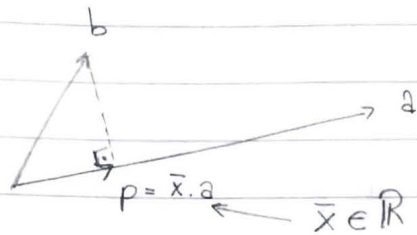


Projeções e MMQ



p = projeção ortogonal de b
na direção de a

Temos que encontrar o número $\bar{x}$ tal que $(\vec{b} - \vec{p}) = (\vec{b} - \bar{x}\vec{a})$ seja perpendicular a a , isto é, $\vec{a}^T(\vec{b} - \bar{x}\vec{a}) = 0$

$$\vec{a}^T(\vec{b} - \bar{x}\vec{a}) = 0$$

$$\vec{a}^T\vec{b} - \vec{a}^T(\bar{x}\vec{a}) = 0$$

$$\vec{a}^T\vec{b} = \bar{x}(\vec{a}^T\vec{a})$$

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\vec{a}^T\vec{b}}{\vec{a}^T\vec{a}}}$$

$$p = \frac{\vec{a}^T\vec{b}}{\vec{a}^T\vec{a}} \cdot \vec{a} \Leftrightarrow p = \frac{\vec{a}^T\vec{b}}{\|\vec{a}\|^2} \cdot \vec{a}$$

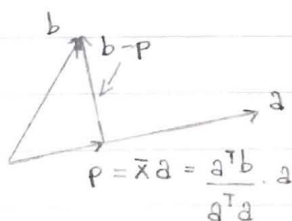
$$\vec{a}^T\vec{a} = \|\vec{a}\|^2$$

$$\hookrightarrow a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$$

Ex.: $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $p = \frac{\vec{a}^T\vec{b}}{\vec{a}^T\vec{a}} \cdot \vec{a} = \frac{6}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

Ex.: $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ $\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ $p = \frac{\vec{a}^T\vec{b}}{\vec{a}^T\vec{a}} \cdot \vec{a} = \frac{0}{13} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Desigualdade de Cauchy-Schwarz



$$0 \leq \|\vec{b} - \vec{p}\|^2 = (\vec{b} - \vec{p})^T(\vec{b} - \vec{p}) = \vec{b}^T\vec{b} + \vec{p}^T\vec{p} - 2(\vec{b}^T\vec{p})$$

$$= \vec{b}^T\vec{b} + \left(\frac{\vec{a}^T\vec{b}}{\vec{a}^T\vec{a}}\right)^2 \vec{a}^T\vec{a} - 2\left(\frac{\vec{a}^T\vec{b}}{\vec{a}^T\vec{a}}\right) \vec{b}^T\vec{a} = \vec{b}^T\vec{b} - \frac{(\vec{a}^T\vec{b})^2}{\vec{a}^T\vec{a}}$$

$$\frac{(\vec{a}^T\vec{b})^2}{\vec{a}^T\vec{a}} \leq \vec{b}^T\vec{b}$$

$$(\vec{a}^T\vec{b})^2 \leq (\vec{a}^T\vec{a})(\vec{b}^T\vec{b}) = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2$$

desigualdade de Cauchy-Schwarz $\boxed{|\vec{a}^T\vec{b}| \leq \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}$

$$p = \frac{(a^T b)}{(a^T a)} \cdot a = \frac{1}{(a^T a)} \cdot a \cdot (a^T b)$$

$$= \frac{1}{(a^T a)} \cdot (aa^T) \cdot b = \frac{1}{\|a\|^2} (aa^T) b$$

$$p = Pa \cdot b$$

Ex.: $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $a^T a = 3$

$$aa^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

P tem duas propriedades importantes

(i) $P^T = P$ (P é simétrica)

(ii) $P^2 = P$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$P = \frac{1}{\|a\|^2} \cdot aa^T$$

$$P^T = \frac{1}{\|a\|^2} (aa^T)^T = \frac{1}{\|a\|^2} \cdot (a^T)^T a^T = \frac{1}{\|a\|^2} a \cdot a^T = P$$

$$P^2 = \frac{1}{\|a\|^4} (aa^T)(aa^T) = \frac{1}{\|a\|^4} \cdot a \cdot \underbrace{(a^T a)}_{\|a\|^2} a^T = \frac{1}{\|a\|^2} aa^T = P$$

Resolver o sistema sobredeterminado

$$\begin{cases} 2x = b_1 \\ 3x = b_2 \\ 4x = b_3 \end{cases}$$

↳ com mais equações do que variáveis

Este sistema só tem solução se $b_1 : b_2 : b_3 = 2 : 3 : 4$

Tentamos MINIMIZAR o ERRO

$$E^2 = (b_1 - 2x)^2 + (b_2 - 3x)^2 + (b_3 - 4x)^2$$

$\frac{dE^2}{dx} = 0$ para encontrar um ponto crítico da função $E^2(x)$ que, com sorte, será um mínimo

$$= -2 \left[(b_1 - 2x) 2 + (b_2 - 3x) 3 + (b_3 - 4x) 4 \right]$$

$$(b_1 - 2x)2 + (b_2 - 3x)3 + (b_3 - 4x)4 = 0$$

$$2b_1 + 3b_2 + 4b_3 = (2^2 + 3^2 + 4^2)x$$

Portanto, a solução $\bar{x}$ que minimiza $E^2(x)$ é

$$\bar{x} = \frac{2b_1 + 3b_2 + 4b_3}{2^2 + 3^2 + 4^2} = \frac{a^T b}{a^T a}$$

A = matriz $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} | \\ a_1 \\ | \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} | \\ a_2 \\ | \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} | \\ a_n \\ | \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto Ax \in \mathbb{R}^m$$

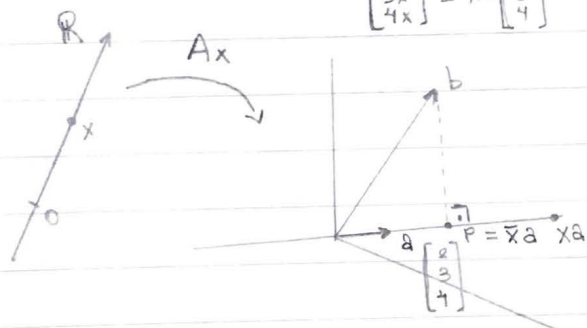
Transformação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$

no exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

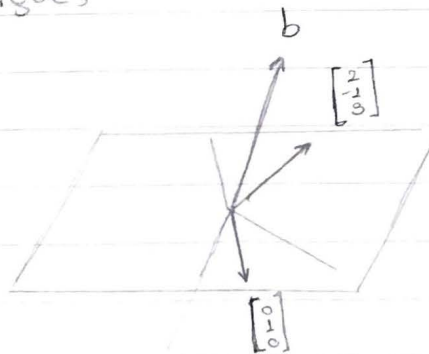
$$\mathbb{R} \ni x \mapsto Ax \in \mathbb{R}^3$$

$$\begin{bmatrix} 2x \\ 3x \\ 4x \end{bmatrix} = x \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$



O sistema $Ax = b$ tem $\begin{cases} m \text{ linhas} = m \text{ equações} \\ n \text{ incógnitas} \end{cases}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Dado $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ é muito pouco provável que o

sistema $Ax = b$ $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ tenha solução

$$\begin{cases} 2x_1 = b_1 \\ -x_1 + x_2 = b_2 \\ 3x_1 = b_3 \end{cases}$$

A solução pelo método dos mínimos quadrados de $Ax = b$. Consiste em encontrar $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$ de forma que a distância $\|b - A\bar{x}\|^2$ seja mínima, o que é o mesmo que dizer que $p = A\bar{x}$ é a projeção ortogonal de b sobre o espaço coluna de A (Espaço coluna de A (Imagem da transformação $x \mapsto Ax$) é o subespaço de $\mathbb{R}^m$ de todas combinações lineares das colunas de A). Isto é, queremos encontrar $p = Ax$ de forma que $(b-p)$ seja ortogonal ao espaço coluna de A .

Para que $(b-p)$ seja $\perp$ ao espaço coluna de A , basta verificar que $(b-p)$ é $\perp$ a todas as colunas de A . Isto é,

$$A = \begin{bmatrix} | & | & | & \dots & | \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ | & | & | & \dots & | \end{bmatrix} \quad \begin{cases} a_1^T (b-p) = 0 \\ a_2^T (b-p) = 0 \\ \vdots \\ a_n^T (b-p) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -a_1^T \\ -a_2^T \\ \vdots \\ -a_n^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} | \\ b-p \\ | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T(b-p) = 0$$

$$A^T p = A^T b$$

$$\boxed{A^T A x = A^T b}$$

Queremos encontrar x que resolva este sistema

Ex.: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ simétrica

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b_1 - b_2 + 3b_3 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b_1 - b_2 + 3b_3 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

resolvido encontramos

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$$

$A^T A$ é uma matriz quadrada e simétrica

$$(A^T A)^T = (A^T)^T (A)^T = A^T A$$

A projeção ortogonal de p no espaço coluna de A é encontrada resolvendo o sistema (quadrado e simétrico)

$$A^T A x = A^T b$$

Se $\bar{x}$ é a solução deste sistema a projeção $p = A \bar{x}$

$$\bar{x} = (A^T A)^{-1} (A^T b)$$

$$p = A \bar{x} = A (A^T A)^{-1} A^T b$$

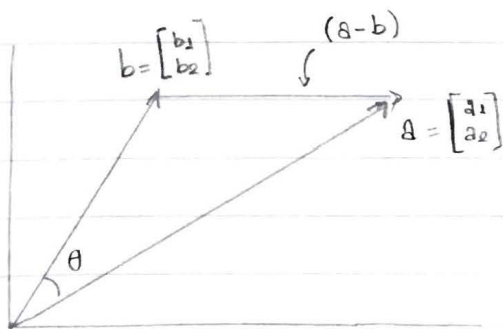
$$\begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{bmatrix} [x] = \begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = \frac{a^T b}{a^T a}$$

$$p = \frac{a^T b}{a^T a} \cdot a = a \cdot \frac{a^T b}{a^T a}$$

$$p = a (a^T a)^{-1} \cdot a^T b$$

Produto interno e cossenos



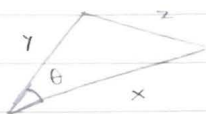
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

02/10/19

WINCOR
NIXDORF

lei dos cossenos

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta$$



$$\|a\|^2 = a^T a$$

$$\|a-b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\|a\|\|b\|\cos \theta$$

$$(a-b)^T (a-b) = a^T a + b^T b - 2\sqrt{a^T a} \sqrt{b^T b} \cos \theta$$

$$a^T a + b^T b - 2a^T b = a^T a + b^T b - 2\sqrt{a^T a} \sqrt{b^T b} \cos \theta$$

$$\frac{a^T b}{\|a\| \|b\|} = \cos \theta$$

$$\left(\frac{a}{\|a\|} \right)^T \left(\frac{b}{\|b\|} \right) = \cos \theta$$

Resolver sistemas sobredeterminados (com mais equações do que incógnitas) usando MMQ

$$Ax = b$$

onde $A_{m \times n}$ com $m > n$

MMQ: Resolução de $Ax = b$ por MMQ.

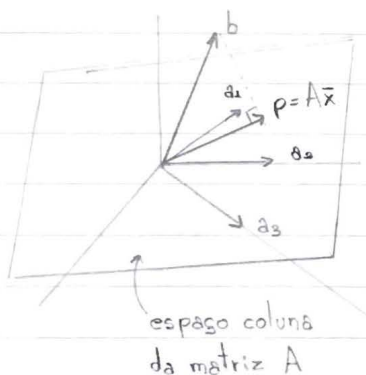
Multiplicamos ambos os lados da equação por A^T :

$$A^T A x = A^T b$$

← este é um sistema quadrado e simétrico ($n \times n$)

a solução deste sistema é $\bar{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$

A projeção do vetor b no espaço coluna de A é



$$p = A\bar{x} = A(A^T A)^{-1} A^T b$$

$$\text{Ex.: } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b ?$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 23 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{26-25} \begin{bmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 23 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \times 9 - 5 \times 23 \\ -5 \times 9 + 2 \times 23 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T A x = A^T b \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 13 \end{bmatrix}$$

$$p = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot \bar{x}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}}_{A^T} \times \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}}_b = \underbrace{\begin{bmatrix} 9 \\ 23 \end{bmatrix}}_{A^T b}$$

$Qx = b$ eliminação
gaussiana encontramos a solução $\bar{x}$
do sistema

Isto é, se multiplicamos Q pelo vetor $\bar{x}$ obtemos b .
A matriz inversa de Q , se existe, é uma matriz R tal que
 $RQ = QR = I \leftarrow$ identidade

(inversa de Q é denotada Q^{-1})

Se estamos querendo resolver $Qx = b$ e sabemos que Q tem uma inversa Q^{-1}

$$Q^{-1}(Qx = b)$$

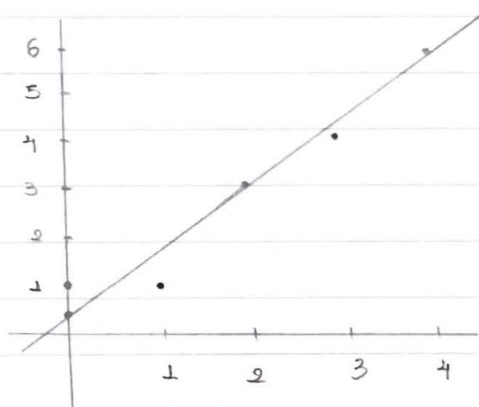
$$Q^{-1}(Qx) = Q^{-1}b \Leftrightarrow (Q^{-1}Q)x = Q^{-1}b \Leftrightarrow \boxed{x = Q^{-1}b}$$

Teoremas de Álgebra Linear: $Qx = b$ tem solução (única) para toda escolha de b se e só se Q tem inversa

Neste caso, a solução de $Qx = b$ é sempre $\boxed{\bar{x} = Q^{-1}b}$

Regressão Linear

t	$s(t)$
$t_1 = 0$	1
$t_2 = 1$	1
$t_3 = 2$	3
$t_4 = 3$	4
$t_5 = 4$	6



$$s(t) = s_0 + vt$$

$$s_0 + v \cdot 0 = 1$$

$$s_0 + v \cdot 1 = 1$$

$$s_0 + v \cdot 2 = 3$$

$$s_0 + v \cdot 3 = 4$$

$$s_0 + v \cdot 4 = 6$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_0 \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot x = b$$

$$A^T A \cdot x = A^T b$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_0 \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 43 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{150 - 100} \begin{bmatrix} 30 & -10 \\ -10 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 43 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{50} \begin{bmatrix} 30 \cdot 15 - 43 \cdot 30 \\ -10 \cdot 15 + 5 \cdot 43 \end{bmatrix} = \frac{1}{50} \begin{bmatrix} 20 \\ 65 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 \\ 13/10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4 \\ 1,3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} s_0 = 0,4 \\ v = 1,3 \end{cases}$$

$$s(t) = 0,4 + 1,3t$$

$$s(t) = s_0 + vt$$

Procuramos s_0 e v de forma a "minimizar as distâncias entre $s(t_i)$ e b_i "

$$E^2(s, v) = [(s + vt_1) - b_1]^2 + [(s + vt_2) - b_2]^2 + \dots + [(s + vt_5) - b_5]^2$$

$$E^2(s, v) = \sum_{i=1}^5 [(s + vt_i) - b_i]^2$$

$$\frac{\partial E^2}{\partial s} = \sum_{i=1}^5 2[(s + vt_i) - b_i] = 0$$

$$\frac{\partial E^2}{\partial v} = \sum_{i=1}^5 2[(s + vt_i) - b_i] t_i = 0$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^5 [(s + vt_i) - b_i] = 0 \\ \sum_{i=1}^5 [(s + vt_i) - b_i] t_i = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^5 (s + vt_i) = \sum_{i=1}^5 b_i \\ \sum_{i=1}^5 (s + vt_i) t_i = \sum_{i=1}^5 b_i t_i \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5s + v \left(\sum_{i=1}^5 t_i \right) = \sum_{i=1}^5 b_i \\ \left(\sum_{i=1}^5 t_i \right) s + v \left(\sum_{i=1}^5 t_i^2 \right) = \sum_{i=1}^5 b_i t_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5s + 10v = 15 \\ 10s + 30v = 43 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 43 \end{bmatrix}$$