que o sistema retorne ao seu funcionamento normal é necessário que o erro mude de sinal por um longo período até *zerar* o integrador. A consequência é que qualquer controlador com ação integral pode estar sujeito a longos períodos transitórios quando o atuador satura.

O fenômeno de *WINDUP* está ilustrado na Figura 13, que mostra um processo sendo controlado por um controlador do tipo PI. A mudança inicial de referência y_{sp} é tão grande que o atuador satura. O termo integral I aumenta inicialmente porque o erro é positivo, e atinge o seu valor máximo em $t = 10s$. quando o erro se torna nulo ($y = y_{sp}$). A saída se mantém em saturação devido ao valor alto do termo integral I . O limite de saturação não é abandonado até que o erro permaneça negativo por um longo tempo, um tempo suficiente para que o termo integral diminua significativamente. Note que o esforço de controle u , se alterna nos dois limites várias vezes. O efeito geral é um grande sobressinal, e uma oscilação amortecida onde o esforço de controle se alterna nos dois valores limites. Quando a saída do processo y se aproxima do sinal de referência o atuador não entra mais em saturação e o comportamento se torna linear.

Em geral, controladores industriais possuem algoritmos *Anti-Windup*. Estes algoritmos contêm mecanismos diversos, tais como, o desligamento da parte integral quando o controlador entra em saturação, ou um recálculo da parte integral, de forma a diminuí-la para que o atuador não entre em saturação.

6.3 Seleção do Período de Amostragem

A escolha apropriada do período de amostragem T_a é uma decisão importante em um sistema de controle digital. Se o período de amostragem for muito longo será impossível reconstruir o sinal contínuo. Se o período de amostragem for muito pequeno o computador ficará sobrecarregado. A escolha do período de amostragem depende bastante do propósito do sistema.

A escolha do período de amostragem pode ser feita com base numa variável adimensional e que possui uma interpretação física. Para sistemas oscilatórios é natural a normalização com base no período de oscilação, para sistemas não oscilatórios, o tempo de subida do sistema é o fator de normalização adequado.

Define-se o número de períodos de amostragem por tempo de subida, N_r :

$$N_r = \frac{t_r}{T_a} \quad (71)$$

onde t_r é o tempo de subida. Para sistemas de 1ª ordem, o tempo de subida é igual a constante de tempo. Portanto, é razoável escolher N_r entre 4 e 10 para o caso de projeto do controle ter sido realizado em tempo discreto. Contudo, se o projeto do controlador foi realizado diretamente em tempo contínuo, N_r deve ficar entre 10 e 20.

Para um sistema de segunda ordem com coeficiente de amortecimento ξ e frequência natural ω_n , o tempo

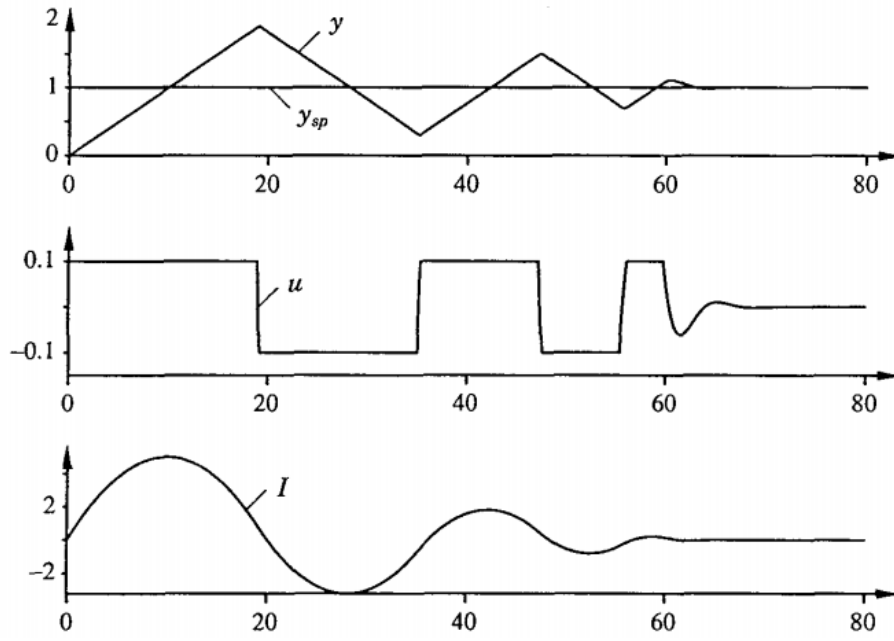


Figura 13: Ilustração do fenômeno de *WINDUP*.

de subida é dado por:

$$T_r = \omega_0^{-1} e^{\phi / \tan \phi} \quad (72)$$

onde $\xi = \tan \phi$. Para um coeficiente de amortecimento em torno de $\xi = 0.7$, isto resulta em:

$$\omega_0 T_a \simeq 0.1 \text{ ou } 0.05 \quad (73)$$

Onde ω_0 é dado em rad/s.

Uma questão importante a ser considerada é que os polos e zeros no domínio z dependem do período do amostragem. Como se sabe, os polos do domínio s são mapeados no domínio z através da seguinte relação:

$$z = e^{sT_a} \quad (74)$$

Na medida em que o período de amostragem $T_a \rightarrow 0$, ou seja, diminui, os polos estáveis em s (polos com parte real negativa) tendem rapidamente para $z = 1$. Paradoxalmente pode-se esperar que conforme o período de amostragem diminui a aproximação do sistema contínuo se torna mais precisa, no entanto períodos de amostragem pequenos podem introduzir distorções significativas no comportamento dinâmico do sistema. Isto decorre principalmente em razão do número finito de algarismos utilizado em um computador digital. Assim, por exemplo, considere um polo em tempo discreto localizado em $z = 0.999991$, o que é uma posição muito próxima de $z = 1$ que é o limite da estabilidade, após inúmeros cálculos realizados pelo controlador, a cada período de amostragem, podem ocorrer erros de arredondamento que levam o sistema facilmente para a instabilidade.

Uma outra forma de escolher o período de amostragem é utilizar a Equação 74 de modo que os pólos do sistema de malha aberta em tempo discreto fiquem em torno de 0.95. Assim, invertendo a Equação 74, tem-se:

$$T_a = \frac{\ln(0.95)}{p} \quad (75)$$

onde p é o pólo mais rápido da malha aberta. Esse método garante que os pólos do sistema em tempo discreto tenham um número de dígitos significativos suficiente de forma que não sejam arredondados para a unidade devido a erros de quantização.