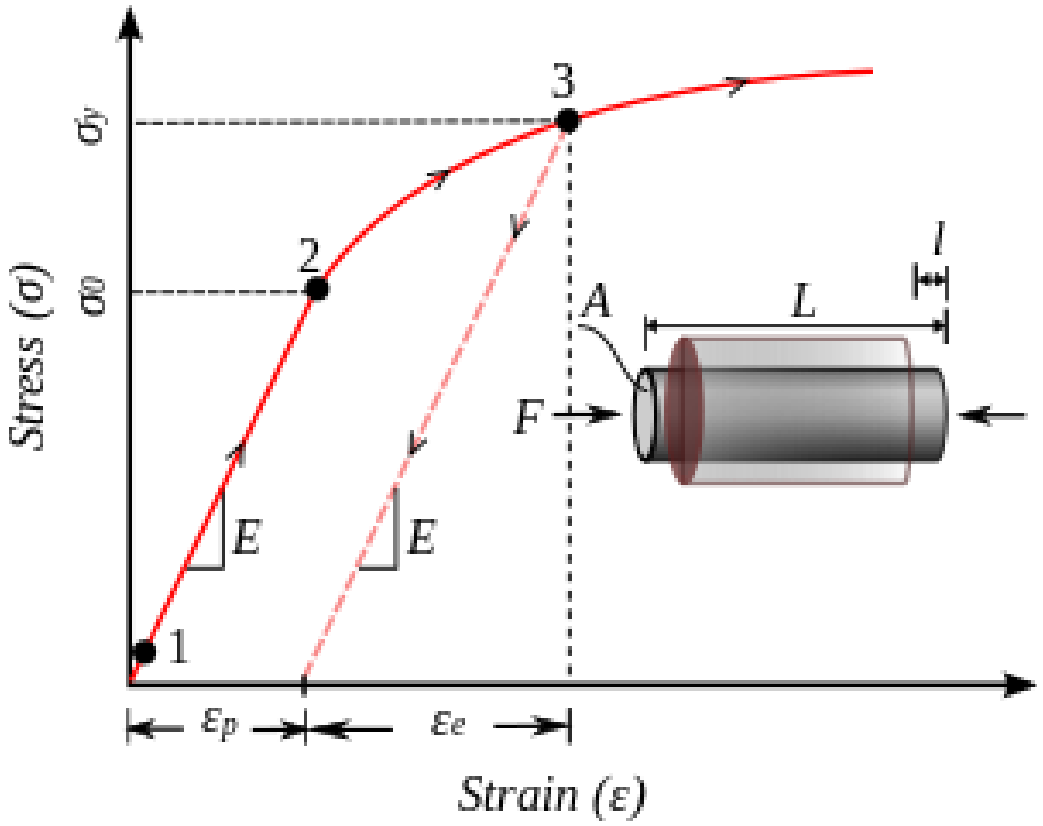
PMR5248
Elementos Finitos Não Linear

PLASTICIDADE EM TRELIÇAS

Larissa Driemeier
Marcilio Alves
Rafael T. Moura

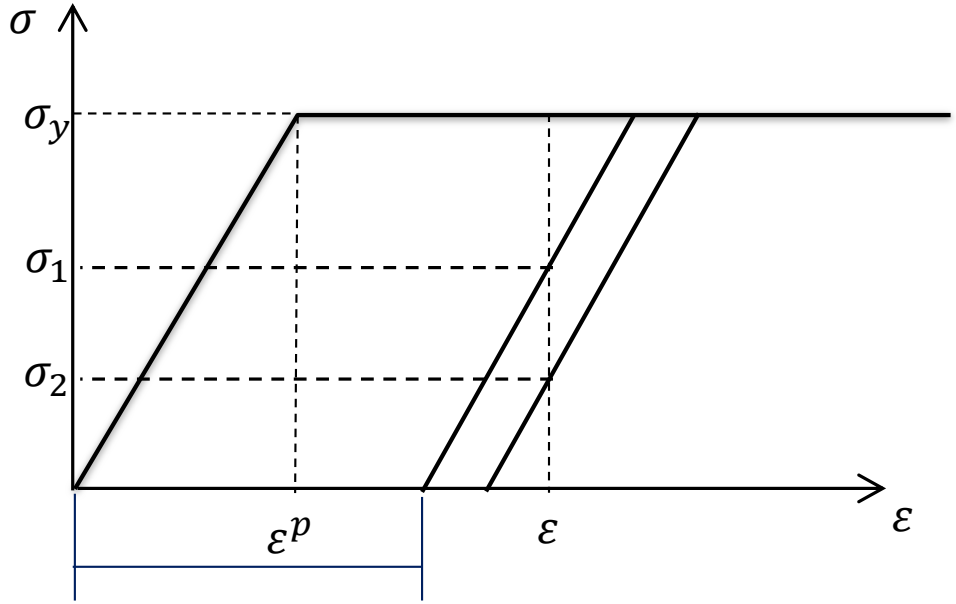
O QUE É PLASTICIDADE E ENCRUAMENTO?

- Plasticidade e encruamento são fenômenos associados tipicamente à resposta de materiais metálicos, identificados nos gráficos da relação tensão-deformação obtidos em ensaios experimentais de tração ou compressão uniaxial. Ambos os fenômenos se manifestam para além do regime elástico. A plasticidade se caracteriza pelo aparecimento de deformações irrecuperáveis, ou permanentes, enquanto que o encruamento fica evidenciado pelo ganho de resistência com o crescimento da deformação.



RELAÇÃO CONSTITUTIVA ELASTOPLÁSTICA UNIDIMENSIONAL

A versão unidimensional do modelo matemático que descreve a relação constitutiva de um meio elastoplástico é de formulação mais simples e permite evidenciar aspectos conceituais importantes para a compreensão da modelagem bi e/ou tridimensional.



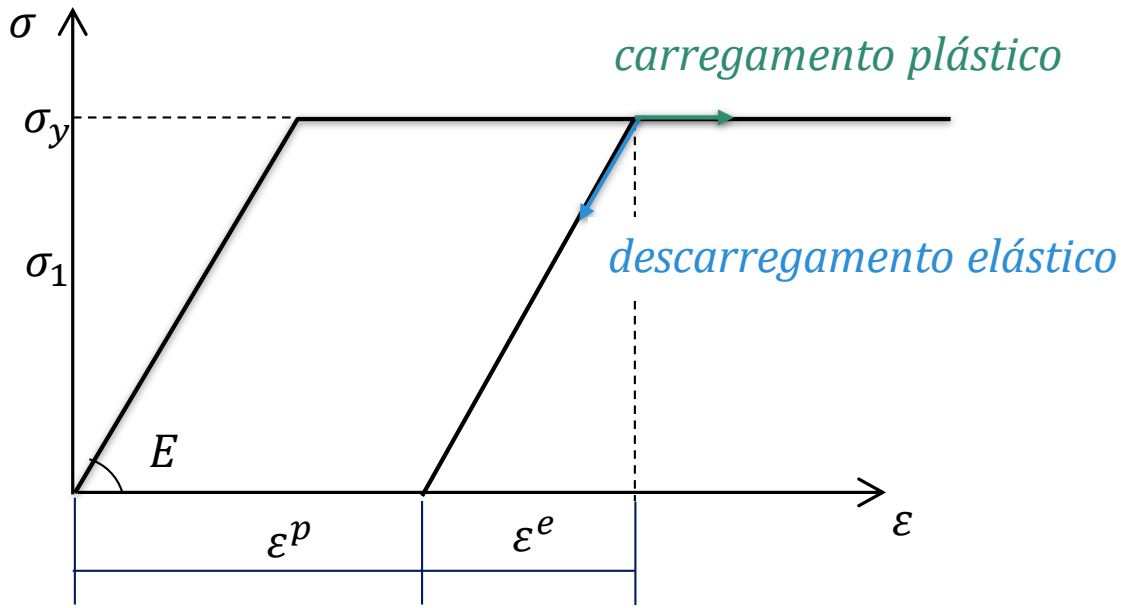
Nos modelos elastoplásticos é necessário conhecer a 'história prévia' da deformação plástica para se determinar a intensidade de tensão correspondente a certa intensidade de deformação

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$$

$$\sigma = E\varepsilon^e = E(\varepsilon - \varepsilon^p)$$

RELAÇÃO CONSTITUTIVA PARA ELASTOPLASTICIDADE PERFEITA

No regime elastoplástico: ***a deformação total é sempre composta de uma parcela elástica e outra plástica.***



$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$$

$$\sigma = E\varepsilon^e = E(\varepsilon - \varepsilon^p)$$

$$\varepsilon^p = \int_0^{\varepsilon} d\varepsilon^p$$

MODELO NÃO LINEAR

Carregamento plástico

- Corresponde a acréscimos imediatos, de deformação plástica,
- O material continuará em processo de escoamento, com aumento da deformação plástica.

Descarregamento elástico

- Corresponde a níveis de deformação plástica constante.
- O descarregamento virá acompanhado de recuperação elástica.

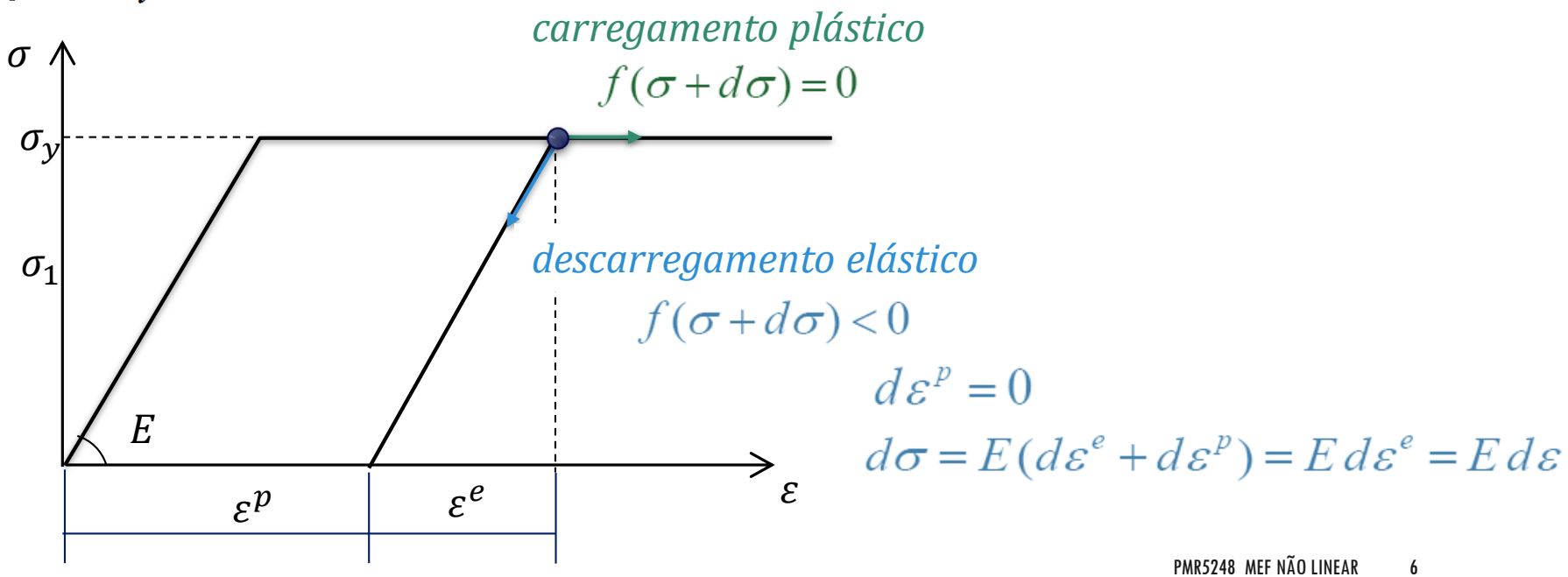
É importante que o modelo matemático inclua essas possibilidades de modo a registrar corretamente a história de deformação plástica. Nesse sentido, é necessário exprimir a relação constitutiva em termos de variações (*infinitesimais*) de tensão e deformação:

$$d\sigma = E\, d\varepsilon^e = E(d\varepsilon - d\varepsilon^p)$$

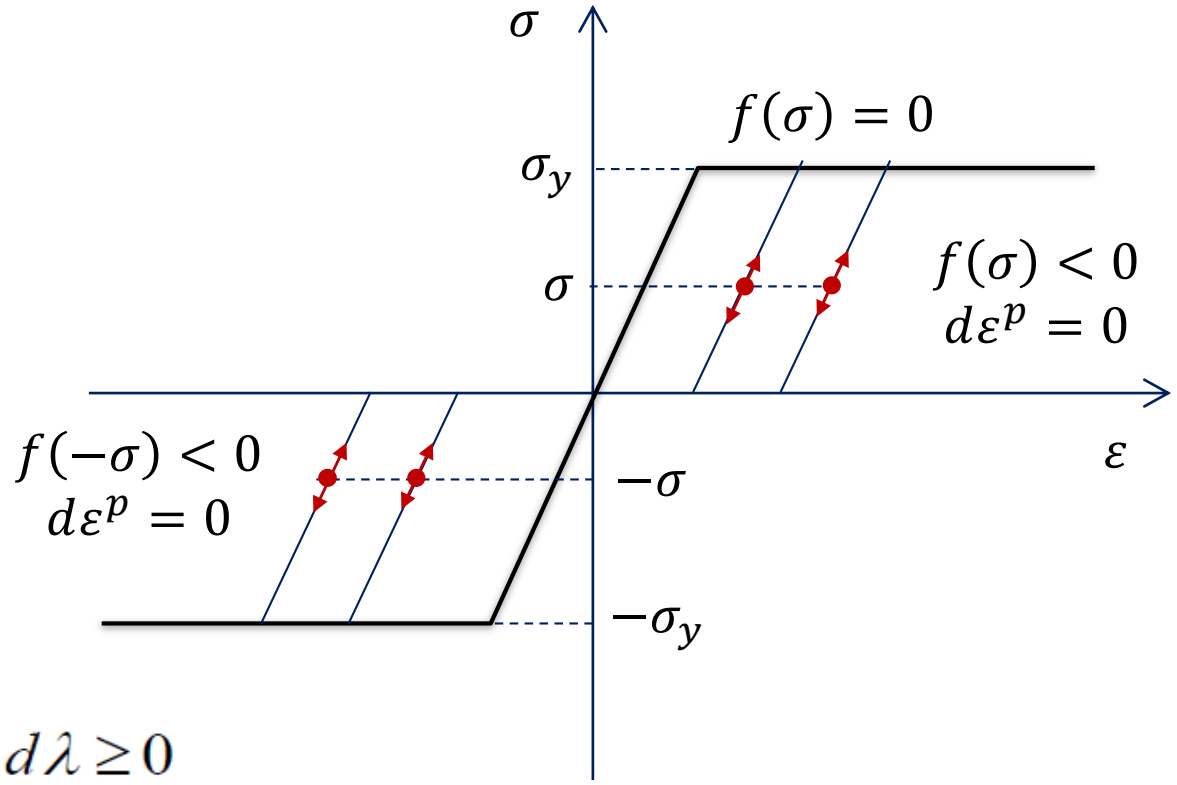
ESTADOS ADMISSÍVEIS DE TENSÃO

Essa relação tem um papel importante no modelo matemático, pois estabelece um critério, denominado **critério de plastificação**, que serve para identificar a natureza dos regimes de resposta imediata, se elástico ou plástico.

$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y \leq 0$$



$d\lambda$: MEDIDA DO INCREMENTO DE DEFORMAÇÃO PLÁSTICA

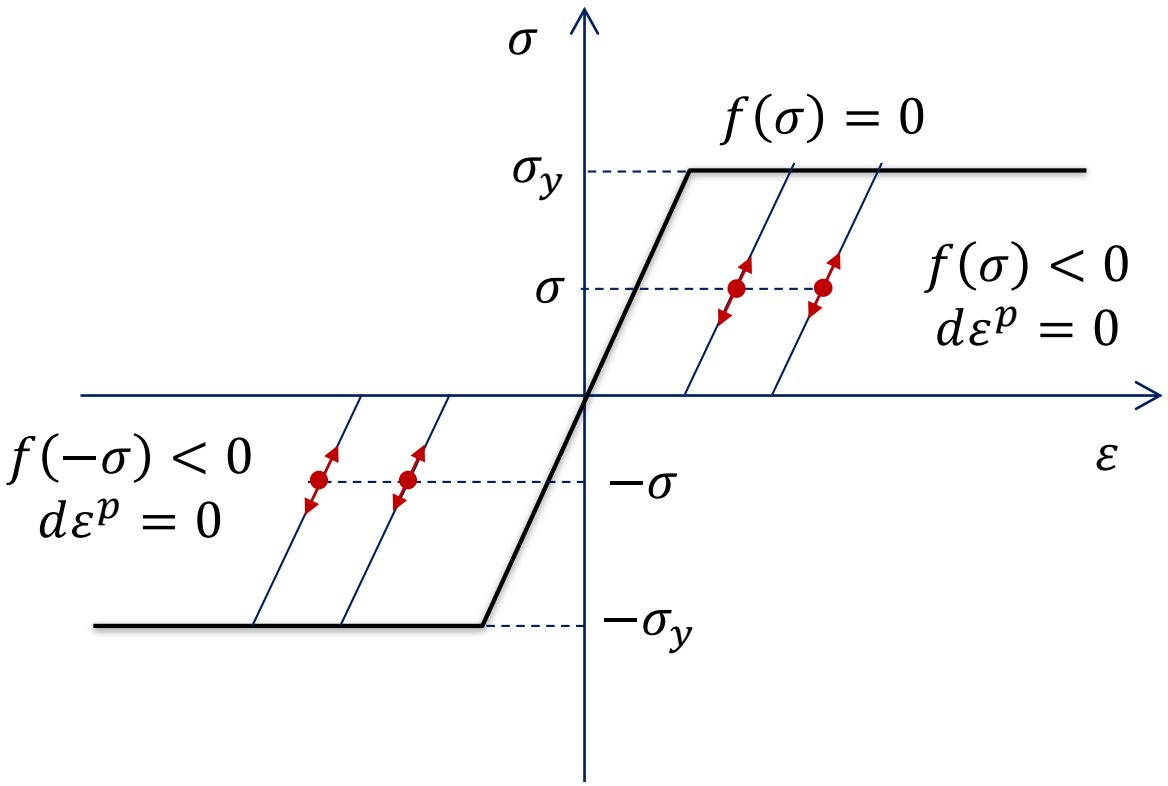


$$d\varepsilon^p = d\lambda \geq 0 \quad \text{se} \quad \sigma = \sigma_y \ (>0)$$

$$d\varepsilon^p = -d\lambda \leq 0 \quad \text{se} \quad \sigma = -\sigma_y \ (<0)$$

$$d\varepsilon^p = d\lambda \ sign(\sigma) \quad \text{se} \quad f(\sigma) = 0 \quad \text{com} \quad d\lambda \geq 0$$

CONDIÇÕES DE COMPLEMENTARIEDADE



$$f(\sigma) < 0 \text{ e } d\lambda = 0$$

$$f(\sigma) = 0 \text{ e } d\lambda \geq 0$$

$$f(\sigma)d\lambda = 0$$

CONDIÇÃO DE CONSISTÊNCIA

$$f(\sigma) < 0 \text{ e } d\lambda = 0$$

$$f(\sigma) = 0 \text{ e } d\lambda > 0 \text{ então } f(\sigma + d\sigma) = 0 \rightarrow \mathrm{d}f = \frac{df}{d\sigma} d\sigma = 0$$

Daí sai a condição de consistência,

$$d\lambda > 0 \text{ se } \mathrm{d}f = 0$$

$$d\lambda = 0 \text{ se } \mathrm{d}f < 0$$

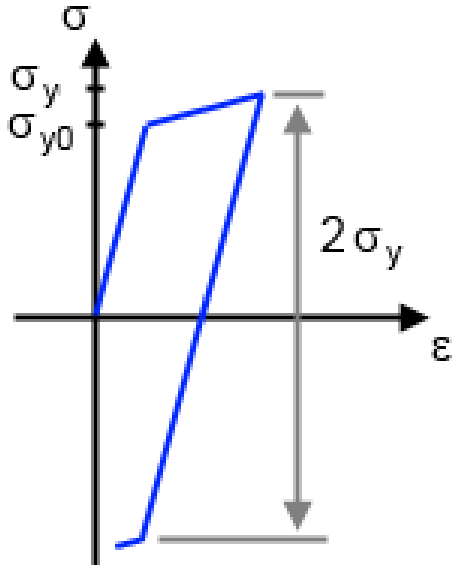
MODELO CONSTITUTIVO ELASTOPLÁSTICO PERFEITO

1. Deformação: $d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p$
2. Lei constitutiva 1D $d\sigma = E\ d\varepsilon^e = E\left(d\varepsilon - d\varepsilon^p\right)$
3. Critério de plastificação $f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y \leq 0$
4. Lei de escoamento $d\varepsilon^p = d\lambda\ \mathrm{sign}(\sigma)$
5. Condições de complementariedade $d\lambda \geq 0 \quad f \leq 0 \quad f\ d\lambda = 0$
6. Condição de consistência $d\lambda\ df = 0 \quad df \leq 0$

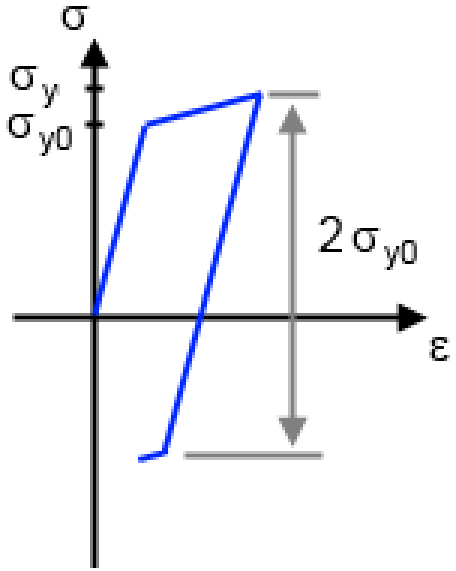
COMPORTAMENTO ELASTOPLÁSTICO COM ENCRUAMENTO LINEAR POSITIVO

- O encruamento se caracteriza pela alteração, em tamanho e/ou em posição, do intervalo elástico inicial de tensões sempre que houver evolução da deformação plástica.

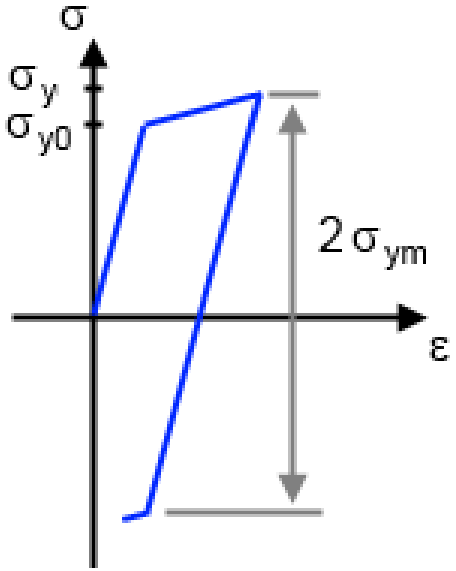
Isótropo

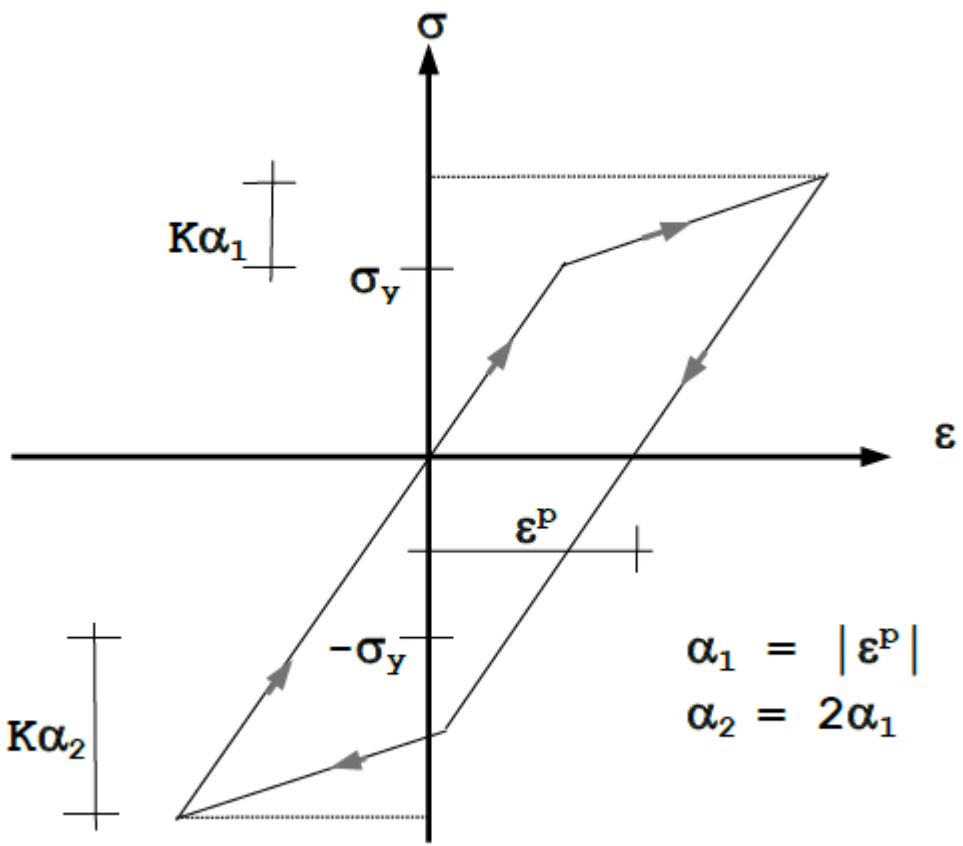


Cinemático



Misto





O parâmetro K é denominado *módulo plástico de encruamento isótropo* e α (> 0) uma medida que registra, justamente, a história da deformação plástica no ciclo.

A simples existência de deformação plástica em algum momento anterior, independente do seu sinal, é suficiente para provocar a expansão do intervalo inicial de tensões admissíveis.

O intervalo elástico inicial alterou-se sucessivamente para

$$[-(\sigma_Y + k\alpha_1),(\sigma_Y + k\alpha_1)] \text{ e } [-(\sigma_Y + k\alpha_2),(\sigma_Y + k\alpha_2)]$$

ENCRUAMENTO POR DEFORMAÇÃO

No chamado encruamento por deformação ('strain-hardening') define-se

$$d\alpha = |d\varepsilon^p| \rightarrow d\alpha = d\lambda$$

$$f(\sigma,\alpha) = |\sigma| - (\sigma_y + k\alpha) \leq 0$$

σ_y e k são constantes do material

Condição de consistência

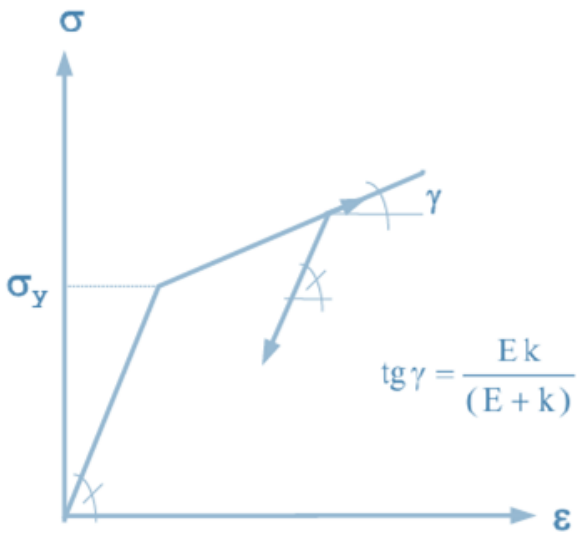
$$d\lambda = \frac{sign(\sigma) E\, d\varepsilon}{(E+k)}$$

$$d\varepsilon^p = d\lambda\, sign(\sigma) = \frac{E\, d\varepsilon}{(E+k)}$$

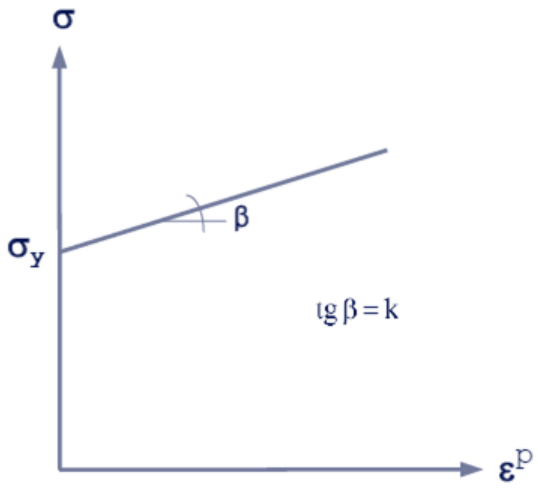
MÓDULO CONSTITUTIVO ELASTOPLÁSTICO TANGENTE, PARA $d\lambda > 0$

$$d\varepsilon^p = d\lambda \; sign(\sigma) = \frac{E\, d\varepsilon}{(E+k)}$$

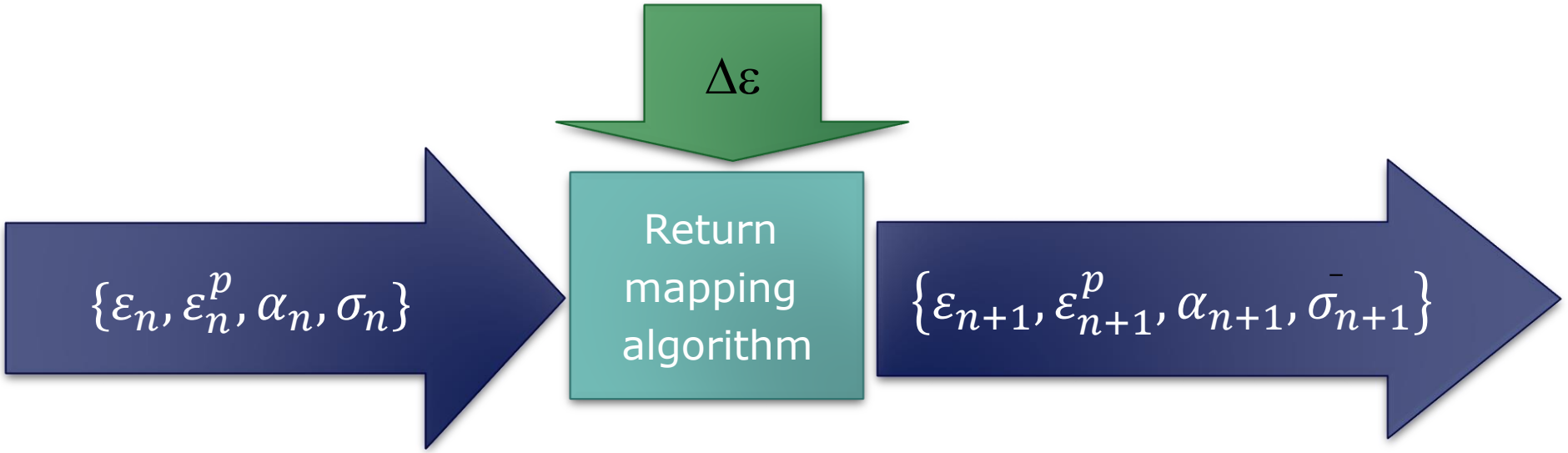
$$d\sigma = \frac{E\,k}{(E+k)} d\varepsilon$$



$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} = k$$



ALGORITMO PARA VERIFICAÇÃO EM PASSO FINITO



EM RESUMO...

Variáveis de interesse ao final do algoritmo

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta\varepsilon_{n+1}$$

$$\varepsilon^p_{n+1} = \varepsilon^p_n + \Delta\varepsilon^p_{n+1}$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta\alpha_{n+1}$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + \Delta\sigma_{n+1}$$

Modelo elastoplástico com encruamento isótropo

$$\sigma_{n+1} = E\left(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon^p_{n+1}\right)$$

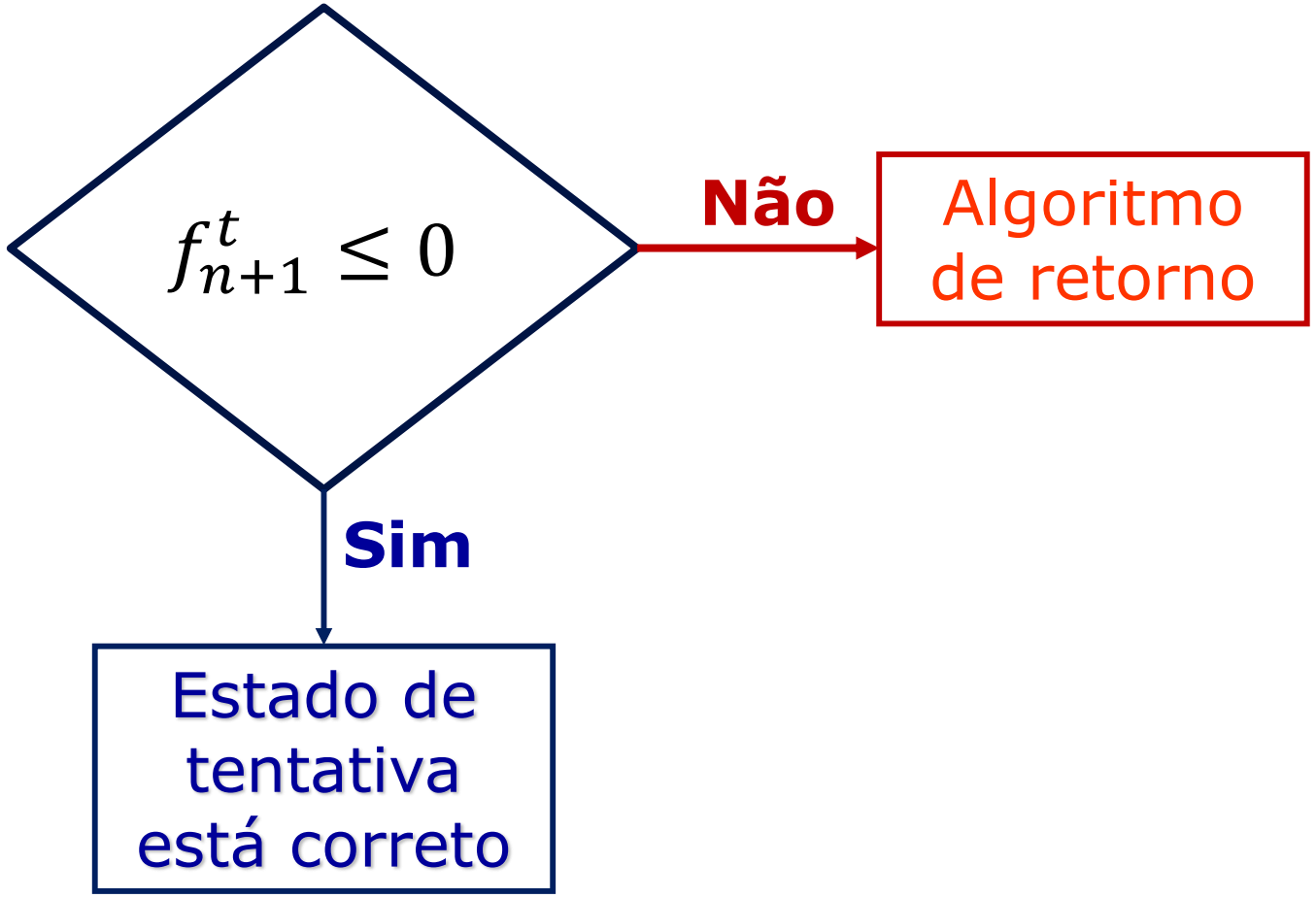
$$f_{n+1} = \left|\sigma_{n+1}\right| - \left(\sigma_y + k\,\alpha_{n+1}\right) \leq 0$$

$$\Delta\varepsilon^p_{n+1} = \Delta\lambda_{n+1}\, sign(\sigma_{n+1})$$

$$\Delta\alpha_{n+1} = \Delta\lambda_{n+1}$$

$$\Delta\lambda_{n+1}\, f_{n+1} = 0$$

PORQUE "ALGORITMO DE RETORNO"?



ALGORITMO DE RETORNO: PREVISÃO ELÁSTICA

$$\sigma_{n+1}^{t} = E\left(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n}^{p}\right)$$

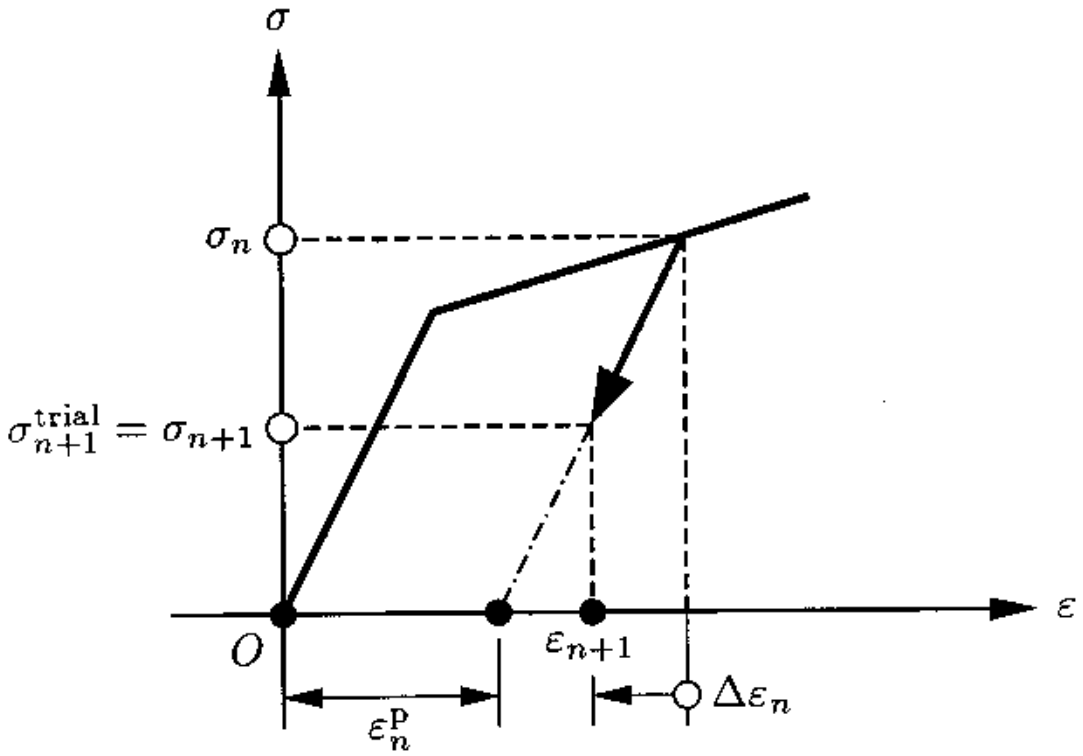
$$f_{n+1}^{trial} = \left|\sigma_{n+1}^{trial}\right| - \left(\sigma_{y} + K\alpha_{n}\right)$$

$$\Delta\alpha = 0$$

PASSO ELÁSTICO

$$\sigma_{n+1}^{t} = E\left(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n}^{p}\right)$$

$$f_{n+1}^{t} = \left|\sigma_{n+1}^{t}\right| - \left(\sigma_{y} + k\,\alpha_{n}\right)$$



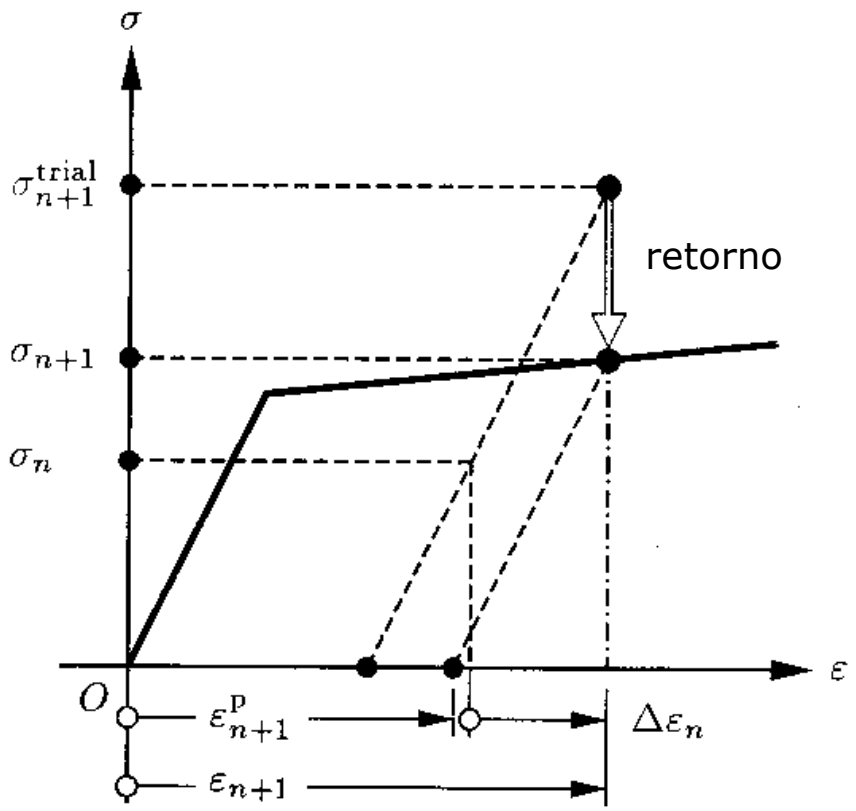
ALGORITMO DE RETORNO

$$\Delta\lambda_{n+1} = \frac{f_{n+1}^{trial}}{E+K} > 0$$

$$\sigma_{n+1} = \left[1 - \frac{\Delta\lambda_{n+1}E}{\left|\sigma_{n+1}^{trial}\right|}\right]\sigma_{n+1}^{trial}$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta\lambda_{n+1}$$

$$\varepsilon_{n+1}^{p} = \varepsilon_n^{p} + \Delta\gamma \sin\left(\sigma_{n+1}^{trial}\right)$$



$$f_{n+1}^{t} = |\sigma_{n+1}| - (\sigma_y + K\alpha_n)$$

$$f_{n+1}^{t} \leq 0$$

$$\varepsilon_{n+1}^{p} = \varepsilon_n^{p}$$
$$\lambda_{n+1} = \lambda_n$$

$$\sigma_{n+1} = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^{p})$$

$$f_{n+1}^{t} > 0$$

$$\Delta\lambda_{n+1} = \frac{f_{n+1}^{t}}{E + K}$$
$$\Delta\varepsilon_{n+1}^{p} = \Delta\lambda_{n+1} \operatorname{sign} \sigma_{n+1}^{t}$$

$$\Delta\sigma_{n+1} = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^{p})$$

MODELO DE FORMA INCREMENTAL

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta\varepsilon_{n+1}$$

$$\Delta\varepsilon_{n+1} = \Delta\varepsilon^e_{n+1} + \Delta\varepsilon^p_{n+1}$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + \Delta\sigma_{n+1}$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta\alpha_{n+1}$$

$$f_{n+1} = \left|\sigma_{n+1}\right| - (\sigma_Y + K\alpha_{n+1}) \leq 0$$

$$f^t_{n+1} = \left|\sigma^t_{n+1}\right| - (\sigma_Y + K\alpha^t_{n+1})$$

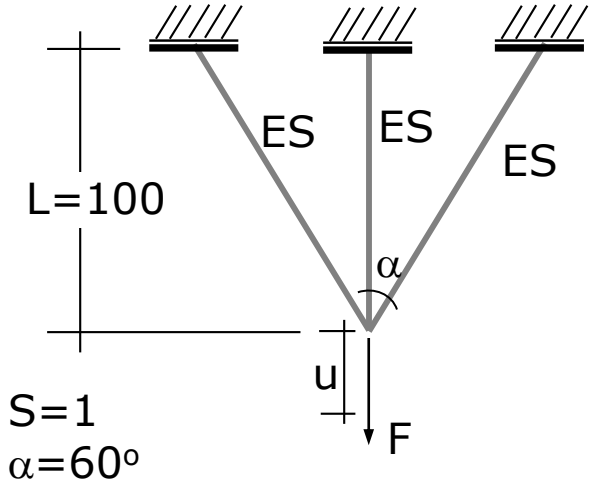
$$se\ f^t_{n+1} < 0 \rightarrow \Delta\varepsilon^p_{n+1} = 0;\ \Delta\alpha_{n+1} = 0\ ;\quad \Delta\sigma_{n+1} = E\Delta\varepsilon_{n+1}$$

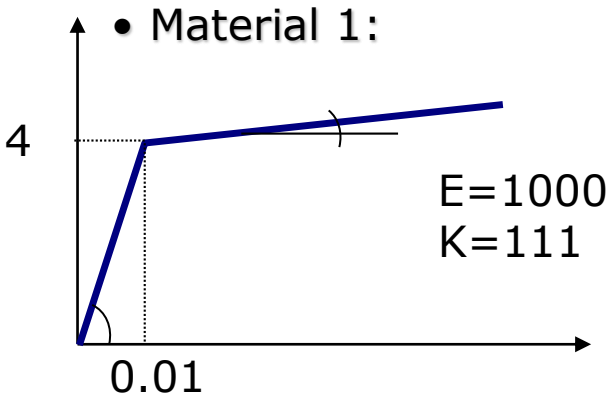
$$se\ \ f^t_{n+1} > 0 \quad \rightarrow \ \Delta\lambda_{n+1} = \frac{f^t_{n+1}}{(E+K)};$$

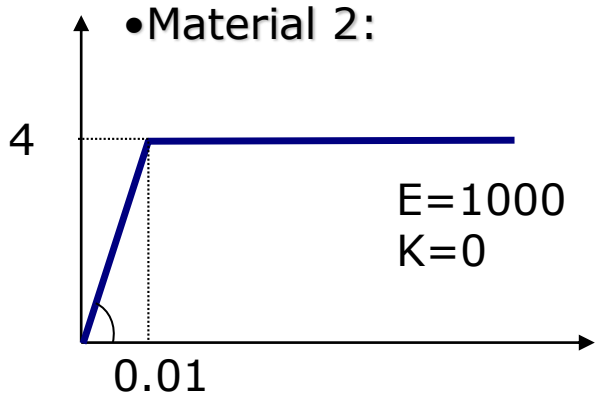
$$\Delta\varepsilon^p_{n+1} = \Delta\lambda_{n+1}\, sign(\sigma^t_{n+1});\ \ \Delta\alpha_{n+1} = \left|\Delta\varepsilon^p_{n+1}\right|\ ;\ \Delta\sigma_{n+1} = E\Delta\varepsilon_{n+1} - E\Delta\varepsilon^p_{n+1}$$

EXEMPLO DE APLICAÇÃO

1. Trace the diagram $F\ x\ u$, para o material 1.
2. Determine o carregamento máximo para estrutura, supondo material elástico perfeitamente plástico (material 2).







LIÇÃO DE CASA

- Fazer o item b do exercício exemplo;
- Fazer um programa que resolva o problema anterior para uma lei de encruamento isótropo não linear.
  - Suponha lei exponencial (próximo slide).
  - Veja que o cálculo de $\Delta\lambda_{n+1}$ exige um procedimento não linear iterativo – utilize Newton:

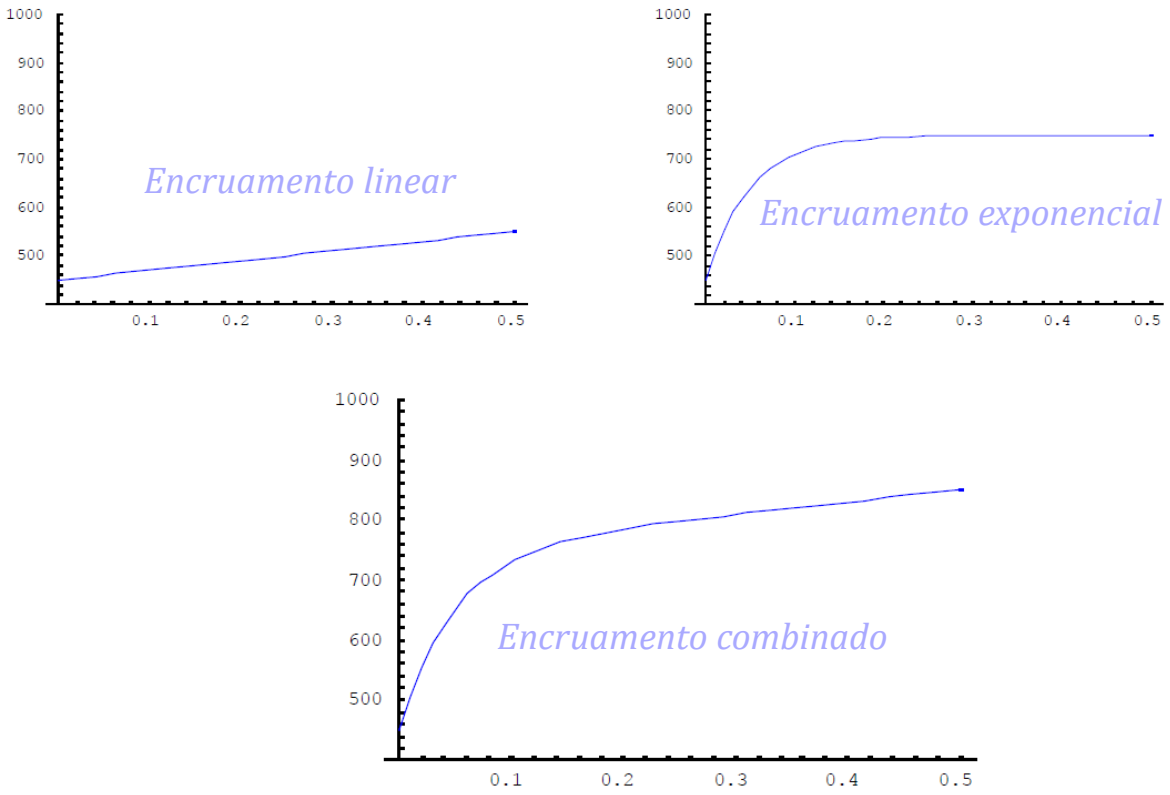
$$f_{n+1}(\Delta\lambda_{n+1}^{i} + \delta\,\Delta\lambda_{n+1}^{i}) \cong f_{n+1}(\Delta\lambda_{n+1}^{i}) + f'_{n+1}\,\delta\,\Delta\lambda_{n+1}^{i} = 0$$

ENCRUAMENTO EXPONENCIAL

$$K(\alpha) = \sigma_y + k\alpha + (\sigma_\infty - \sigma_y)(1 - e^{-\omega\alpha})$$

σ_∞ é uma tensão que limita o regime de encruamento e estabelece o início do processo de escoamento indeterminado. Já ω é um parâmetro material adicional que determina a evolução mais ou menos acentuada do encruamento.

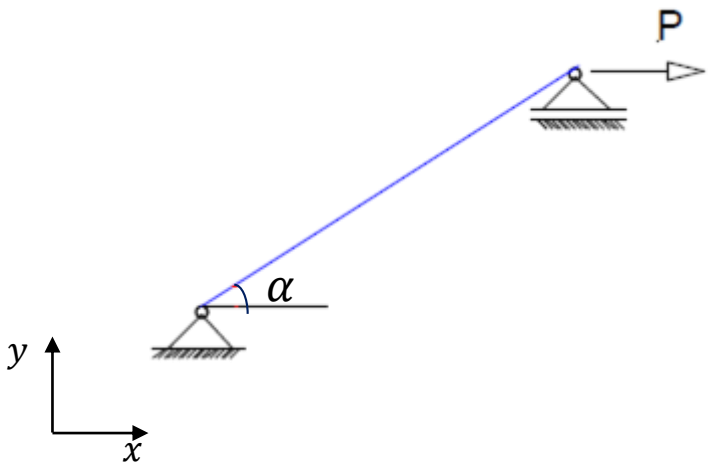
$$\sigma_y = 450;\ \sigma_\infty = 750;\ \omega = 20;\ k = 200$$



ELEMENTO FINITO DE TRELIÇA PLANA

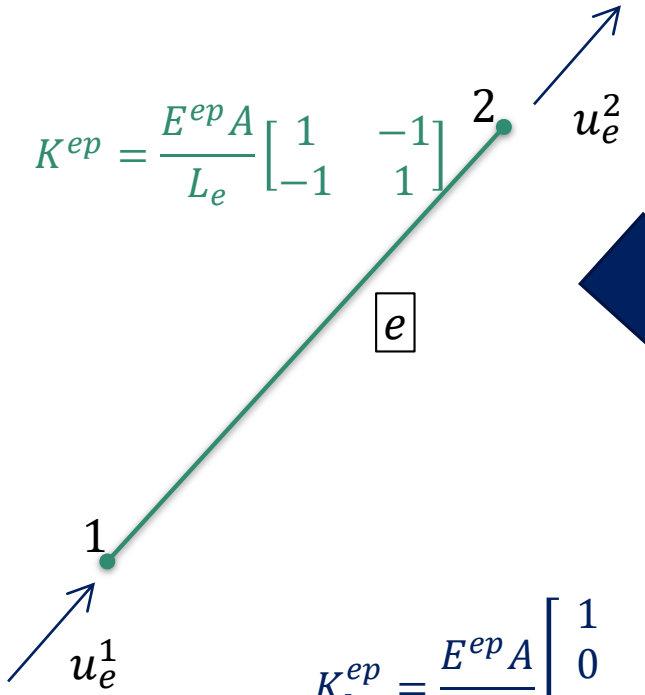
$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix}$$

$$K_{ij} u_j = f_i \quad \text{or} \quad \mathbf{Ku} = \mathbf{f}$$

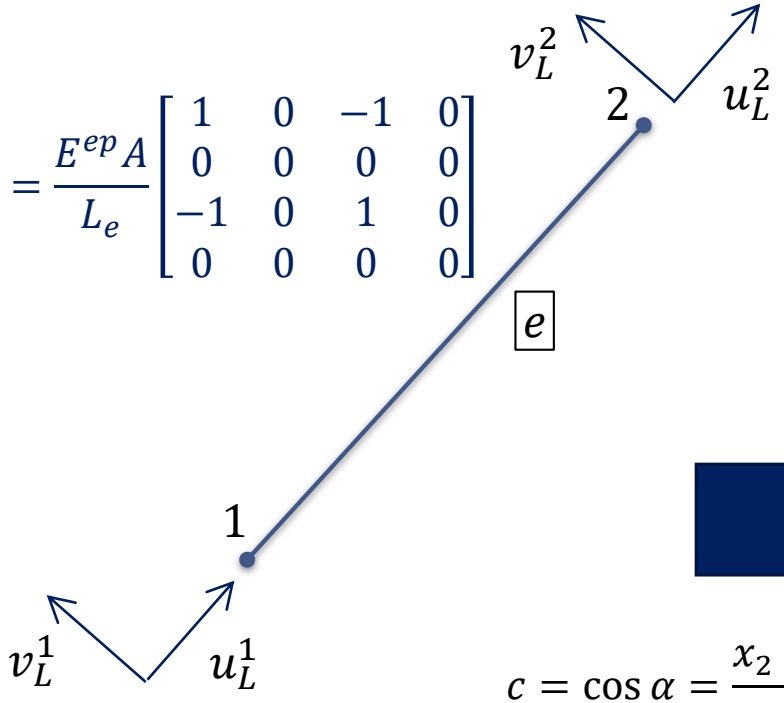


Aqui u_i e f_j indicam a deflexão no i-ésimo nó e a força no j-ésimo nó. A matriz de coeficientes K_{ij} é chamada de matriz de rigidez global, com o componente ij sendo fisicamente a influência do j-ésimo deslocamento na i-ésima força.

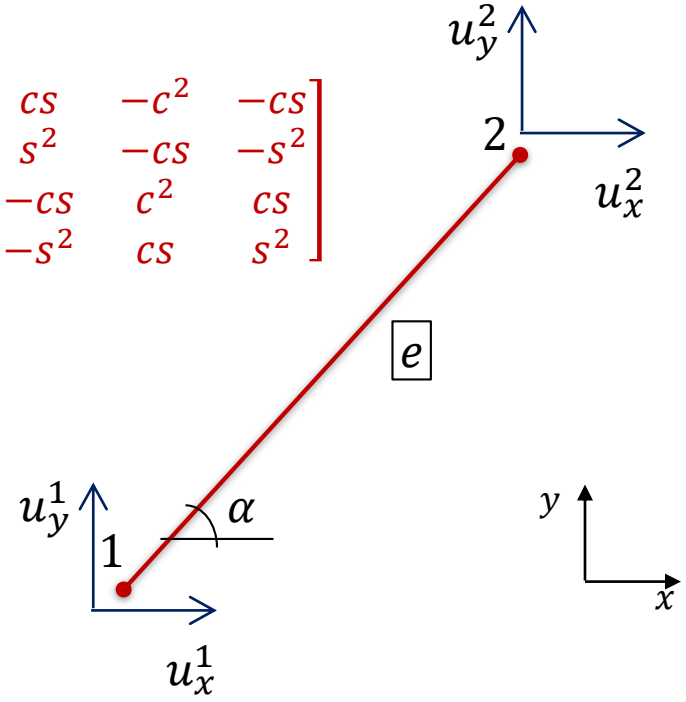
$$K^{ep} = \frac{E^{ep}A}{L_e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$



$$K_L^{ep} = \frac{E^{ep}A}{L_e}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$K_g^{ep} = \frac{E^{ep}A}{L_e}\begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

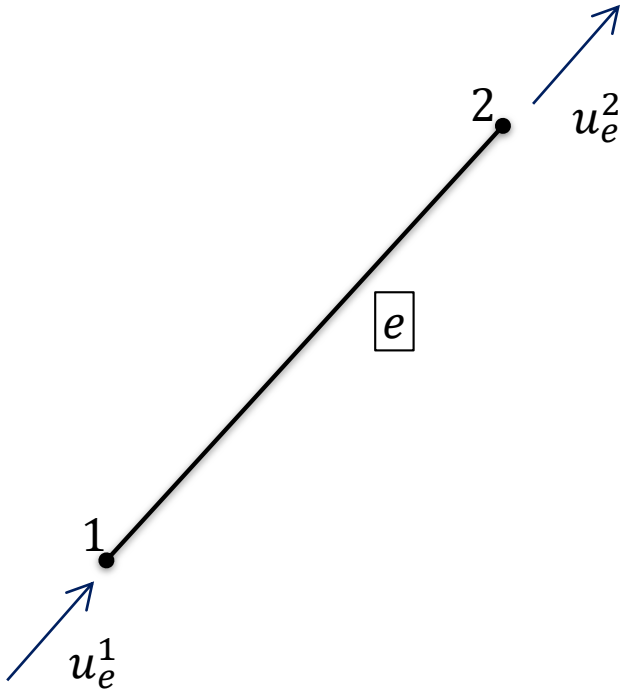


$$c = \cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{L_e} \qquad s = \operatorname{sen}\alpha = \frac{y_2 - y_1}{L_e}$$

$$L_e = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

α é o ângulo de inclinação do eixo da barra em relação à direção do eixo referencial global (x)

$$K^{ep} = \frac{E^{ep}A}{L_e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$



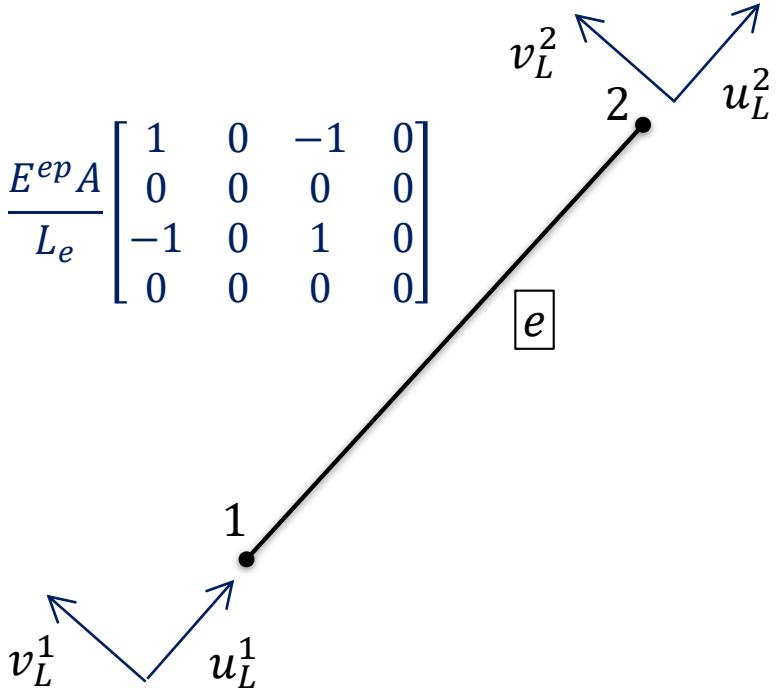
$$\begin{Bmatrix} u_L^1 \\ v_L^1 \\ u_L^2 \\ v_L^2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{T^{(e)T}} \begin{Bmatrix} u_{(e)}^1 \\ u_{(e)}^2 \end{Bmatrix}$$

$$K_L^{ep} = A^{(e)T} K^{ep} A^{(e)}$$

$$F_L = A^{(e)T} F$$

$$K_L^{ep} = T^{(e)T} K^{ep} T^{(e)}$$

$$K_g^{ep} = \frac{E^{ep}A}{L_e}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Linhas e colunas nulas na nova matriz expandida indicam que não há rigidez associada aos novos graus de liberdade, de modo que a barra tem preservada a característica de rigidez associada apenas às deformações axiais (mesmo mudando de direção ocorrem somente alongamentos ou encurtamentos axiais).

$$\begin{Bmatrix} u_x^1 \\ u_y^1 \\ u_x^2 \\ u_y^2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\alpha & -sen\,\alpha & 0 & 0 \\ sen\,\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & -sen\,\alpha \\ 0 & 0 & sen\,\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}}_{R^{(e)}\ \text{ortogonal}} \begin{Bmatrix} u_L^1 \\ v_L^1 \\ u_L^2 \\ v_L^2 \end{Bmatrix}$$

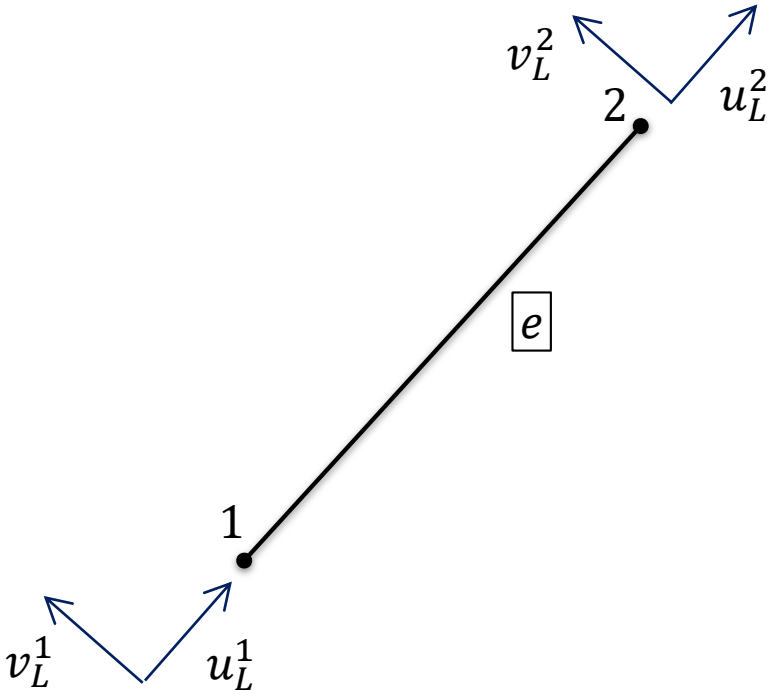
$$F_g = R\,F_L$$

$$K_L^{ep}\,u_L = F_L$$

$$K_L^{ep}\,R^T\,u_g = R^T\,F_g$$

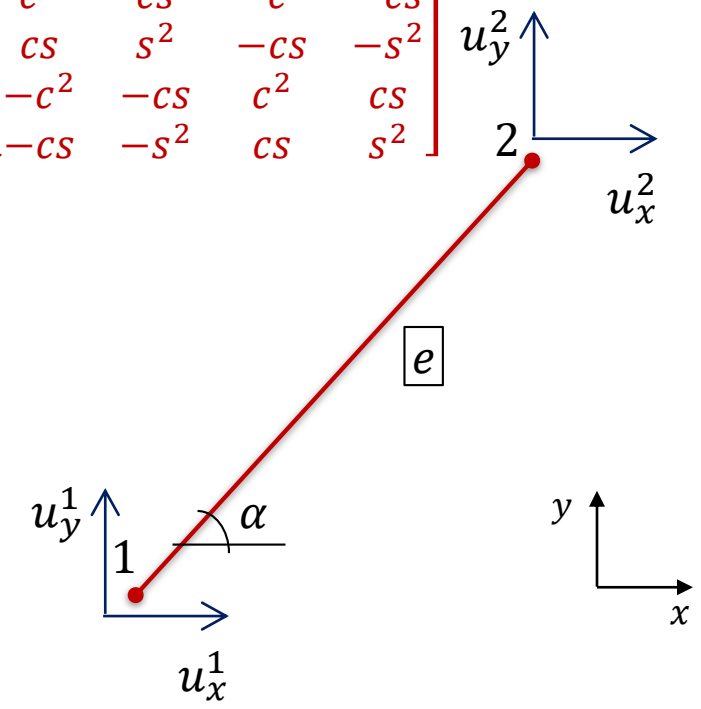
$$R\,K_L^{ep}\,R^T\,u_g = F_g$$

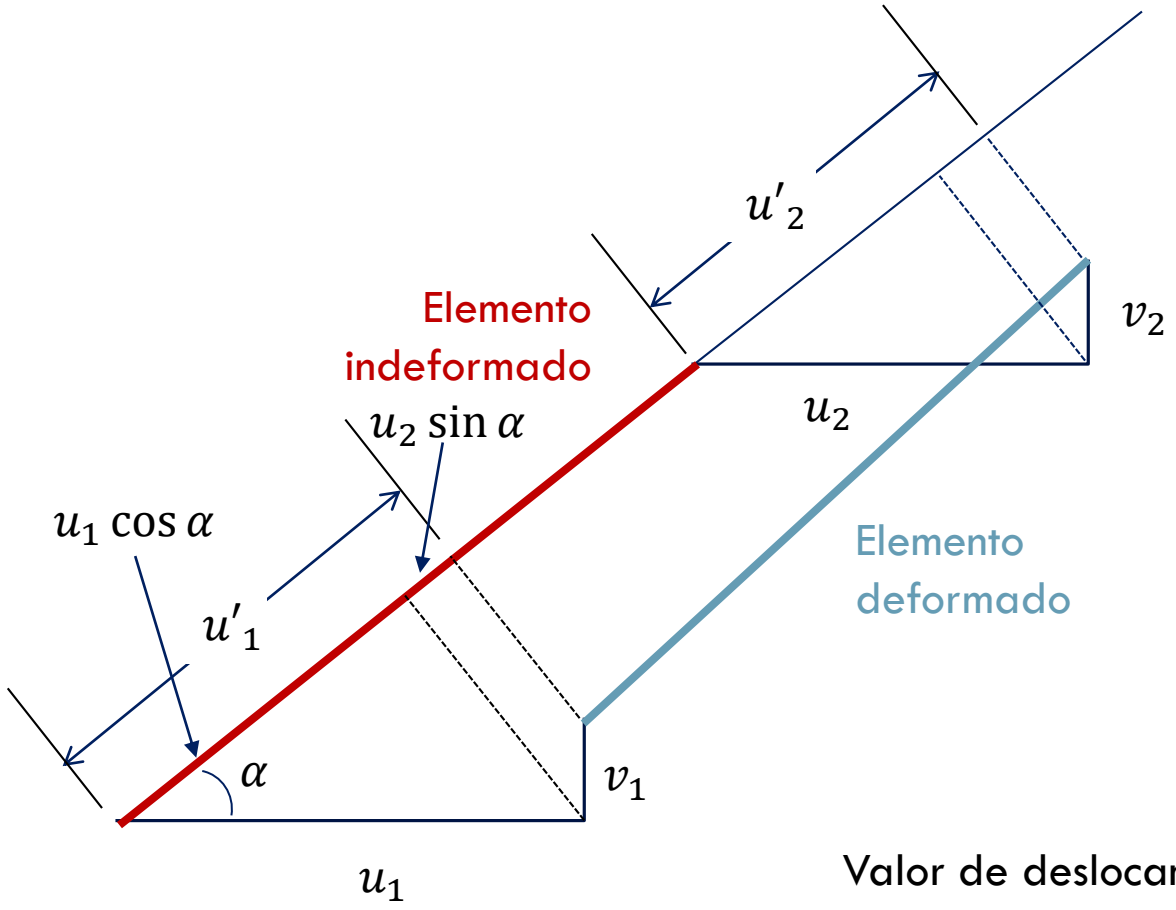
$$K_L^{ep} = \frac{E^{ep}A}{L_e}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Linhas e colunas nulas na nova matriz expandida indicam que não há rigidez associada aos novos graus de liberdade, de modo que a barra tem preservada a característica de rigidez associada apenas às deformações axiais (mesmo mudando de direção ocorrem somente alongamentos ou encurtamentos axiais).

$$K_g^{ep} = \frac{E^{ep}A}{L_e}\begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$



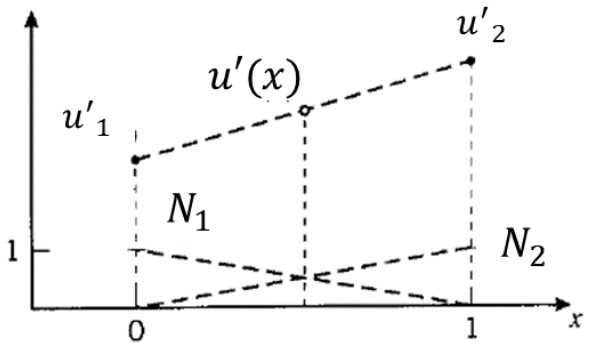


$$\bar{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \qquad \bar{u}' = \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{u}' = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix} \bar{u}$$

Valor de deslocamento em qualquer ponto depende da função de interpolação,

$$u'(x') = N\bar{u}' = [N_1 \quad N_2] \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{bmatrix} = [N_1 \quad N_2] \begin{bmatrix} c & 0 & s & 0 \\ 0 & c & 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$



ANÁLISE DE TENSÕES

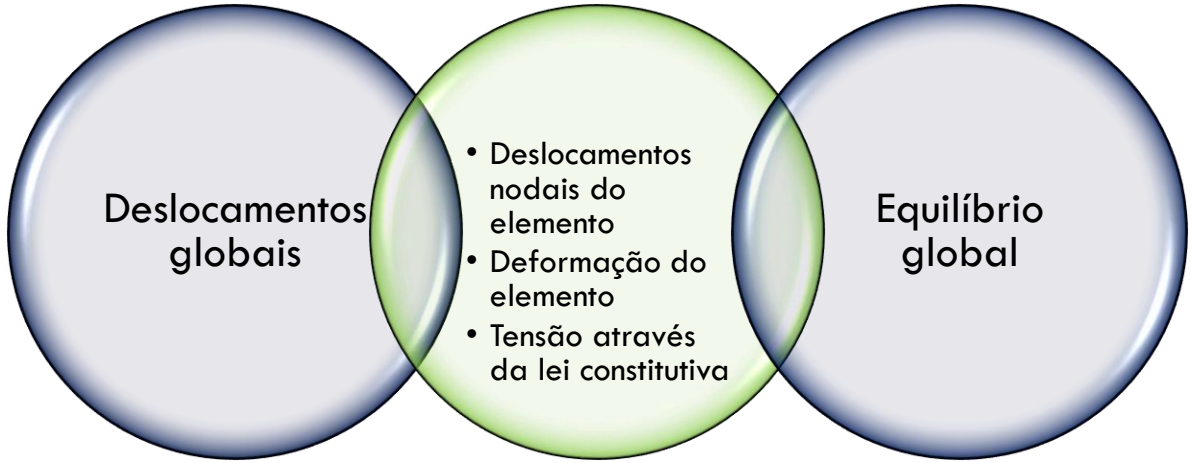
$$\varepsilon = \frac{d}{dx'}u' = B\bar{u}' = B\begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix}\bar{u}$$

$$B = \frac{d}{dx'}N = \frac{1}{L}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{u}' = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix}\bar{u}$$

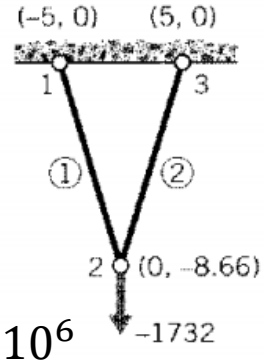
$$\sigma = E\varepsilon = EB\bar{u}' = \frac{E}{L}\begin{bmatrix} -c & -s & c & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Veja que a análise de tensões é feita a nível de elemento!



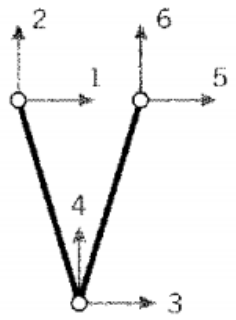
EXEMPLO 01

- Considere o problema de treliça abaixo, com os nós recebendo números "globais" arbitrários de 1 a 3. Como cada nó pode, em geral, se mover em duas direções, há $3 \times 2 = 6$ graus de liberdade no problema. A matriz de rigidez global será então uma matriz 6×6, relacionando os 6 deslocamentos às 6 forças aplicadas externamente. Apenas um dos deslocamentos é desconhecido neste caso, uma vez que todos, exceto o deslocamento vertical do nó 2 (grau de liberdade número 4), são limitados a zero.

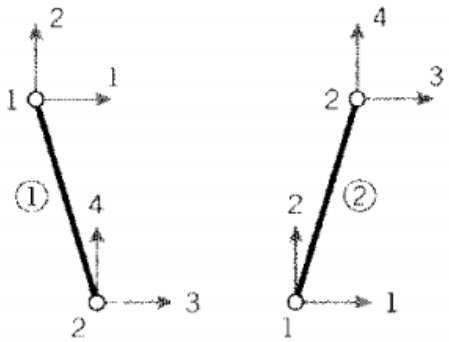


$E = 10^6$

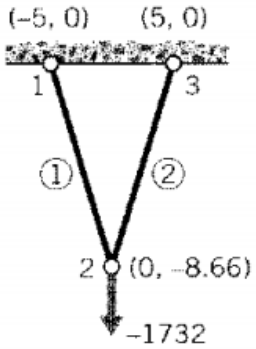
$A = 1$

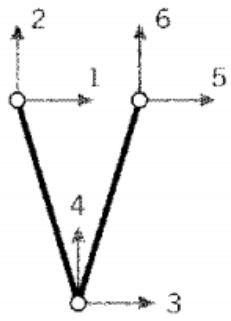


Global DOF

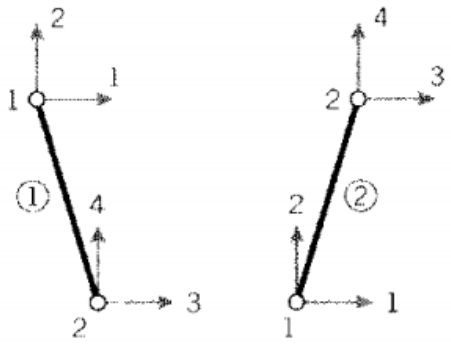


Local DOF





Global DOF



Local DOF

$$k_{(e)} = \frac{E^{ep}A}{L_e}\begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

$$c = \cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{L_e} \qquad s = \operatorname{sen}\alpha = \frac{y_2 - y_1}{L_e}$$

$$L_e = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Barra 1: $c = 0.5; s = -0.866; L \cong 10$

Barra 2: $c = 0.5; s = 0.866; L \cong 10$

$$k_{(1)} = \begin{bmatrix} 25.00 & -43.30 & -25.00 & 43.30 \\ -43.30 & 75.00 & 43.30 & -75.00 \\ -25.00 & 43.30 & 25.00 & -43.30 \\ 43.30 & -75.00 & -43.30 & 75.00 \end{bmatrix} \times 10^3$$

$$k_{(2)} = \begin{bmatrix} 25.00 & 43.30 & -25.00 & -43.30 \\ 43.30 & 75.00 & -43.30 & -75.00 \\ -25.00 & -43.30 & 25.00 & 43.30 \\ -43.30 & -75.00 & 43.30 & 75.00 \end{bmatrix} \times 10^3$$

local	global, element 1	global, element 2
1	1	3
2	2	4
3	3	5
4	4	6

$$k_{23}^{(2)} \longrightarrow K_{4,5}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & k_{13}^{(1)} & k_{14}^{(1)} & 0 & 0 \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} & k_{23}^{(1)} & k_{24}^{(1)} & 0 & 0 \\ k_{31}^{(1)} & k_{32}^{(1)} & k_{33}^{(1)} + k_{11}^{(2)} & k_{34}^{(1)} + k_{12}^{(2)} & k_{13}^{(2)} & k_{14}^{(2)} \\ k_{41}^{(1)} & k_{42}^{(1)} & k_{43}^{(1)} + k_{21}^{(2)} & k_{44}^{(1)} + k_{22}^{(2)} & k_{23}^{(2)} & k_{24}^{(2)} \\ 0 & 0 & k_{31}^{(2)} & k_{32}^{(2)} & k_{33}^{(2)} & k_{34}^{(2)} \\ 0 & 0 & k_{41}^{(2)} & k_{42}^{(2)} & k_{43}^{(2)} & k_{44}^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$10^3 \begin{bmatrix} 25.0 & -43.3 & -25.0 & 43.3 & 0.0 & 0.00 \\ -43.3 & 75.0 & 43.3 & -75.0 & 0.0 & 0.00 \\ -25.0 & 43.3 & 50.0 & 0.0 & -25.0 & -43.30 \\ 43.3 & -75.0 & 0.0 & 150.0 & -43.3 & -75.00 \\ 0.0 & 0.0 & -25.0 & -43.3 & 25.0 & 43.30 \\ 0.0 & 0.0 & -43.3 & -75.0 & 43.3 & 75.00 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \boxed{u_4} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1732 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Em problemas maiores, as equações da matriz são resolvidas para os deslocamentos e forças desconhecidos pela redução gaussiana ou outras técnicas. Nesse problema de dois elementos, a solução para o único deslocamento desconhecido pode ser facilmente derivada,

$$0 + 0 + 0 + 150 \times 10^3 u_4 + 0 + 0 = -1732$$

$$u_4 = -1732/150 \times 10^3 = -0.01155$$

$$0 + 0 + 0 + (43.4)(-0.0115) \times 10^3 + 0 + 0 = f_1$$

$$f_1 = -500$$

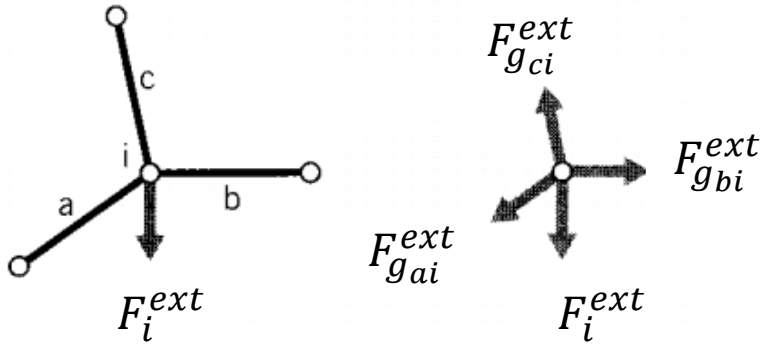
Verifique Truss2D.m no Moodle

PROCEDIMENTO INCREMENTAL-ITERATIVO PARA ANÁLISE DE TRELIÇAS

Seja uma treliça com um número $n_{nós}$ de nós e n_{el} de elementos, numa situação de equilíbrio para certo passo *i* de carregamento ao final do qual se acumularam intensidades de forças nodais concentradas reunidas num vetor F_i^{ext}. Admita-se que nesta situação a condição fundamental de equilíbrio tenha sido atendida, isto é, obtendo-se resíduo nulo no balanço de forças internas e externas,

$$R_i = F_i^{int} - F_i^{ext} = 0$$

$$F_i^{int} = \sum_{e=1}^{n_{el}} M_e^T R_e T^T A \int_{L_e} B_e^T \sigma_e \, dx' \qquad F_i^{ext} = \sum_{e=1}^{n_{el}} M_e^T F_{g_{ei}}^{ext}$$



M_e^T operador que realiza o mapeamento dos graus de liberdade locais do elemento para os globais da estrutura. $R_e T^T$ levam as forças da direção longitudinal da barra para os eixos x,y globais.

EM NOSSO EXEMPLO 01,

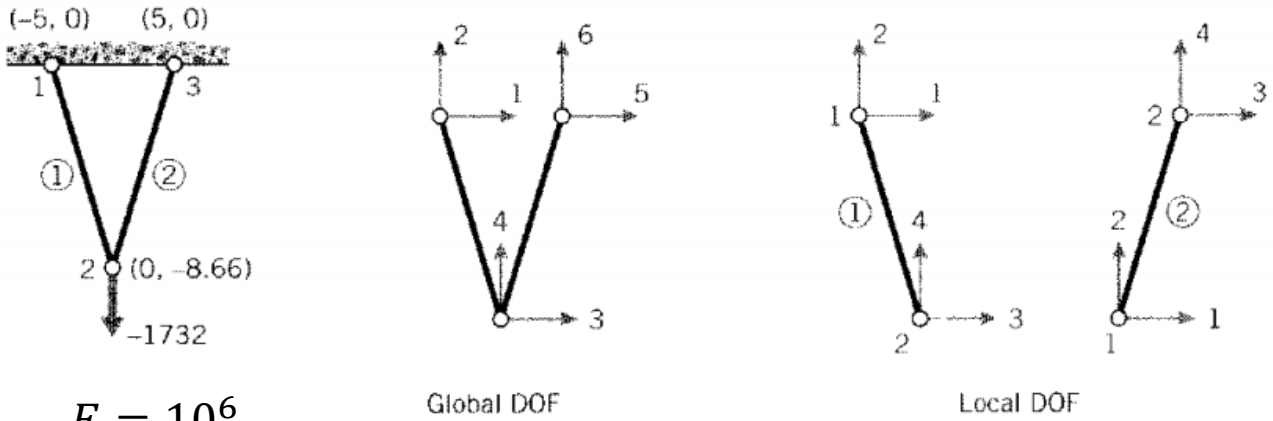
$$F^{\text{int}} = F^{ext}$$

$$F^{\text{int}} = \int B^T \sigma \, dV \qquad B = \frac{1}{L}[-1 \quad 1]$$

$$F^{int} = R_e T^T \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \sigma A$$

$$T^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R^{(e)} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$



$E = 10^6$
$A = 1$

Barra 1: $c = 0.5; s = -0.866; L \cong 10$
Barra 2: $c = 0.5; s = 0.866; \quad L \cong 10$

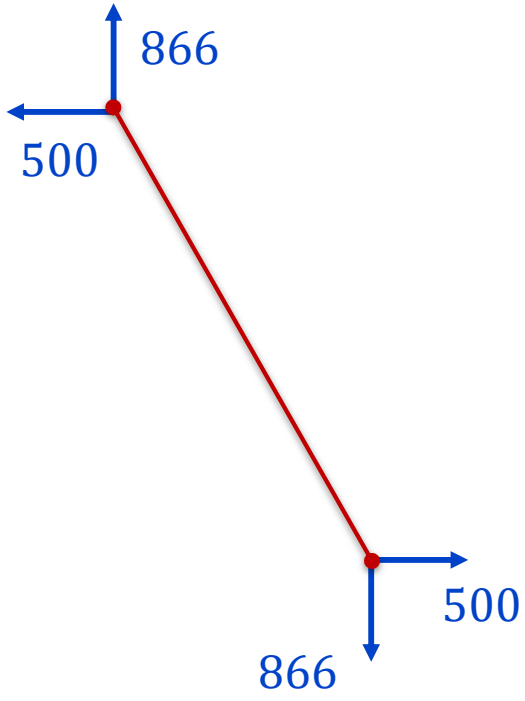
Barra 1: $c = 0.5; s = -0.866; L \cong 10$

$$u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.01155 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -0.5 & 0.866 & 0.5 & -0.866 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.01155 \end{bmatrix} = 0.001$$

$$\sigma = E\varepsilon = 10^6(-0.001) = 1000$$

$$F^{int} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.866 & 0 & 0 \\ -0.866 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.866 \\ 0 & 0 & -0.866 & 0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}(1000)1 = \begin{bmatrix} -500 \\ 866 \\ 500 \\ -866 \end{bmatrix}$$



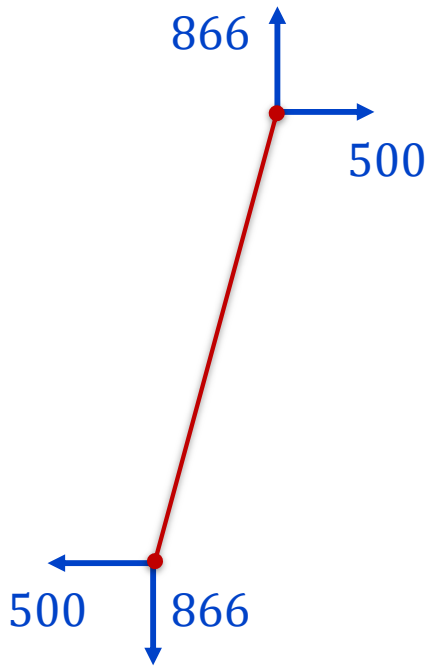
Barra 2: $c = 0.5; s = 0.866; \quad L \cong 10$

$$u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.01155 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 & -0.866 & 0.866 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -0.01155 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.001$$

$$\sigma = E\varepsilon = 10^6(0.01) = 1000$$

$$F^{int} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.866 & 0 & 0 \\ 0.866 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -0.866 \\ 0 & 0 & 0.866 & 0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}(1000)1 = \begin{bmatrix} -500 \\ -866 \\ 500 \\ 866 \end{bmatrix}$$



NOSSO PROBLEMA INCREMENTAL

Dado equilíbrio no passo i, Considere-se que seja imposto um passo de carregamento $i+1$,

$$F_{i+1}^{ext} = F_i^{ext} + \Delta F_{i+1}^{ext}$$

O problema consiste em determinar

$$u_{i+1} = u_i + \Delta u_{i+1}$$

que dá origem em cada elemento a uma distribuição de tensões

$$\sigma_{e(i+1)}$$

e de variáveis internas

$$\varepsilon_{e(i+1)}^{p} \quad \text{e} \quad \alpha_{e(i+1)}$$

compatíveis com o modelo constitutivo, de tal modo que

$$F_{i+1}^{int} - F_{i+1}^{ext} = 0$$

Em virtude da não-linearidade da relação de equilíbrio, decorrente da não-linearidade do modelo constitutivo, a estratégia adotada para a obtenção da solução equilibrada é a de Newton-Raphson, prevendo-se uma estimativa inicial para a solução e corrigindo-se iterativamente o erro na condição de equilíbrio linearizada. **Configura-se, assim, um processo iterativo dentro do incremento de carregamento.**

SOLUÇÃO

- Dada a parcela de correção do deslocamento obtida na 'k-ésima' iteração de correção dentro do passo $(i+1)$, $\Delta u_{(i+1)}^{k}$. Resume-se a estratégia iterativa de solução no algoritmo que segue:

A. Com o campo de deformação $\varepsilon_{e(i+1)}^{k}$ obtém-se o obtém-se o campo de tensões pelo modelo constitutivo $\sigma_{e(i+1)}^{k}$

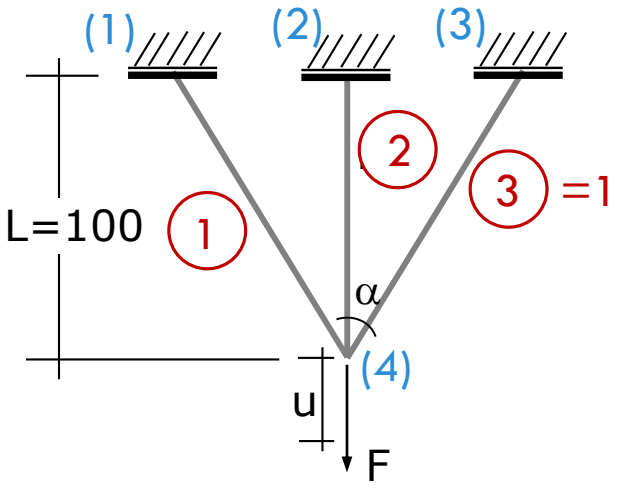
Nível de elemento, aprendemos na última aula!!!!

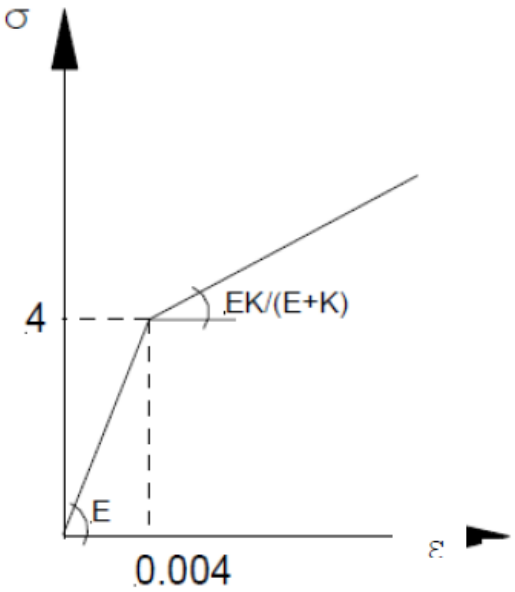
B. Passa-se à verificação do equilíbrio global, calculando-se $F_{(i+1)}^{int(k)}$ a partir da contribuição de todos os elementos. Se o equilíbrio entre $F_{(i+1)}^{int(k)}$ e $F_{(i+1)}^{ext}$ é verificado para certa tolerância prédefinida, então a solução foi encontrada e pode-se passar a um novo incremento de carregamento.

C. Caso contrário determina-se nova correção $\Delta u_{(i+1)}^{k+1}$ e volta-se ao passo **A** com $k = k+1$.

$$\Delta u_{(i+1)}^{(k+1)} = -\left[K_{(i+1)}^{ep(k)}\right]^{-1}\left[F^{int}(\sigma_{(i+1)}^{k}) - F_{(i+1)}^{ext}\right]$$

EXEMPLO 02





$$E^{ep} = \begin{cases} E \;\; se \;\; \Delta\lambda > 0 \\ \dfrac{E\,K}{(E+K)} \;\; se \;\; \Delta\lambda = 0 \end{cases}$$

Dados complementares: $\alpha = 60^{o}$; $S = 1$; $E = 1000$; $K = 111.11$; $EK/(E+K) = 100$.

Matrizes tangentes,

$$K_1 = \begin{bmatrix} 3.7500 & -2.1651 & -3.7500 & 2.1651 \\ -2.1651 & 1.2500 & 2.1651 & -1.2500 \\ -3.7500 & 2.1651 & 3.7500 & -2.1651 \\ 2.1651 & -1.2500 & -2.1651 & 1.2500 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 3.7500 & 2.1651 & -3.7500 & -2.1651 \\ 2.1651 & 1.2500 & -2.1651 & -1.2500 \\ -3.7500 & -2.1651 & 3.7500 & 2.1651 \\ -2.1651 & -1.2500 & 2.1651 & 1.2500 \end{bmatrix}$$

$$K_G = \begin{bmatrix} 3.7500 & -2.1651 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3.7500 & 2.1651 \\ -2.1651 & 1.2500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.1651 & -1.2500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10.0000 & 0 & 0 & 0 & -10.0000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.7500 & 2.1651 & -3.7500 & -2.1651 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.1651 & 1.2500 & -2.1651 & -1.2500 \\ -3.7500 & 2.1651 & 0 & 0 & -3.7500 & -2.1651 & 7.5000 & 0 \\ 2.1651 & -1.2500 & 0 & -10.0000 & -2.1651 & -1.2500 & 0 & 12.5000 \end{bmatrix}$$

$$K_{G,red} = \begin{bmatrix} 7.5 & 0 \\ 0 & 12.5 \end{bmatrix}$$

$$K_{G,red} = \begin{bmatrix} 7.5 & 0 \\ 0 & 12.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_7 \\ u_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

u_7 e u_8 são, respectivamente, as componentes horizontal e vertical do deslocamento do nó *4*

$$u_7 = 0$$

$$u_8 = \frac{5}{12.5} = 0{,}4$$

Tensões e deformações,

Barra 1: $c = 0.866;\ s = -0.5; L = 200$

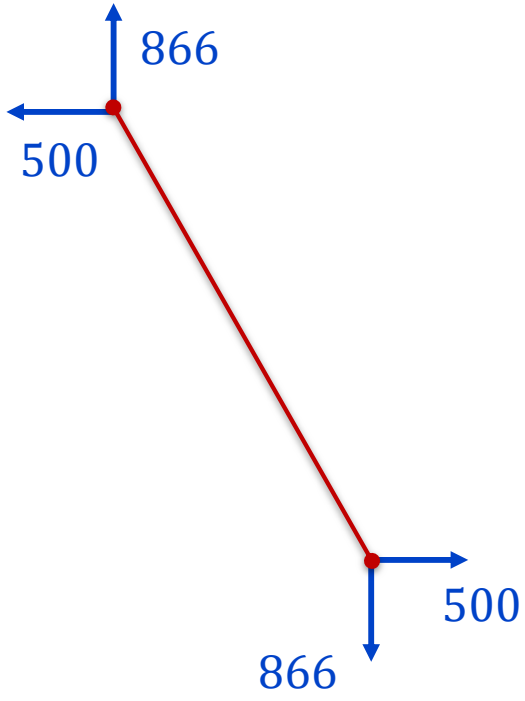
$$\bar{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.4 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{L}\begin{bmatrix} -c & -s & c & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{200}\begin{bmatrix} -0.866 & 0.5 & 0.866 & -0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.4 \end{bmatrix} = 0.001$$

$$\sigma = E\varepsilon = 10^3(0.001) = 1$$

$$F^{int} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.866 & 0 & 0 \\ -0.866 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.866 \\ 0 & 0 & -0.866 & 0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}(1)1 = \begin{bmatrix} -0.500 \\ 0.866 \\ 0.500 \\ -0.866 \end{bmatrix}$$



Continuação nas notas de aula

LIÇÃO DE CASA

- Fazer um programa que resolva treliça bidimensional para uma lei de encruamento isótropo linear.
- Responder às questões disponibilizadas no Moodle com uso do seu programa.

FIM DA AULA PLASTICIDADE EM TRELIÇAS