Lista 4 MAE0119 - Introdução à Probabilidade e à Estatística

Prof^a Cláudia Peixoto

2^o Semestre 2019

Exercício 1 Sejam X e Y duas variáveis aleatórias tendo a função de probabilidade conjunta dada por:

X / Y	-1	0	2	6
-2	1/9	1/27	1/27	1/9
1	2/9	0	1/9	1/9
3	0	0	1/9	4/27

As variáveis X e Y são independentes? Determine as probabilidades dos seguintes eventos:

- (a) Y é par
- (b) XY é ímpar
- (c) $X > 0$ e $Y \geq 0$

Determine a função de probabilidade, média e variância de

- (d) $U = X + Y$
- (e) $V = X - Y$
- (f) $W = \min\{X, Y\}$
- (g) $Z = \max\{X, Y\}$

Exercício 2 Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes com distribuição uniforme em $\{0, 1, \dots, N\}$. Determine:

- (a) $\mathbb{P}(X \geq Y)$
- (b) $\mathbb{P}(X = Y)$
- (c) A função de probabilidade de $\min(X, Y)$
- (d) A função de probabilidade de $\max(X, Y)$
- (e) A função de probabilidade de $|X - Y|$

Exercício 3 Sejam X e Y duas variáveis aleatórias independentes com distribuição geométrica de parâmetros p_1 e p_2 , respectivamente. Determine:

- (a) $\mathbb{P}(X \geq Y)$
- (b) $\mathbb{P}(X = Y)$
- (c) A função de probabilidade de $\min(X, Y)$
- (e) A função de probabilidade de $X + Y$

Exercício 4 Seja X uma variável aleatória geometricamente distribuída com parâmetro p e $M > 0$ uma constante dada. Seja

$$Y = \begin{cases} X, & \text{se } X < M \\ M, & \text{se } X \geq M \end{cases}$$

isto é, $Y = \min\{X, M\}$. Determine a Função de Probabilidade de Y .

Exercício 5 (SOA) Sejam M e N variáveis aleatórias tais que $Var(M) = 1600$, $Var(N) = 900$, e a correlação entre M e N é 0.64. Calcular $Var(M + N)$.

Exercício 6 Suponha que X e Y são duas variáveis aleatórias independentes tais que $E(X^4) = 2$, $E(Y^2) = 1$, $E(X^2) = 1$ e $E(Y) = 0$. Determine $Var(X^2Y)$.

Exercício 7 Sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas tendo função de densidade conjunta dada por $f(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda y}$, $0 \leq x \leq y < \infty$ e $f(x, y) = 0$ para outros valores de x e y . Obtenha as densidades marginais de X e Y . Obtenha a função de distribuição acumulada conjunta de X e Y .

Exercício 8 Seja $f(x, y) = c(y - x)^\alpha$, $0 \leq x < y \leq 1$, e $f(x, y) = 0$ para outros valores de x e y .

- (a) Para que valores de α se pode escolher c para fazer de f uma função densidade de probabilidade?
- (b) Como se deve escolher c (quando possível) para fazer de f uma densidade?
- (c) Obtenha as densidades marginais de f .

Exercício 9 Seja $f(x, y) = ce^{-(x^2 - xy + 4y^2)/2}$, $x, y \in \mathbb{R}$. Como se deve escolher c para fazer de f uma densidade? Obtenha as densidades marginais de f .

Exercício 10 Sejam X e Y duas variáveis aleatórias tendo a função de probabilidade conjunta dada por:

X / Y	-1	0	1
-1	1/5	0	1/5
0	0	1/5	0
1	1/5	0	1/5

Calcule a correlação entre X e Y . As variáveis X e Y são independentes?