UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMATICA E ESTATISTICA

1

Nome____________________ Nota
Q 1
Data ___/___/___ Nº. USP__________ Q 2
Q 3
Disciplina__________ Turma__________ Prof.__________ Q 4

(1) $T = a D^b$

$\log T = \log a + b \log D$ (log : qualquer um, aqui é ln)

$$\begin{cases} \langle 1,1\rangle \log a + \langle 1, \log D\rangle b = \langle 1, \log T\rangle \\ \langle \log D, 1\rangle \log a + \langle \log D, \log D\rangle b = \langle \log D, \log T\rangle \end{cases}$$

D	T	log D	log T
0.389	0.240	−0.9442	−1.427
0.724	0.615	−0.3230	−0.4861
1	1	0	0
1.524	1.881	0.4213	0.6318
5.2	11.862	1.649	2.473
9.510	29.457	2.252	3.383

$\langle 1,1\rangle = 6$

$\langle 1, \log D\rangle = 3.055$

$\langle 1, \log T\rangle = 4.575$

$\langle \log D, \log D\rangle = 8.964$

$\langle \log D, \log T\rangle = 13.47$

$$\begin{cases} 6 \log a + 3.055\, b = 4.575 \\ 3.055 \log a + 8.964\, b = 13.47 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{L_2 \mapsto L_2 - \frac{3.055}{6} L_1} \begin{cases} 6 \log a + 3.055 b = 4.575 \\ \qquad\qquad 7.408 b = 11.14 \end{cases} \Rightarrow b = \frac{11.14}{7.408} = 1.504$$

$$\Rightarrow \log a = \frac{4.575 - 3.055 \times 1.504}{6} = -3.287 \times 10^{-3} \Rightarrow a = 0.9967$$

Isto é, nas unidades métricas escolhidas,

$$T \simeq D^{3/2}$$

(ou $T^2 \simeq D^3$)

(2)

$$z = \ln(1 + ax^2 + by^2)$$

$$e^z = 1 + ax^2 + by^2$$

$$ax^2 + by^2 = e^z - 1$$

$$\begin{cases} \langle x^2, x^2\rangle a + \langle x^2, y^2\rangle b = \langle x^2, e^z - 1\rangle \\ \langle y^2, x^2\rangle a + \langle y^2, y^2\rangle b = \langle y^2, e^z - 1\rangle \end{cases}$$

x	y	z	$e^z - 1$
0	0	1	1.718
1	0	1.5	3.482
0	1	1.2	2.320
1	1	1.7	4.474

$\langle x^2, x^2\rangle = 2$

$\langle x^2, y^2\rangle = 1$

$\langle y^2, y^2\rangle = 2$

$\langle x^2, e^z - 1\rangle = 7.956$

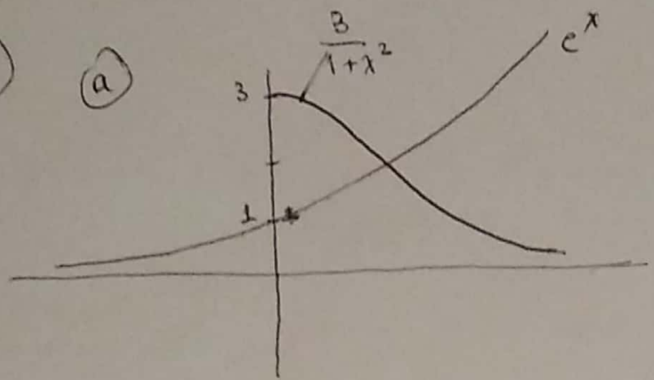
$\langle y^2, e^z - 1\rangle = 6.794$

$$\begin{cases} 2a + b = 7.956 \\ a + 2b = 6.794 \end{cases} \xrightarrow[L_2 \mapsto L_2 - \frac{1}{2}L_1]{} \begin{cases} 2a + b = 7.956 \\ 1.5b = 2.816 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b = \frac{2.816}{1.5} = 1.877 \qquad \Rightarrow a = \frac{7.956 - 1.877}{2} = 3.040$$

$$\boxed{\begin{array}{c} a = 3.040 \\ \hline b = 1.877 \end{array}}$$

(3) (a)



$\frac{3}{1+x^2}$ vai de 3 a 0 em $[0,+\infty)$ e é decrescente

e^x vai de 1 a $+\infty$ em $[0,+\infty)$ e é crescente.

$\Longrightarrow \exists$ única solução positiva.

Alternativa, essencialmente igual:

$$f(x) = e^x - \frac{3}{1+x^2} \qquad \underbrace{f(0) = -2 \quad e \quad f(x) \xrightarrow{x\to\infty} +\infty}_{\exists \text{ raiz.}}$$

$$f'(x) = e^x + \frac{6x}{(1+x^2)^{+2}} > 0 \text{ p/ } x \geq 0 \Longrightarrow \text{raiz é única.}$$

(b) Vou fazer de duas maneiras diferentes.

(i) $f(x) = e^x - \frac{3}{1+x^2}$

Segunda derivada:

$$f''(x) = e^x - 24x^2(1+x^2)^{-3} + 6(1+x^2)^{-2}$$
$$= e^x + (1+x^2)^{-3}\cdot[-24x^2 + 6 + 6x^2]$$
$$= e^x + [6 - 18x^2](1+x^2)^{-3}$$
$$= e^x + 6(1-3x^2)(1+x^2)^{-3}$$

CERTAMENTE $f''(x) > 0$ em $[0, \frac{1}{\sqrt{3}}]$. (pois $1-3x^2 \geq 0$)

(isso não é suficiente pois f não troca de sinal nesse intervalo)

A partir de $x = 1/\sqrt{3}$ temos $e^x \geq e^{1/\sqrt{3}} \simeq 1.7813$

e $\frac{6}{(1+x^2)^3} \leq \frac{6}{(1+\frac{1}{3})^3} = 2.53125$

$\longrightarrow$

Então, para que $e^x + (1-3x^2)\cdot\frac{6}{(1+x^2)^3}$ seja negativo seria necessário que $1-3x^2$ fosse tão ou mais negativo que

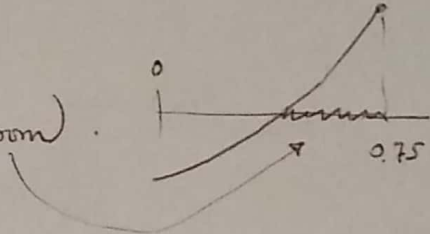
$$-\frac{1.7813}{2.53125} = -0.7037,$$

o que só ocorre com $1-3x^2 = -0.7037 \Rightarrow x \simeq 0.7536$.

Isso garante que $f''(x) > 0$ em $[0, 0.75]$.

Como $f(0.75) = 0.197\ldots > 0$ então $[0, 0.75]$ (i) tem troca de sinal da f, (ii) $f' > 0$ e (iii) $f'' > 0$.

Então basta escolher $x_0 = 0.75$ (lado bom).



Iterações:

$$\varphi(x) = x - \frac{e^x - \frac{3}{1+x^2}}{e^x + \frac{6x}{(1+x^2)^2}}$$

OBS: Esta solução não exclui que $f'' > 0$ em $[0, +\infty)$, mas não é necessário mostrar isso.

$x_0 = 0.75$

$x_1 = 0.700255033$

$x_2 = 0.699915549$

$\boxed{x_3 = 0.699915532}$

$x_4 =$ "

(ii) $e^x = \frac{3}{1+x^2}$ é equivalente a $\boxed{(1+x^2)e^x - 3 = 0}$

Então examinamos $f(x) = (1+x^2)e^x - 3$

$f(0) = -2$ Como $f(x) \xrightarrow{x\to\infty} +\infty$, há troca de sinal.

$f'(x) = 2xe^x + (1+x^2)e^x = (1+x)^2 e^x$: sempre positiva.

[OBS: Isto mostra que ~~f~~ esta f é sempre crescente e, portanto, só há uma raiz em toda a reta real]

$f''(x) = 2(1+x)e^x + (1+x)^2 e^x$: sempre positiva p/ $x \geq 0$

Aqui temos certeza que $\forall\, x_0 \geq 0$ serve como condição inicial (o "lado bom" está à direita da raiz e é infinito)

Neste caso,

$$\varphi(x) = x - \frac{(1+x^2)e^x - 3}{(1+x)^2 e^x}$$

Usemos $0.75 = x_0$ p/ comparar os valores com a outra solução:

$x_0 = 0.75$

$x_1 = 0.702522337$

$x_2 = 0.699922909$

$\boxed{x_3 = 0.699915532}$

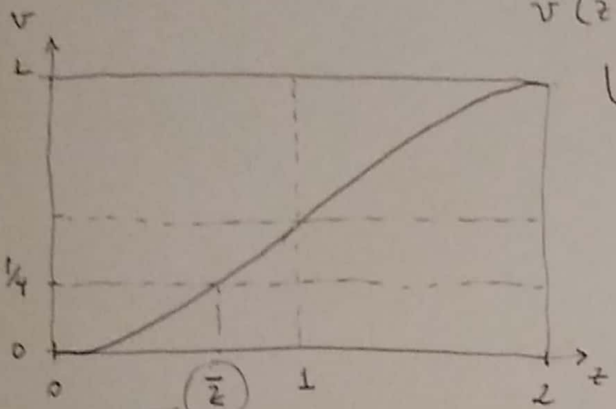
(4) $v(z) = \frac{3}{4\pi}\int_0^z \pi\left[1-(u-1)^2\right]du = \frac{3}{4}\left(z^2 - \frac{z^3}{3}\right)$

Propriedades úteis: $v(0) = 0$, $v(2) = 1$

$v'(z) = \frac{3}{4}z(2-z)$

↳ $v'' \geq 0$ p/ $z \in [0,1]$

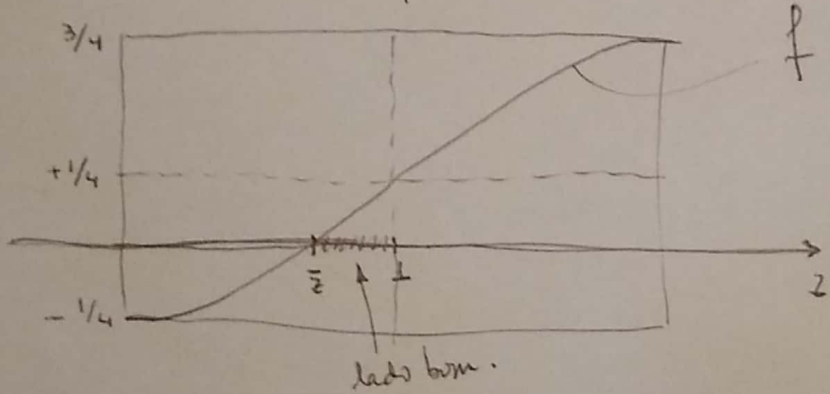
$v'' \leq 0$ p/ $z \in [1,2]$



↳ PROBLEMA: $\bar{z}$ t.q. $v(\bar{z}) = 1/4$.

1

$\bar{z}$ é raiz de $f(z) = v(z) - 1/4$



Em $[0,1]$:
- f troca de sinal
- $f' > 0$
- $f'' > 0$

⇓

$z_0 = 1$ é boa condição inicial

2

$$\varphi(z) = z - \frac{\frac{3}{4}\left[z^2 - \frac{z^3}{3}\right] - \frac{1}{4}}{\frac{3}{4}z(2-z)} = z - \frac{3z^2 - z^3 - 1}{6z - 3z^2}$$

$z_0 = 1$

1

$z_1 = 0.666666666$

$z_2 = 0.652777777$

$z_3 = 0.652703646$

$\boxed{z_4 = 0.652703644}$

$z_5 =$ 〃