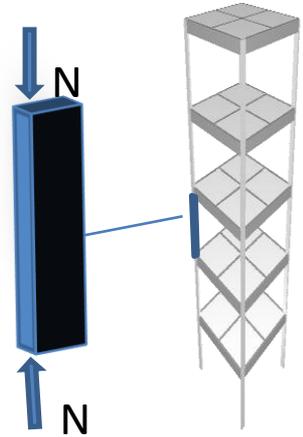


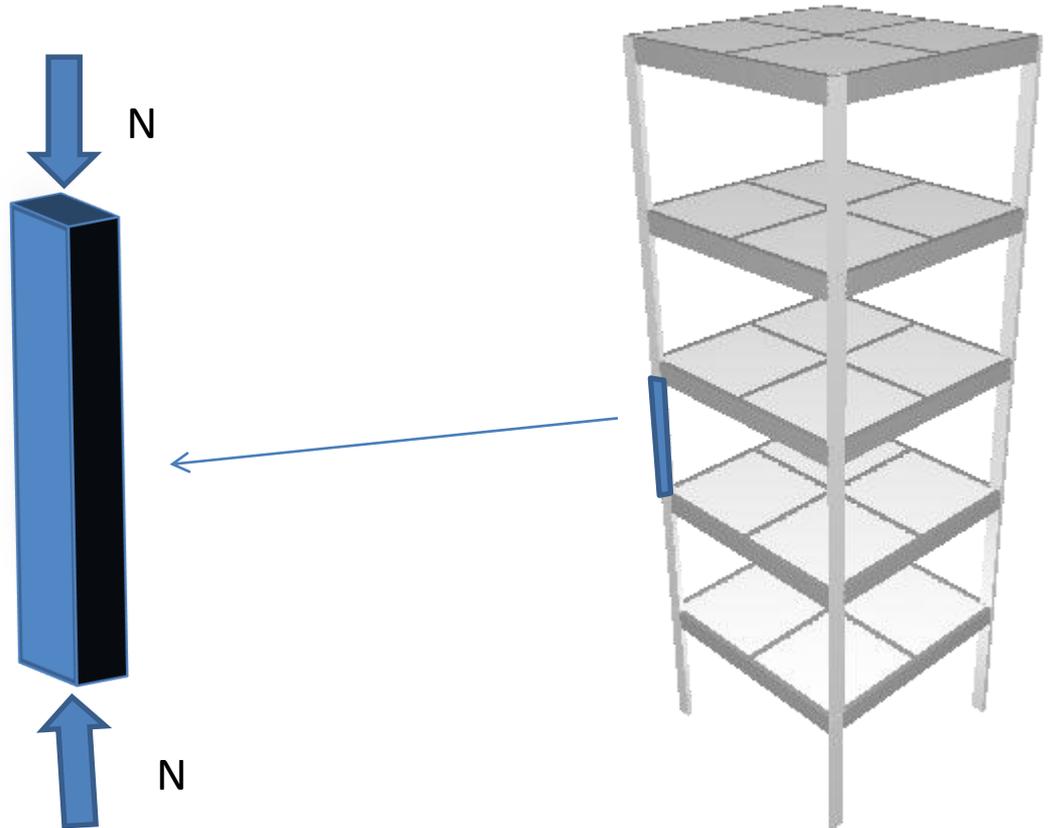
Dimensionamento de Pilares



- Pilares são elementos predominantemente comprimidos (N).
- Sua função primeira é conduzir as cargas gravitacionais aos elementos de fundação
- Em geral, são solicitados também por momentos fletores (M) e forças cortantes (V).

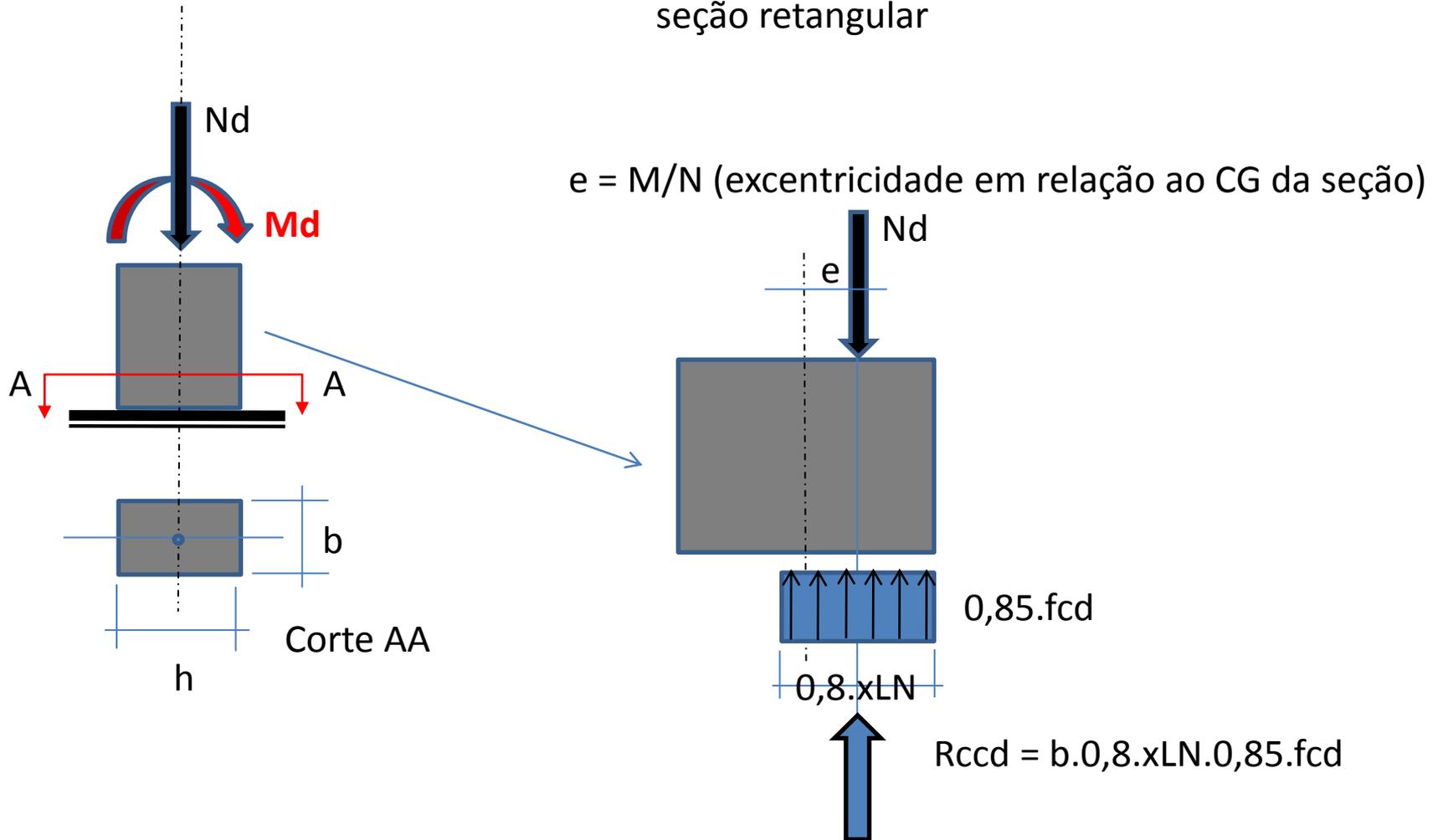
Dimensionamento de Pilares

Normalmente, a análise de N e M são suficientes para determinar as condições de segurança de um pilar



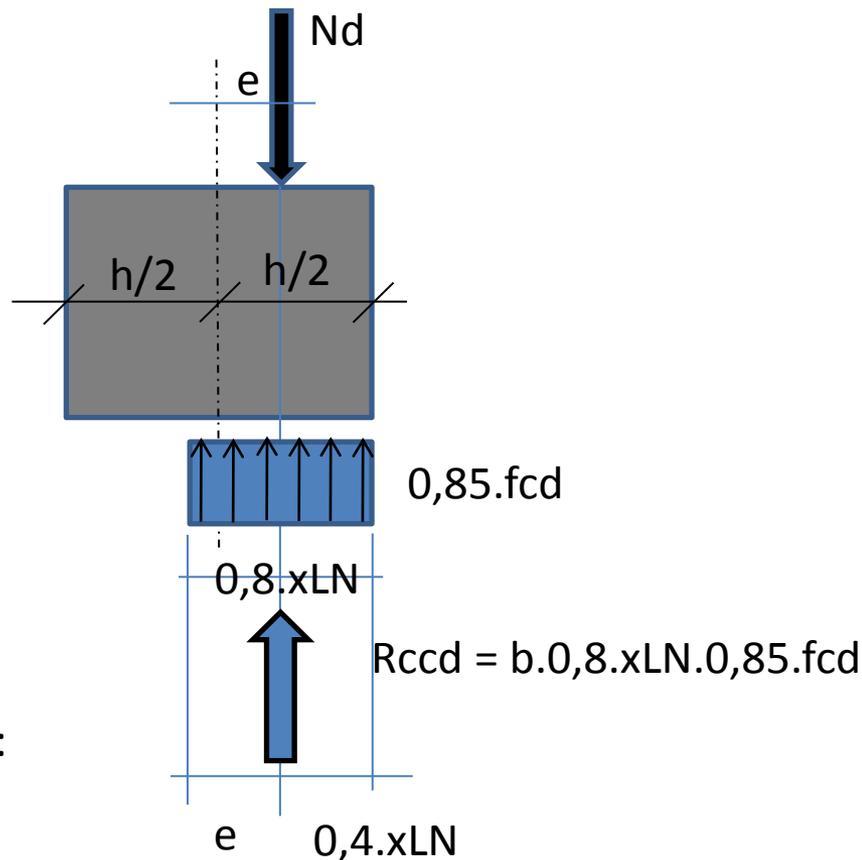
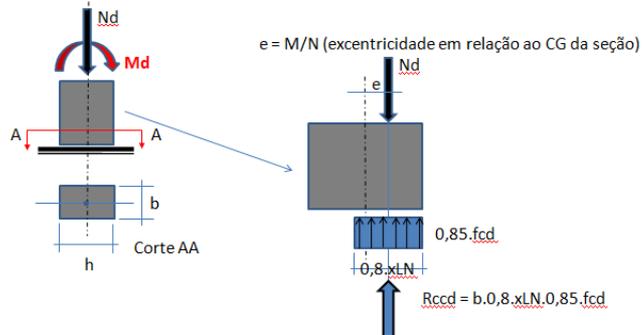
Dimensionamento de Pilares

Pilares de concreto simples (sem armadura de aço)
seção retangular



Dimensionamento de Pilares

Pilar de concreto simples (sem armadura de aço) e seção retangular



Por equilíbrio de normais e momentos:

$$1) N_d = R_{ccd} = (0,68 \cdot b \cdot f_{cd}) \cdot xLN$$

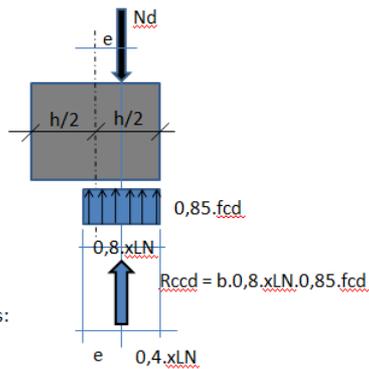
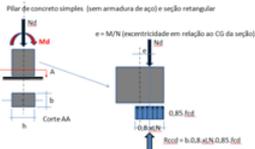
$$M_d = R_{ccd} \cdot e \quad \text{com} \quad e = h/2 - 0,4 \cdot xLN$$

Portanto,

$$2) M_d = (0,68 \cdot b \cdot f_{cd}) \cdot xLN \cdot (h/2 - 0,4 \cdot xLN) \quad - \text{função do 2º grau em } xLN$$

A solução é determinar xLN de 1) e substituir este valor em 2) obtendo-se $M_{d,res}$

Dimensionamento de Pilares



Por equilíbrio de normais e momentos:

$$1) N_d = R_{ccd} = (0,68 \cdot b \cdot f_{cd}) \cdot x_{LN}$$

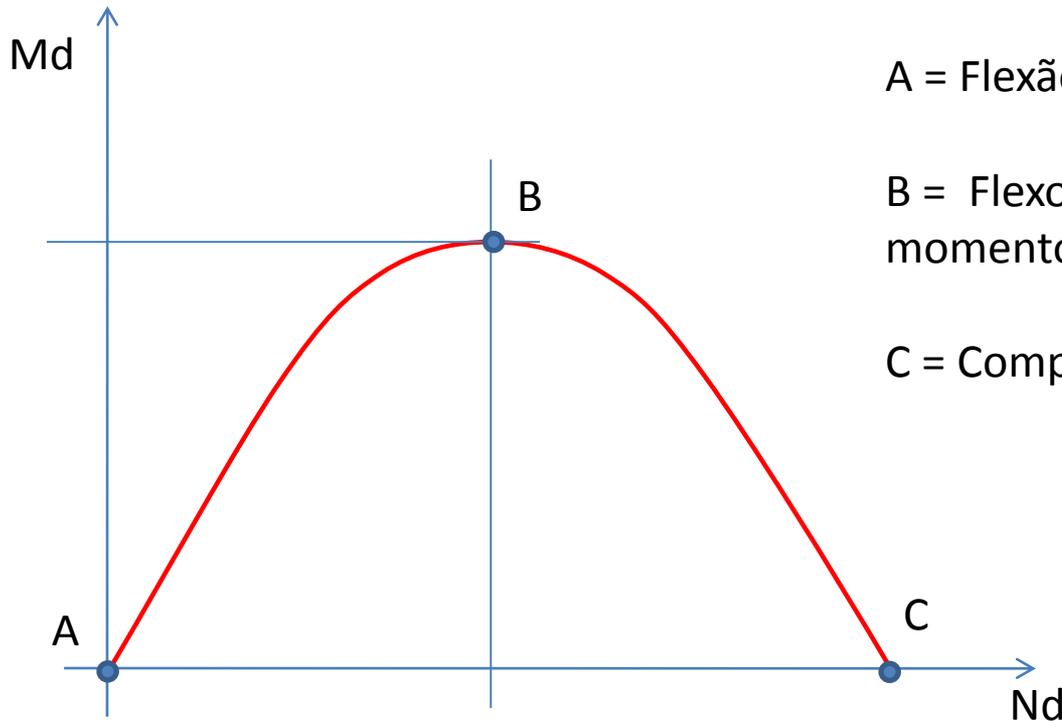
$$M_d = R_{ccd} \cdot e \quad \text{com} \quad e = h/2 - 0,4 \cdot x_{LN}$$

Portanto,

$$2) M_d = (0,68 \cdot b \cdot f_{cd}) \cdot x_{LN} \cdot (h/2 - 0,4 \cdot x_{LN})$$

A solução é determinar x_{LN} de 1) e substituir este valor em 2) obtendo-se $M_{d,res}$

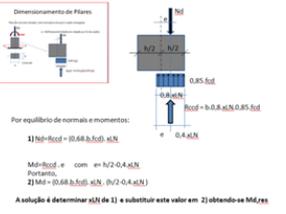
Se estabelecermos estas relações entre N_d e $M_{d,res}$, obteremos um diagrama semelhante ao abaixo representado:



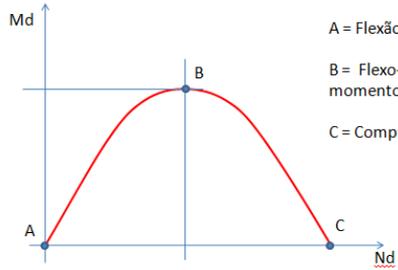
A = Flexão simples

B = Flexo-Compressão com momento máximo resistente

C = Compressão centrada



Se estabelecermos estas relações entre $N_{d, res}$ e $M_{d, res}$, obteremos um diagrama semelhante ao abaixo representado:



- A = Flexão simples
- B = Flexo-Compressão com momento máximo resistente
- C = Compressão centrada

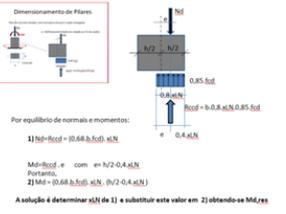
Conclusões do diagrama representado na figura

1) A flexão simples (A) é uma situação de resistência impossível, para peças de concreto simples.

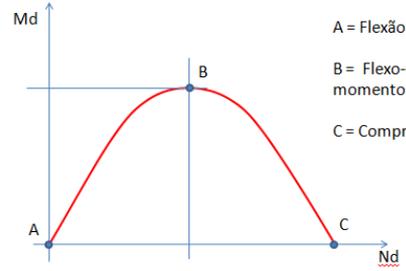
2) Uma peça de concreto simples pode resistir a momentos fletores desde que haja normal de compressão atuando, ou seja, a Flexo-compressão é possível.

3) Existe um Momento Fletor máximo resistente possível associado a uma determinada Normal de Compressão (B), que caracteriza o máximo momento aplicável à seção. Esta situação está associada a uma norma que é a metade da força norma máxima aplicável à seção.

4) Quando a Normal Máxima de compressão é aplicada à seção, não é possível resistir a qualquer momento fletor (C)



Se estabelecermos estas relações entre N_d e $M_{d,res}$, obteremos um diagrama semelhante ao abaixo representado:



- A = Flexão simples
- B = Flexo-Compressão com momento máximo resistente
- C = Compressão centrada

De forma a sintetizar estas conclusões e entendendo que estas podem ser aplicáveis a quaisquer combinações de dimensões e resistências do concreto , escrevemos:

$$\nu = \frac{N_d}{b \cdot h \cdot f_{cd}}$$

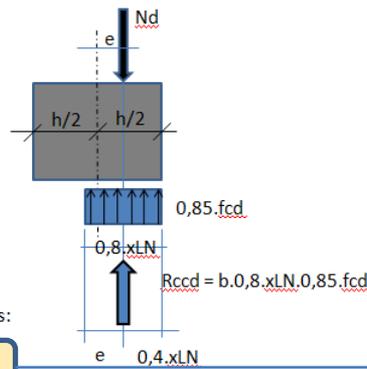
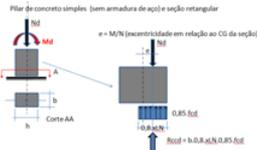
Normal reduzida (pronuncia-se ni)

$$\mu = \frac{M_d}{b \cdot h^2 \cdot f_{cd}}$$

Momento fletor reduzido (pronuncia-se mi)

Vamos agora substituir estes termos em 1) e 2), rescrevendo as equações:

Dimensionamento de Pilares



Por equilíbrio de normais e momentos:

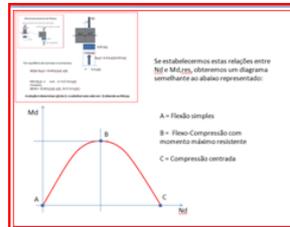
$$1) N_d = R_{ccd} = (0,68 \cdot b \cdot f_{cd}) \cdot x_{LN}$$

$$M_d = R_{ccd} \cdot e \quad \text{com } e = h/2 - 0,4 \cdot x_{LN}$$

Portanto,

$$2) M_d = (0,68 \cdot b \cdot f_{cd}) \cdot x_{LN} \cdot (h/2 - 0,4 \cdot x_{LN})$$

A solução é determinar x_{LN} de 1) e substituir este valor em 2) obtendo-se $M_{d,res}$



$$v = \frac{N_d}{b \cdot h \cdot f_{cd}}$$

Normal reduzida (pronuncia-se ni)

$$\mu = \frac{M_d}{b \cdot h^2 \cdot f_{cd}}$$

Momento fletor reduzido (pronuncia-se mi)

Vamos agora substituir estes termos em 1) e 2), resolvendo as equações:

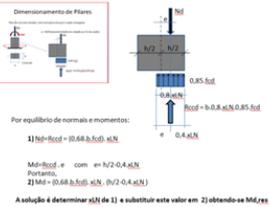
$$v = \frac{0,68 \cdot b \cdot f_{cd} \cdot x_{LN}}{b \cdot h \cdot f_{cd}} = 0,68 \frac{x_{LN}}{h}$$

$$\mu = 0,68 \cdot \frac{x_{LN}}{h} \cdot \left(\frac{1}{2} - 0,4 \cdot \frac{x_{LN}}{h} \right)$$

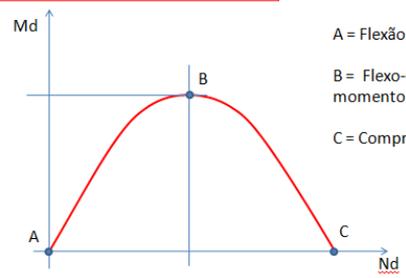
$$\mu = \frac{0,68 \cdot b \cdot f_{cd} \cdot x_{LN} \cdot \left(\frac{h}{2} - 0,4 x_{LN} \right)}{b \cdot h^2 \cdot f_{cd}}$$

$$\mu = v \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1,7} \cdot v \right)$$

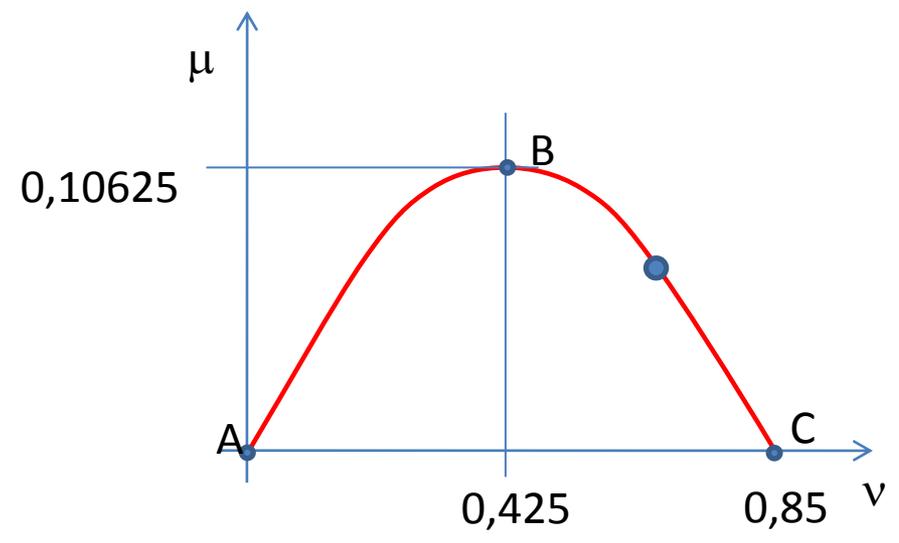
De forma a sintetizar estas conclusões e entendendo que estas podem ser aplicáveis a quaisquer combinações de dimensões e resistências do concreto, escrevemos:



Se estabelecermos estas relações entre N_d e $M_{d,res}$, obteremos um diagrama semelhante ao abaixo representado:



- A = Flexão simples
- B = Flexo-Compressão com momento máximo resistente
- C = Compressão centrada



$$v = \frac{N_d}{b \cdot h \cdot f_{cd}} = 0,68 \cdot \frac{x_{LN}}{h}$$

$$\mu = \frac{M_d}{b \cdot h^2 \cdot f_{cd}} = v \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1,7} \cdot v \right)$$

Válidos para qualquer Relação b, h e fcd

Se estabelecermos estas relações entre N_d e $M_{d,eq}$, obtemos um diagrama semelhante ao abaixo representado:

A = Fio de tensão simples
 B = Fio de Compressão com momento máximo resistente
 C = Compressão centrada

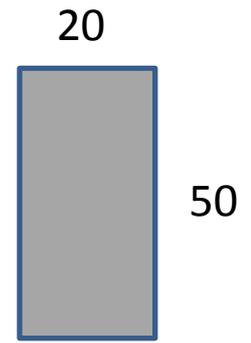
$$v = \frac{N_d}{b \cdot h \cdot f_{cd}} = 0,68 \cdot \frac{x_{LN}}{h}$$

$$\mu = \frac{M_d}{b \cdot h^2 \cdot f_{cd}} = v \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1,7} \cdot v \right)$$

Válidos para qualquer Relação b , h e f_{cd}

Exemplo 1

- $b = 20\text{cm}$
- $h = 50\text{ cm}$
- $f_{ck} = 30\text{MPa}$
- $N_k = 976\text{ kN}$

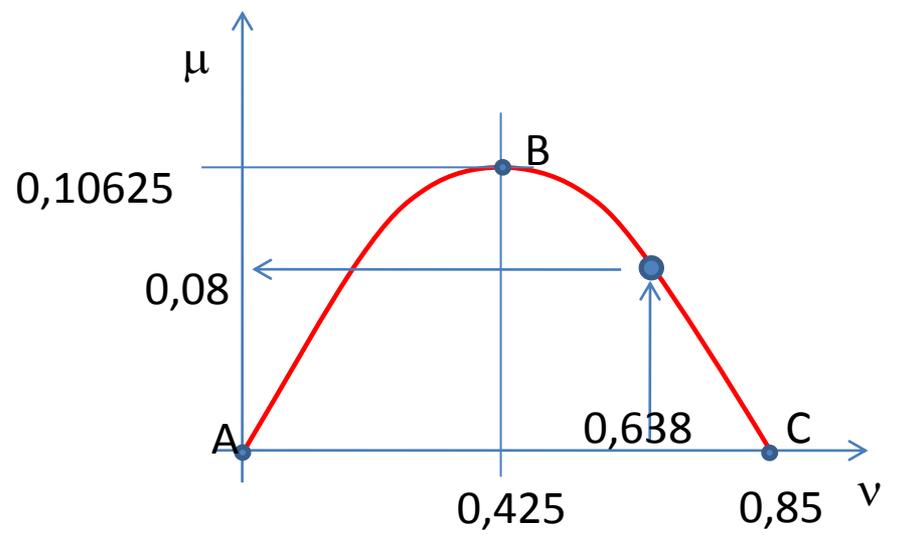


Qual o momento resistente?

$$v = \frac{N_d}{b \cdot h \cdot f_{cd}} = \frac{976 \cdot 1,4}{0,2 \cdot 0,5 \cdot \frac{30000}{1,4}} = 0,638$$

$$\mu = \frac{M_d}{b \cdot h^2 \cdot f_{cd}} = v \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1,7} \cdot v \right)$$

$$= 0,638 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1,7} \cdot 0,638 \right) = 0,08$$



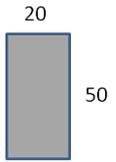
$$v = \frac{N_d}{b \cdot h \cdot f_{cd}} = 0,68 \cdot \frac{x_{eq}}{h}$$

$$\mu = \frac{M_d}{b \cdot h^2 \cdot f_{cd}} = v \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1,7} \cdot v \right)$$

Válidos para qualquer Relação b, h e fcd

Exemplo

$b = 20\text{cm}$
 $h = 50\text{cm}$
 $f_{ck} = 30\text{MPa}$
 $N_k = 976\text{ kN}$

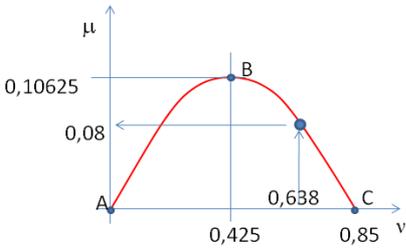


Qual o momento resistente?

$$v = \frac{N_d}{b \cdot h \cdot f_{cd}} = \frac{976 \cdot 1,4}{0,2 \cdot 0,5 \cdot \frac{30000}{1,4}} = 0,638$$

$$\mu = \frac{M_d}{b \cdot h^2 \cdot f_{cd}} = v \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1,7} \cdot v \right)$$

$$= 0,638 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1,7} \cdot 0,638 \right) = 0,08$$



Com $\mu = 0,08$, podemos obter o momento resistente através da expressão:

$$\mu = \frac{M_d}{b \cdot h^2 \cdot f_{cd}} = 0,08$$

Portanto $f_{cd} = \frac{30000}{1,4} = 21.428,5 \frac{kN}{m^2}$

$$\frac{M_d}{0,2 \cdot 0,5^2 \cdot 21428,5} = 0,08$$

$$M_d = 85,714 \text{ kNm}$$

$$M_k = \frac{85,714}{1,4} = 61,22 \text{ kNm}$$

Se estabelecermos estas relações entre N_d e M_d , obtemos um diagrama semelhante ao abaixo representado:

A = Fio de tração
 B = Fio de Compressão com momento máximo resistente
 C = Compressão centrada

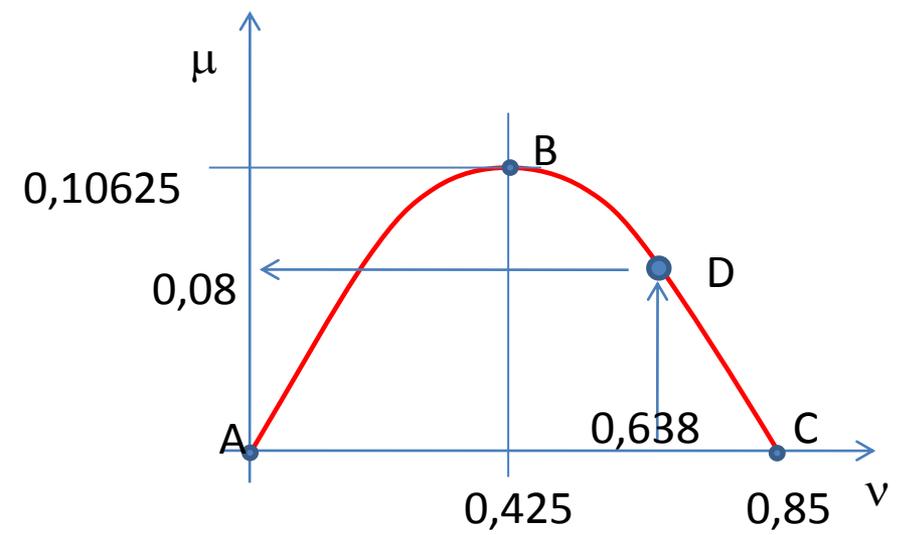
$$\nu = \frac{N_d}{b \cdot h \cdot f_{cd}} = 0,68 \cdot \frac{x_{LN}}{h}$$

$$\mu = \frac{M_d}{b \cdot h^2 \cdot f_{cd}} = \nu \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1,7} \cdot \nu \right)$$

Válidos para qualquer Relação b, h e f_{cd}

Exemplo 2

Para o diagrama abaixo, determinar a profundidade relativa da linha neutra para os pontos A, B, C e D



Ponto A : $\nu=0$ $x_{LN}/h = 0$

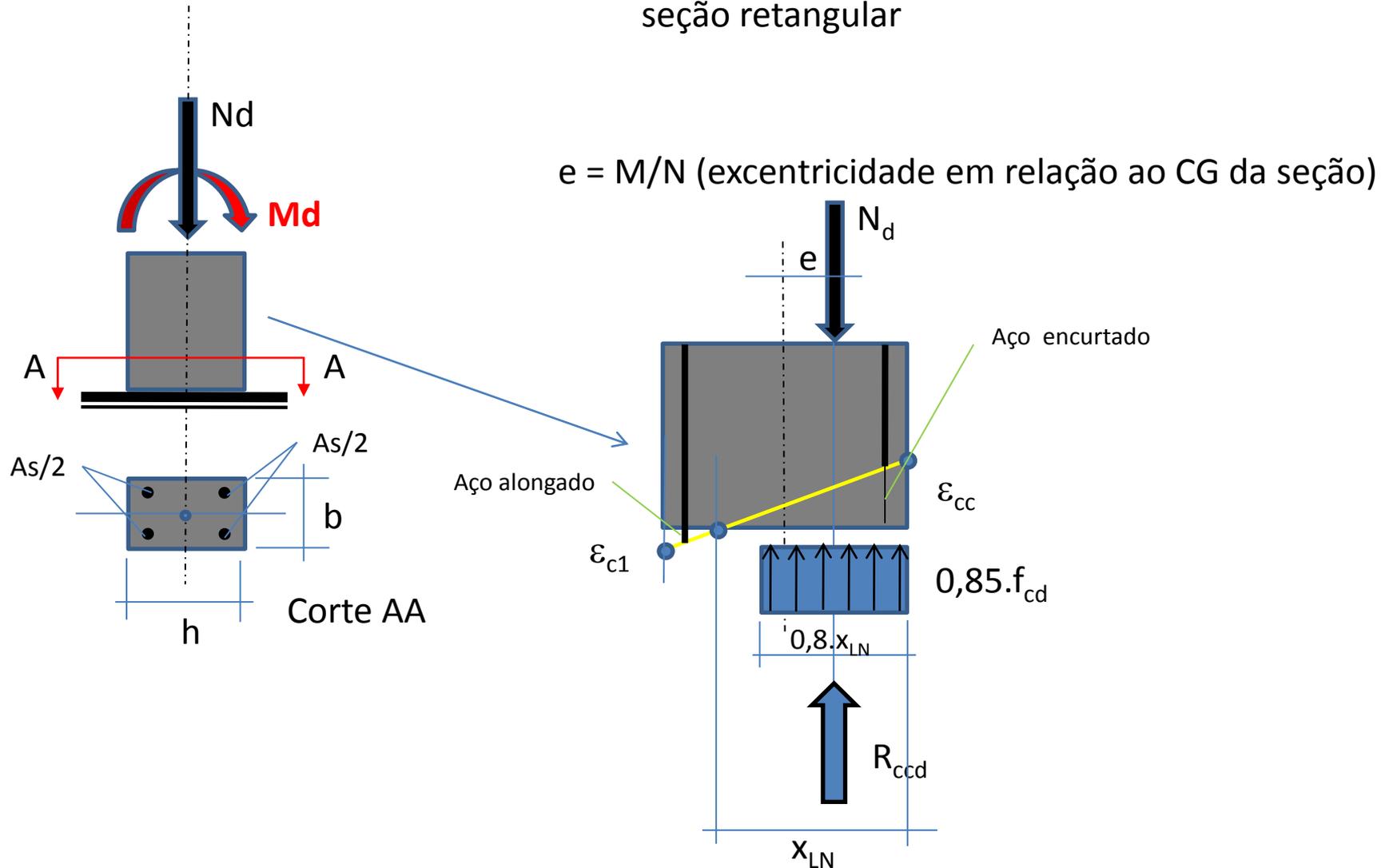
Ponto B : $\nu=0,425$ $x_{LN}/h = 0,425/0,68 = 0,625$

Ponto C : $\nu=0,85$ $x_{LN}/h \geq 0,85/0,68 = 1,25$ (a linha neutra tende a infinito)

Ponto D : $\nu=0,638$ $x_{LN}/h = 0,638/0,68 = 0,938$

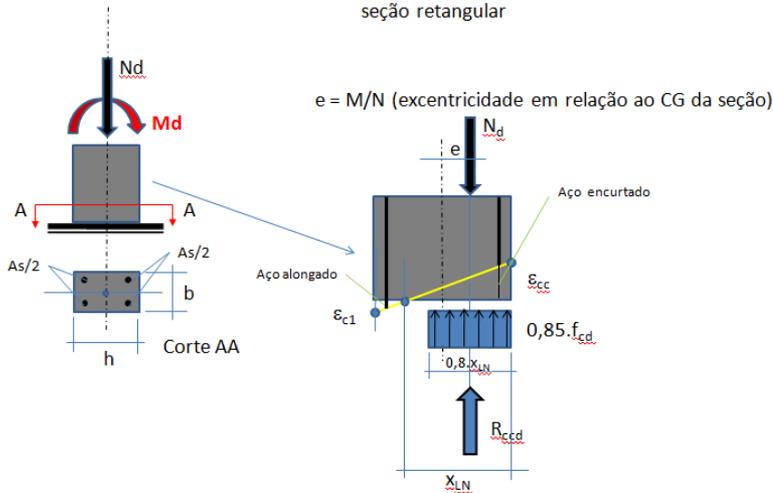
Dimensionamento de Pilares

Pilares de concreto armado (com armadura de aço)
seção retangular



Dimensionamento de Pilares

Pilares de concreto armado (com armadura de aço)
seção retangular

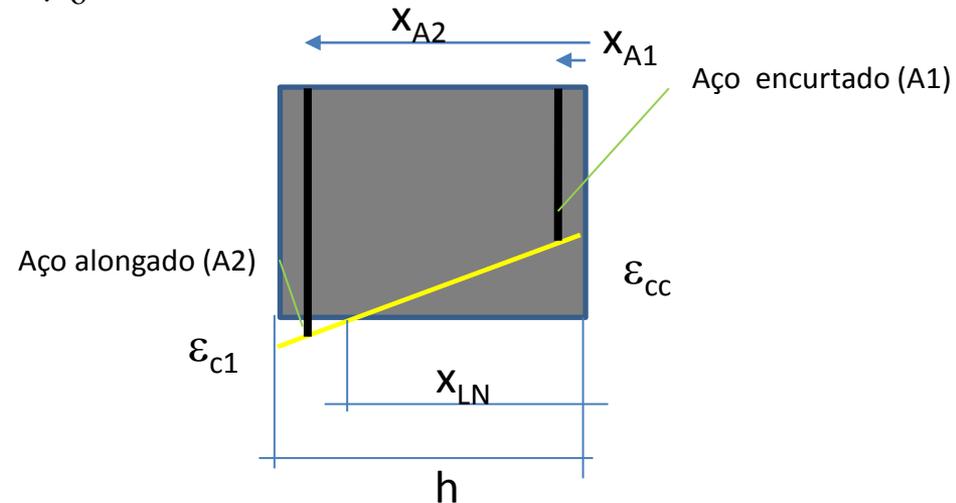


Efeito do aço nos diversos casos
do exemplo 2:

Ponto B :

$$v_o = 0,425 \quad x_{LN}/h = 0,425/0,68 = 0,625$$

$$\mu_o = 0,10625$$



NBR-6118 define, para $x_{LN}/h = 0,625$:

$$\varepsilon_{cc} = 0,35\%$$

$$\varepsilon_{c1} = 0,35\% \cdot (1 - h/x_{LN})$$

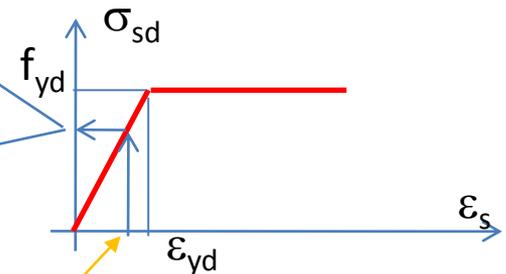
Encurtamento foi adotado como positivo

$$\varepsilon_{s,A1} = 0,35\% \cdot (x_{LN} - x_{A1}) / x_{LN}$$

$$F_{sd,A1} = A_{s1} \cdot \sigma_{sd,A1}$$

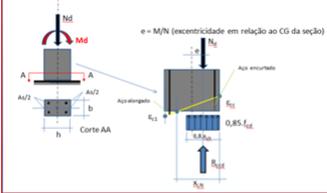
$$\varepsilon_{s,A2} = 0,35\% \cdot (x_{LN} - x_{A2}) / x_{LN}$$

$$F_{sd,A2} = A_{s2} \cdot \sigma_{sd,A2}$$



Dimensionamento de Pilares

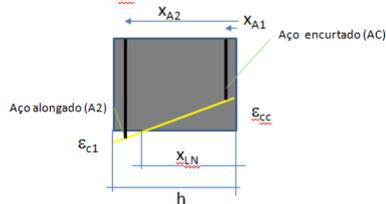
Pilares de concreto armado (com armadura de aço) seção retangular



Efeito do aço nos diversos casos do exemplo 2:

Ponto B :

$$v=0,425 \quad x_{LN}/h = 0,425/0,68 = 0,625$$



Ecurtamento foi adotado como positivo

NBR-6118 define:

$$\varepsilon_{cc} = 0,35\%$$

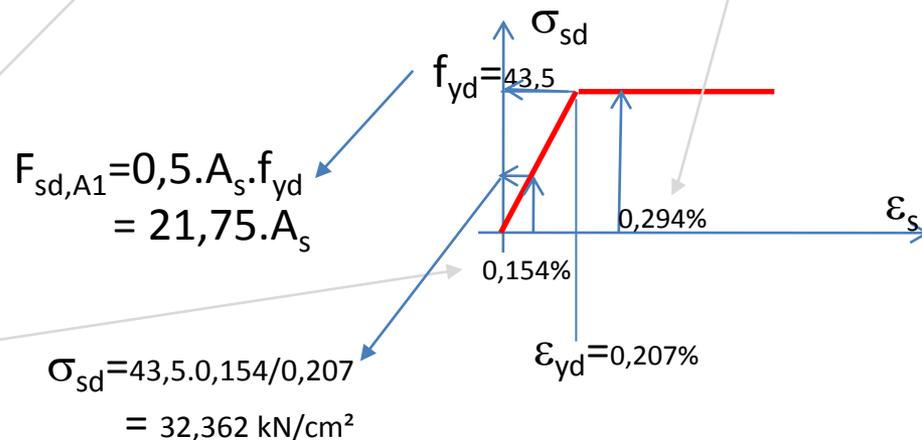
$$\varepsilon_{c1} = 0,35\% \cdot (1 - h/x_{LN})$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{s,A1} = 0,35\% \cdot (x_{LN} - x_{A1})/x_{LN} & \text{--- } F_{sd,A1} = A_{s1} \cdot \sigma_{sd,A1} \\ \varepsilon_{s,A2} = 0,35\% \cdot (x_{LN} - x_{A2})/x_{LN} & \text{--- } F_{sd,A2} = A_{s2} \cdot \sigma_{sd,A2} \end{cases}$$

Assumindo, $x_{A1}=0,1h$, $x_{A2}=0,9h$ e aço CA-50 : $\varepsilon_{yd}=0,207\%$, $f_{yd}=43,5 \text{ kN/cm}^2$ e $A_{s1}=A_{s2}=A_s/2$

$$\varepsilon_{s,A1} = 0,35\% \cdot (0,625 - 0,1)/0,625 = 0,294\%$$

$$\varepsilon_{s,A2} = 0,35\% \cdot (0,625 - 0,9)/0,625 = -0,154\%$$



$$F_{sd,A1} = 0,5 \cdot A_s \cdot f_{yd} = 21,75 \cdot A_s$$

$$\sigma_{sd} = 43,5 \cdot 0,154 / 0,207 = 32,362 \text{ kN/cm}^2$$

$$\begin{aligned} F_{sd,A2} &= A_{s2} \cdot \sigma_{sd,A2} \\ &= 0,5 \cdot A_s \cdot 32,352 \\ &= 16,181 \cdot A_s \end{aligned}$$

Efeito do aço nos diversos casos do exemplo 2: (cont)

Ponto B :

$$v_o=0,425 \quad x_{LN}/h = 0,625$$

$$\mu_o=0,10625$$

Ecurtamento foi adotado como positivo

Dimensionamento de Pilares

Efeito do aço nos diversos casos do exemplo 2:

Ponto B : $v=0,425$ $x_{LN}/h = 0,425/0,68 = 0,625$

NBR-6118 define:

$\epsilon_{s1} = 0,35\%$
 $\epsilon_{s2} = 0,35\% \cdot (1 - h/x_{A1})$

Assumindo, $x_{A1}=0,1h$, $x_{A2}=0,9h$ e aço CA-50: $\epsilon_{yd}=0,207\%$, $f_{yd}=43,5 \text{ kN/cm}^2$ e $A_{s1}=A_{s2}=A_s/2$

Encurtamento foi adotado como positivo

Encurtamento foi adotado como positivo

$\epsilon_{s1,A1} = 0,35\% \cdot (0,625 - 0,1)/0,625 = 0,294\%$

$F_{sd,A1} = 0,5 \cdot A_s \cdot f_{yd} = 21,75 \cdot A_s$

$\epsilon_{s2,A2} = 0,35\% \cdot (0,625 - 0,9)/0,625 = -0,154\%$

$\sigma_{ssd} = 43,5 \cdot 0,154/0,207 = 32,362 \text{ kN/cm}^2$

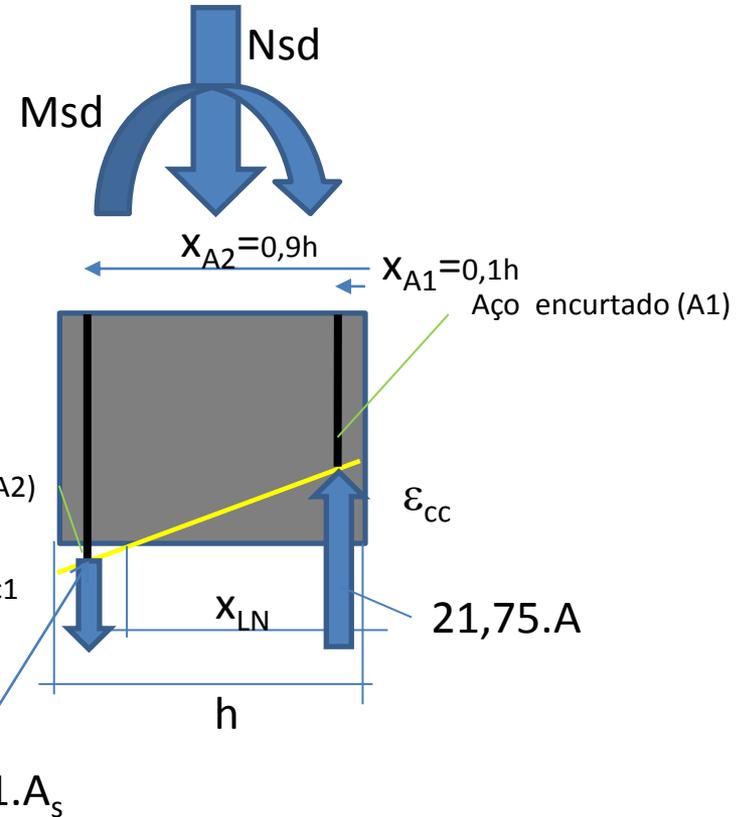
$F_{sd,A2} = A_{s2} \cdot \sigma_{ssd,A2} = 0,5 \cdot A_s \cdot 32,352 = 16,181 \cdot A_s$

Efeito do aço nos diversos casos do exemplo 2: (cont)

Ponto B :

$$v_o = 0,425 \quad x_{LN}/h = 0,625$$

$$\mu_o = 0,10625$$



Esforços resistentes acrescentados pelo aço:

$$N_{sd} = (21,75 - 16,181) \cdot A_s$$

$$= 5,569 \cdot A_s \text{ kN}$$

A_s em cm^2

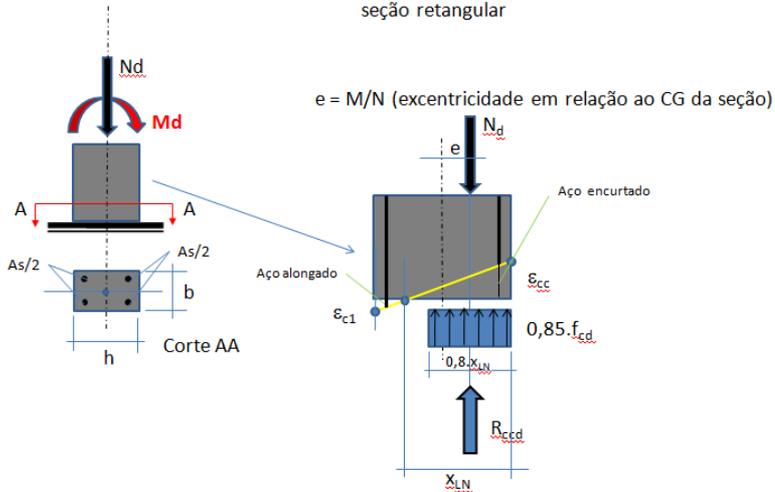
$$M_{sd} = 15,172 \cdot h \cdot A_s \text{ KNm}$$

$$N_{d,RES} = 0,425 \cdot b \cdot h \cdot f_{cd} + 5,569 \cdot A_s$$

$$M_{d,RES} = 0,10625 \cdot b \cdot h^2 \cdot f_{cd} + 15,172 \cdot h \cdot A_s$$

Dimensionamento de Pilares

Pilares de concreto armado (com armadura de aço)
seção retangular

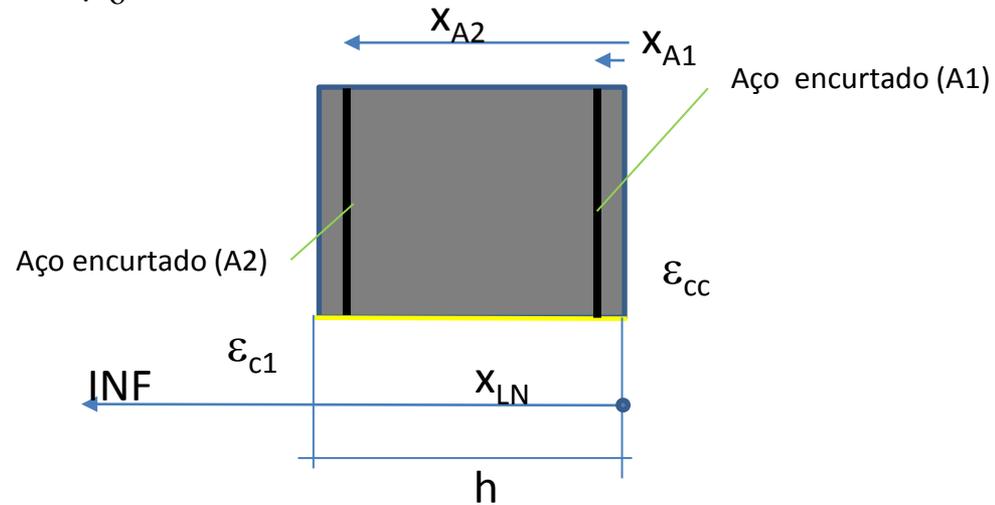


Efeito do aço nos diversos casos
do exemplo 2:

Ponto C :

$$\nu_o = 0,85 \quad x_{LN}/h = \text{infinito}$$

$$\mu_o = 0,0$$



NBR-6118 define, para $x_{LN}/h = \text{INF}$

$$\epsilon_{cc} = 0,20\%$$

$$\epsilon_{c1} = 0,20\%$$

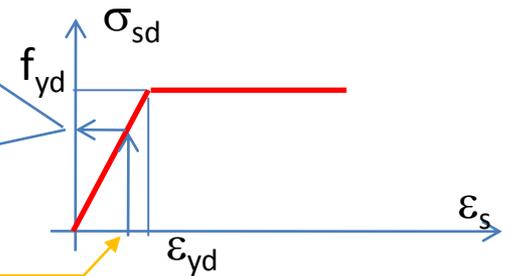
Encurtamento foi adotado como positivo

$$\epsilon_{s,A1} = 0,20\%$$

$$\epsilon_{s,A2} = 0,20\%$$

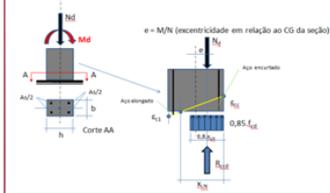
$$F_{sd,A1} = A_{s1} \cdot \sigma_{sd,A1}$$

$$F_{sd,A2} = A_{s2} \cdot \sigma_{sd,A2}$$



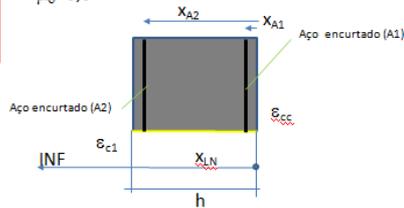
Dimensionamento de Pilares

Pilares de concreto armado (com armadura de aço)
seção retangular



Efeito do aço nos diversos casos
do exemplo 2:

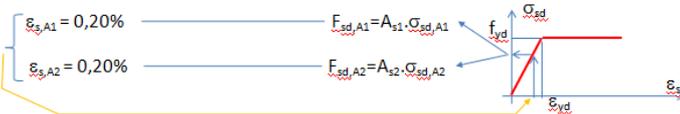
Ponto C :
 $v_o=0,85$ $x_{LN}/h = \text{infinito}$
 $\mu_o=0,0$



NBR-6118 define, para $x_{LN}/h = \text{INF}$

$\varepsilon_{cc} = 0,20\%$
 $\varepsilon_{c1} = 0,20\%$

Encurtamento foi adotado como positivo



Efeito do aço nos diversos casos
do exemplo 2: (cont)

Ponto C :
 $v_o=0,85$ $x_{LN}/h = \text{infinito}$
 $\mu_o=0,0$

Encurtamento foi adotado como positivo

Assumindo, $x_{A1}=0,1h$, $x_{A2}=0,9h$ e aço
CA-50 : $\varepsilon_{yd}=0,207\%$, $f_{yd}=43,5 \text{ kN/cm}^2$
e $A_{s1}=A_{s2}=A_s/2$

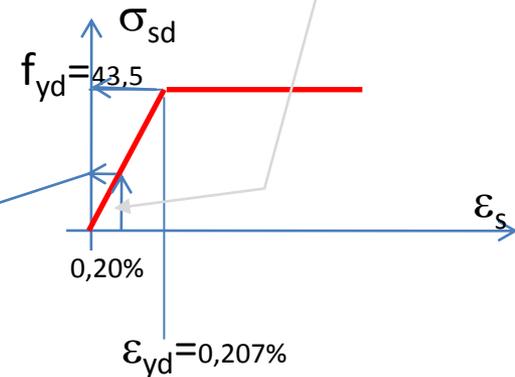
$$\varepsilon_{s,A1} = \varepsilon_{s,A2} = 0,20\%$$

$$\sigma_{sd} = 43,5 \cdot 0,20 / 0,207$$

$$= 42,0 \text{ kN/cm}^2$$

$$F_{sd,A1} = F_{sd,A2} = 0,5 \cdot A_s \cdot 42,0$$

$$= 21 \cdot A_s$$



Dimensionamento de Pilares

Efeito do aço nos diversos casos do exemplo 2:

Ponto B : $v=0,425$ $x_{LN}/h = 0,425/0,68 = 0,625$

NBR-6118 define:

$\epsilon_{s1} = 0,35\%$

$\epsilon_{s2} = 0,35\% \cdot (1 - h/x_{A1})$

Encurtamento foi adotado como positivo

Assumindo, $x_{A1}=0,1h$, $x_{A2}=0,9h$ e aço CA-50: $\epsilon_{yd}=0,207\%$, $f_{yd}=43,5 \text{ kN/cm}^2$ e $A_{s1}=A_{s2}=A_s/2$

$\epsilon_{s,A1} = 0,35\% \cdot (0,625 - 0,1)/0,625 = 0,294\%$

$F_{sd,A1} = 0,5 \cdot A_s \cdot f_{yd} = 21,75 \cdot A_s$

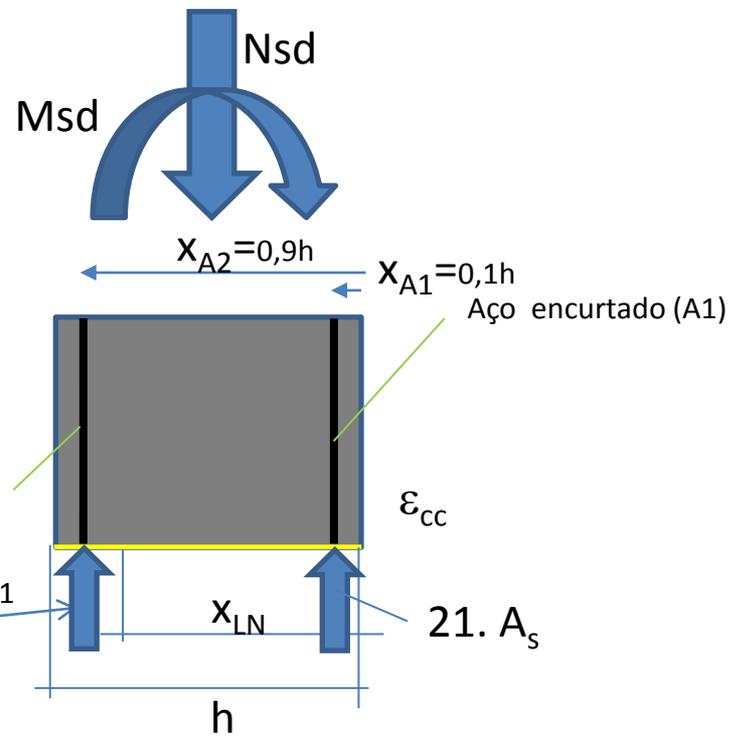
$\epsilon_{s,A2} = 0,35\% \cdot (0,625 - 0,9)/0,625 = -0,154\%$

$\sigma_{sd} = 43,5 \cdot 0,154/0,207 = 32,362 \text{ kN/cm}^2$

$F_{sd,A2} = A_{s2} \cdot \sigma_{sd,A2} = 0,5 \cdot A_s \cdot 32,352 = 16,181 \cdot A_s$

Efeito do aço nos diversos casos do exemplo 2: (cont)

Ponto C :
 $v_o=0,85$ $x_{LN}/h = \text{infinito}$
 $\mu_o=0,0$



Esforços resistentes acrescentados pelo aço:

$$N_{sd} = (2.21) \cdot A_s = 42 \cdot A_s \text{ kN}$$

A_s em cm^2

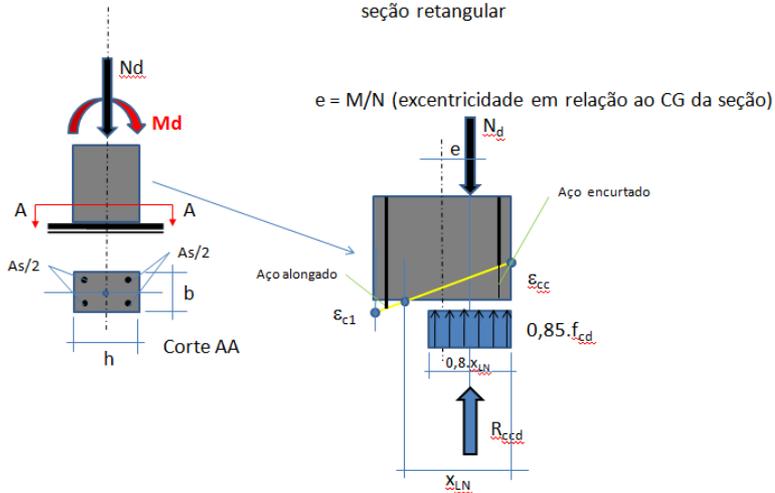
$$M_{sd} = 0 \text{ KNm}$$

$$N_{d,RES} = 0,85 \cdot bh \cdot f_{cd} + 42 \cdot A_s$$

$$M_{d,RES} = 0$$

Dimensionamento de Pilares

Pilares de concreto armado (com armadura de aço)
seção retangular



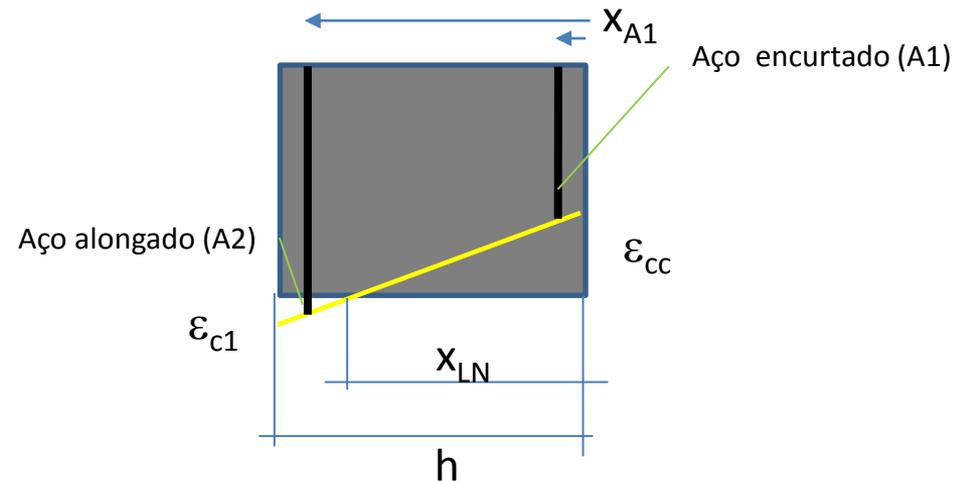
Efeito do aço nos diversos casos
do exemplo 2:

Ponto D :

$$v_o = 0,638$$

$$x_{LN}/h = 0,938$$

$$\mu_o = 0,08$$



NBR-6118 define, para $x_{LN}/h = 0,938$:

$$\epsilon_{cc} = 0,35\%$$

$$\epsilon_{c1} = 0,35\% \cdot (1 - h/x_{LN})$$

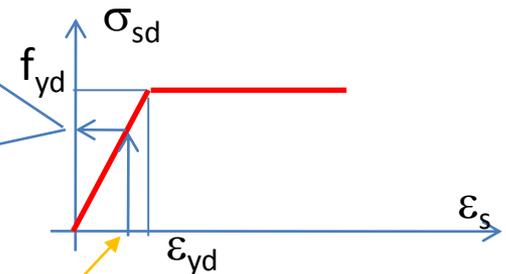
Encurtamento foi adotado como positivo

$$\epsilon_{s,A1} = 0,35\% \cdot (x_{LN} - x_{A1}) / x_{LN}$$

$$F_{sd,A1} = A_{s1} \cdot \sigma_{sd,A1}$$

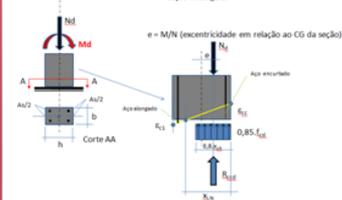
$$\epsilon_{s,A2} = 0,35\% \cdot (x_{LN} - x_{A2}) / x_{LN}$$

$$F_{sd,A2} = A_{s2} \cdot \sigma_{sd,A2}$$



Dimensionamento de Pilares

Pilares de concreto armado (com armadura de aço)
seção retangular



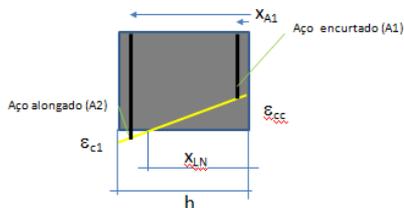
Efeito do aço nos diversos casos
do exemplo 2:

Ponto D :

$$v_o = 0,638$$

$$\mu_o = 0,08$$

$$x_{LN}/h = 0,938$$



NBR-6118 define, para $x_{LN}/h = 0,938$:

$$\varepsilon_{cc} = 0,35\%$$

$$\varepsilon_{c1} = 0,35\% \cdot (1 - h/x_{LN})$$

Encurtamento foi adotado como positivo

$$\varepsilon_{s,A1} = 0,35\% \cdot (x_{LN} - x_{A1}) / x_{LN} \quad \rightarrow \quad F_{sd,A1} = A_{s1} \cdot \sigma_{sd,A1}$$

$$\varepsilon_{s,A2} = 0,35\% \cdot (x_{LN} - x_{A2}) / x_{LN} \quad \rightarrow \quad F_{sd,A2} = A_{s2} \cdot \sigma_{sd,A2}$$

Efeito do aço nos diversos casos
do exemplo 2: (cont)

Ponto D :

$$v_o = 0,638 \quad x_{LN}/h = 0,938$$

$$\mu_o = 0,08$$

Encurtamento foi adotado como positivo

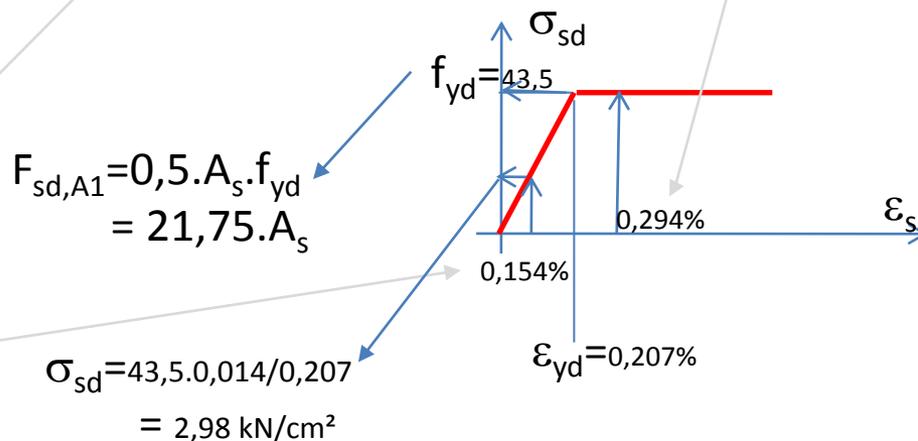
Assumindo, $x_{A1} = 0,1h$, $x_{A2} = 0,9h$ e aço
CA-50 : $\varepsilon_{yd} = 0,207\%$, $f_{yd} = 43,5 \text{ kN/cm}^2$
e $A_{s1} = A_{s2} = A_s/2$

$$\varepsilon_{s,A1} = 0,35\% \cdot (0,938 - 0,1) / 0,938$$

$$= 0,313\%$$

$$\varepsilon_{s,A2} = 0,35\% \cdot (0,938 - 0,9) / 0,938$$

$$= 0,014\%$$



$$F_{sd,A1} = 0,5 \cdot A_s \cdot f_{yd}$$

$$= 21,75 \cdot A_s$$

$$\sigma_{sd} = 43,5 \cdot 0,014 / 0,207$$

$$= 2,98 \text{ kN/cm}^2$$

$$F_{sd,A2} = A_{s2} \cdot \sigma_{sd,A2}$$

$$= 0,5 \cdot A_s \cdot 2,98$$

$$= 1,49 \cdot A_s$$

Dimensionamento de Pilares

Efeito do aço nos diversos casos do exemplo 2:

Ponto B : $v=0,425$ $x_{LN}/h = 0,425/0,68 = 0,625$

NBR-6118 define:

$\epsilon_{s1} = 0,35\%$
 $\epsilon_{s2} = 0,35\% \cdot (1 - h/x_{A1})$

Encurtamento foi adotado como positivo

Assumindo, $x_{A1}=0,1h$, $x_{A2}=0,9h$ e aço CA-50: $\epsilon_{yd}=0,207\%$, $f_{yd}=43,5 \text{ kN/cm}^2$ e $A_{s1}=A_{s2}=A_s/2$

$\epsilon_{s,A1} = 0,35\% \cdot (0,625 - 0,1)/0,625 = 0,294\%$

$\epsilon_{s,A2} = 0,35\% \cdot (0,625 - 0,9)/0,625 = -0,154\%$

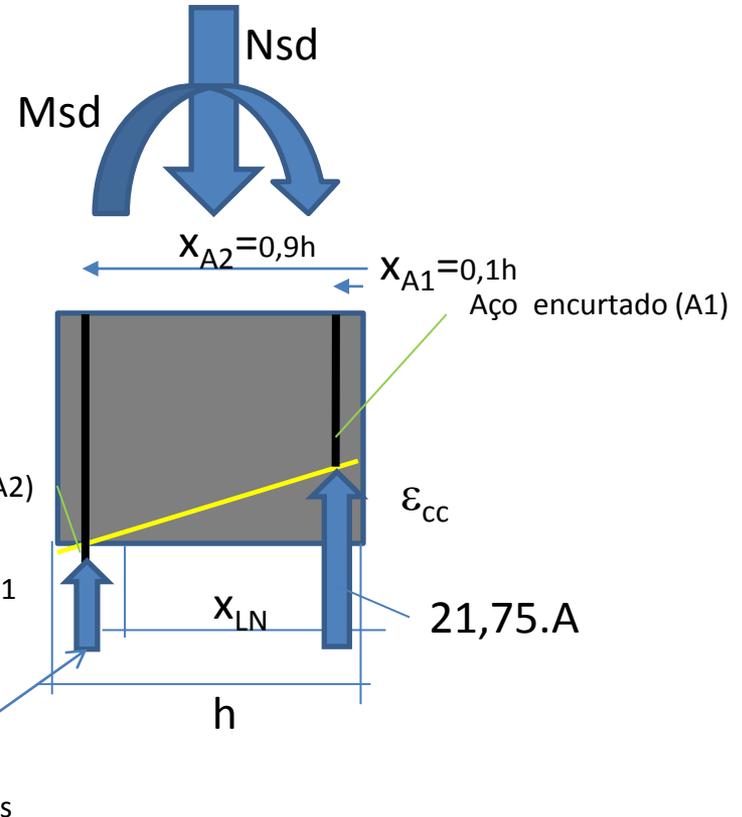
$F_{sd,A1} = 0,5 \cdot A_s \cdot f_{yd} = 21,75 \cdot A_s$

$\sigma_{sd} = 43,5 \cdot 0,154/0,207 = 32,362 \text{ kN/cm}^2$

$F_{sd,A2} = A_{s2} \cdot \sigma_{sd,A2} = 0,5 \cdot A_s \cdot 32,352 = 16,181 \cdot A_s$

Efeito do aço nos diversos casos do exemplo 2: (cont)

Ponto D :
 $v_o=0,638$ $x_{LN}/h = 0,938$
 $\mu_o=0,08$



Esforços resistentes acrescentados pelo aço:

$$N_{sd} = (21,75 + 1,49) \cdot A_s = 23,24 \cdot A_s \text{ kN}$$

A_s em cm^2

$$M_{sd} = 8,104 \cdot h \cdot A_s \text{ KNm}$$

$$N_{d,RES} = 0,638 \cdot bh \cdot f_{cd} + 23,24 \cdot A_s$$

$$M_{d,RES} = 0,08 \cdot bh^2 \cdot f_{cd} + 8,104 \cdot h \cdot A_s$$

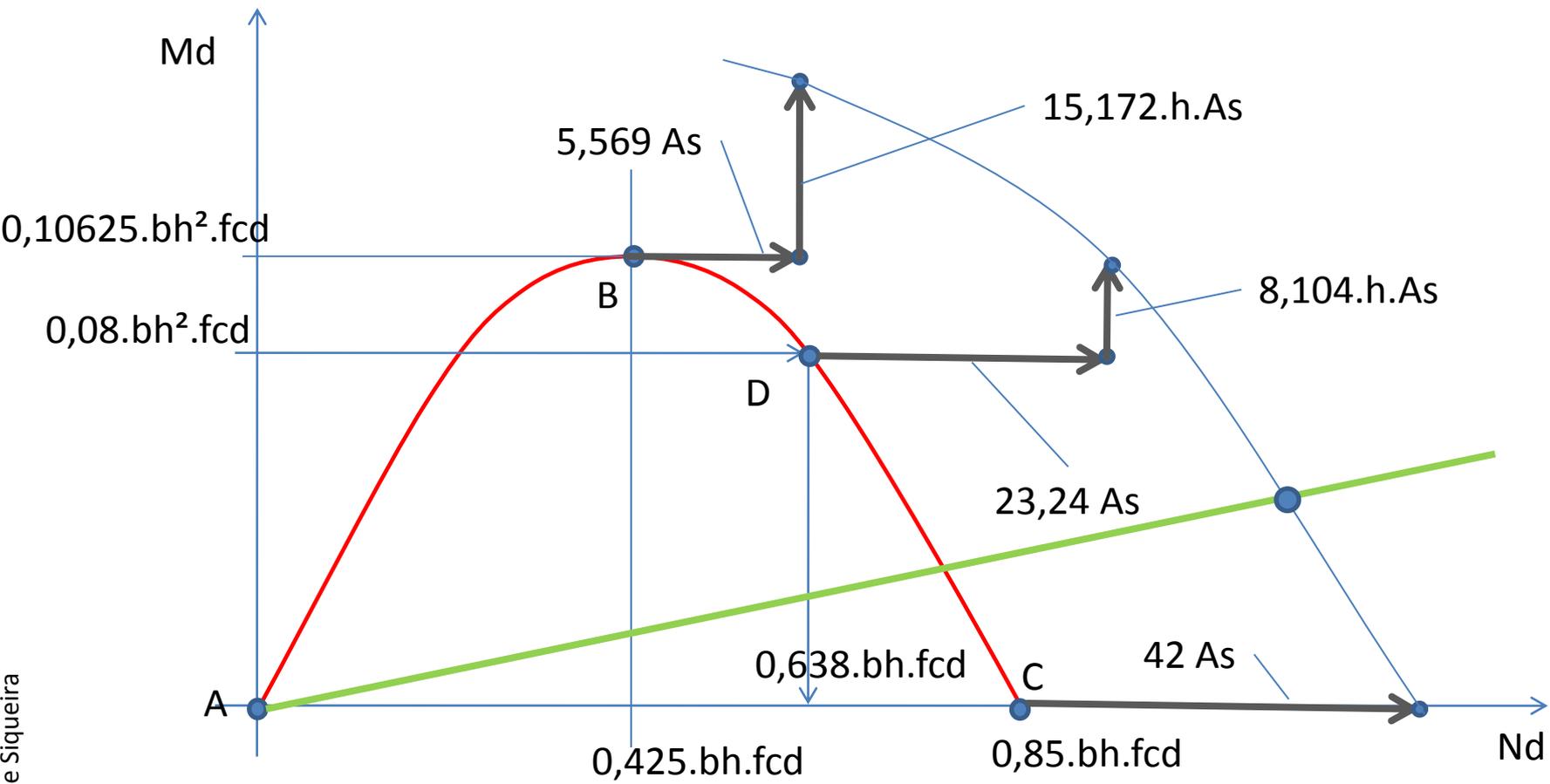
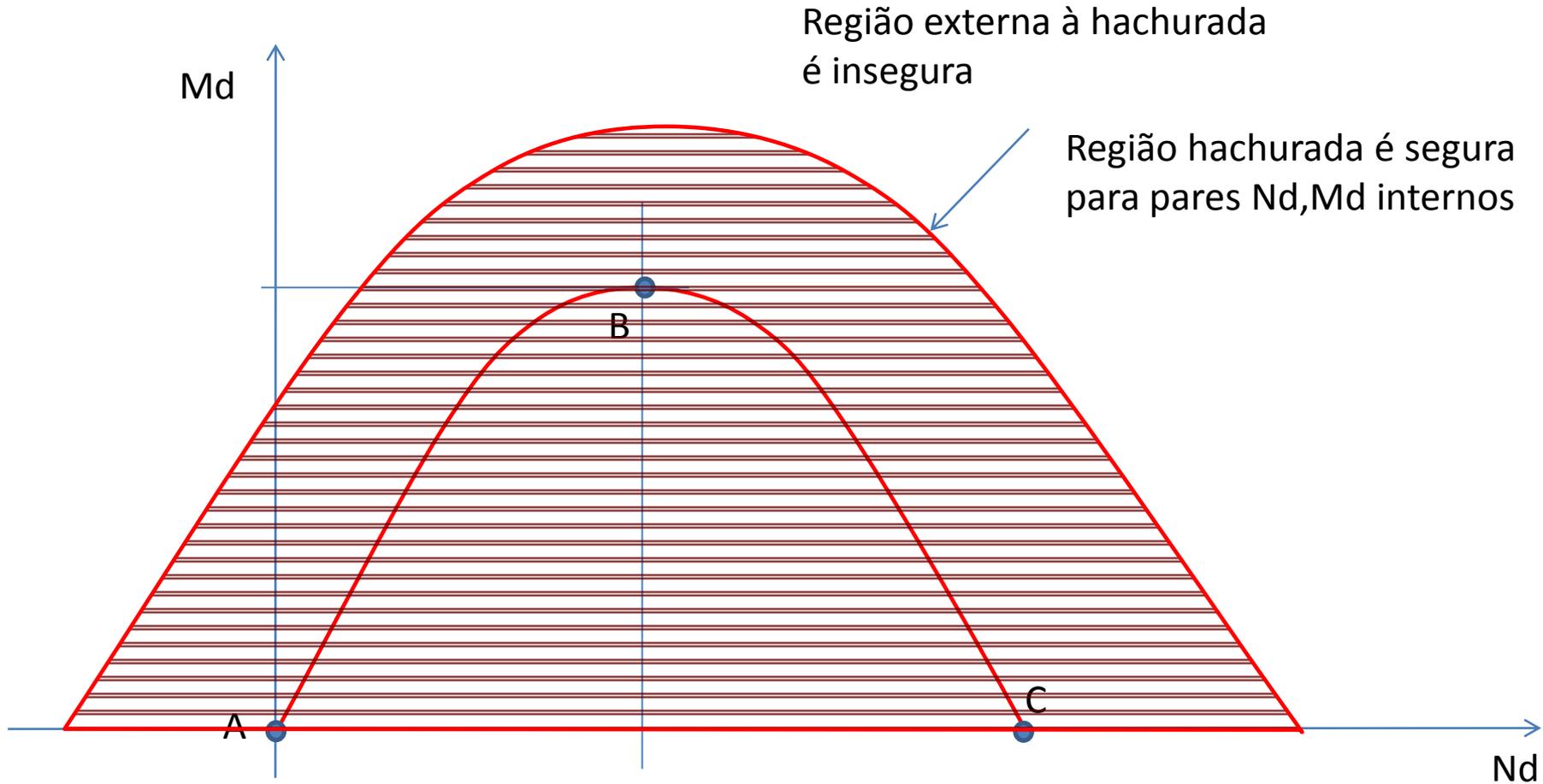


Diagrama de interação

Verificação da Segurança



Efeito de 2ª ordem local (“flambagem”)

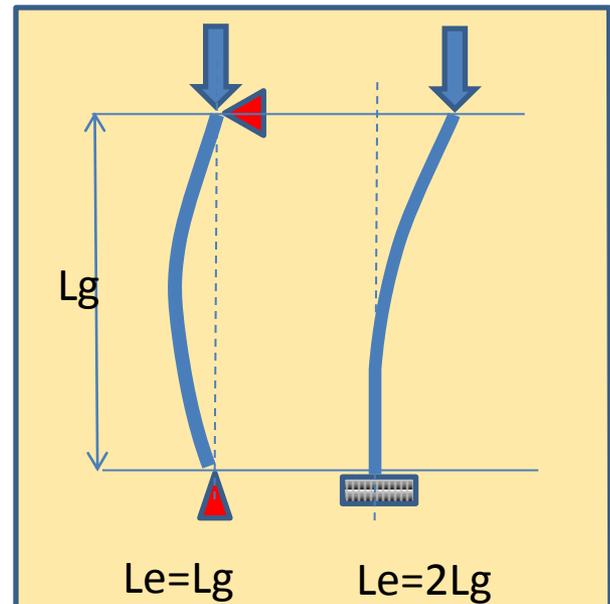
M1 é o momento solicitante que atua no pilar

$e_1 = M_1 d / N_d$ efeito de 1ª ordem

Com $e_1 \geq e_{1,min} = 0,03h + 0,015 m$

A seção transversal do pilar é definida por b e h

$\lambda = 3,46 \cdot L_e / h$ c/ h e L_e são tomados na direção de e_1



Sempre que $35 < \lambda \leq 90$ o pilar é considerado esbelto

$$e_2 = \frac{l_e^2}{10} \frac{0,005}{(v+0,5) \cdot h}$$

Com $v + 0,5 \geq 1$

$$v = \frac{N_d}{b \cdot h \cdot f_{cd}}$$

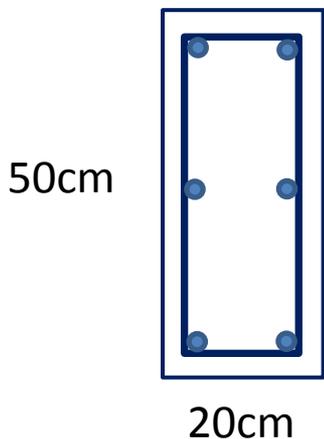
Momento total incluindo o efeito de 1ª e 2ª ordem

$$M_d = (e_1 + e_2) \cdot N_d$$

Obs.: se $\lambda \leq 35$ (pilar curto) admitir $e_2 = 0$
se $\lambda > 90$ aumentar seção

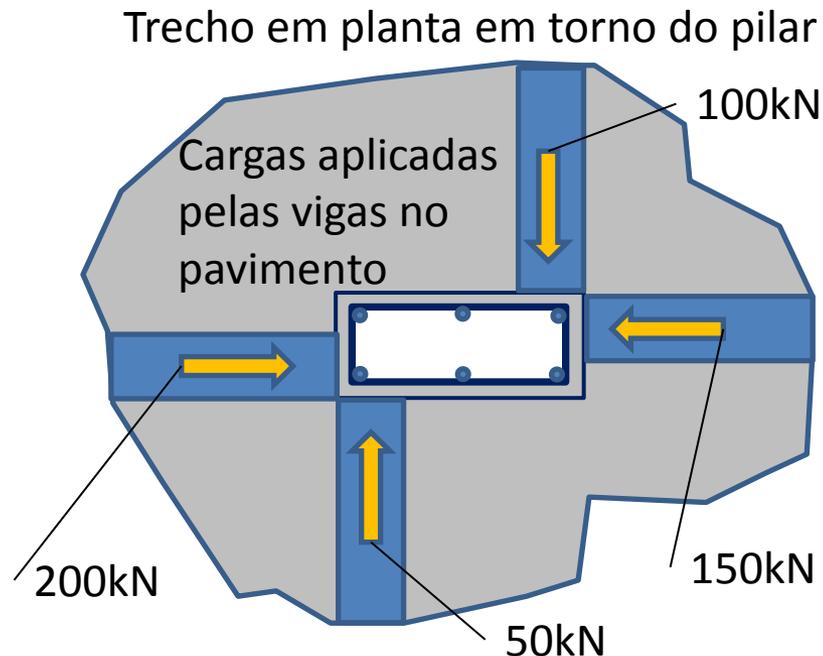
O efeito da esbelteza (λ) é levado em consideração pelo acréscimo de uma excentricidade adicional e_2

Exemplo 1 de dimensionamento de pilares



Concreto $f_{ck}=25\text{MPa}$

Aço CA-50 - 6ϕ de ??
 $d'=5\text{cm}$ assumido para
 cobrimento 2,5cm

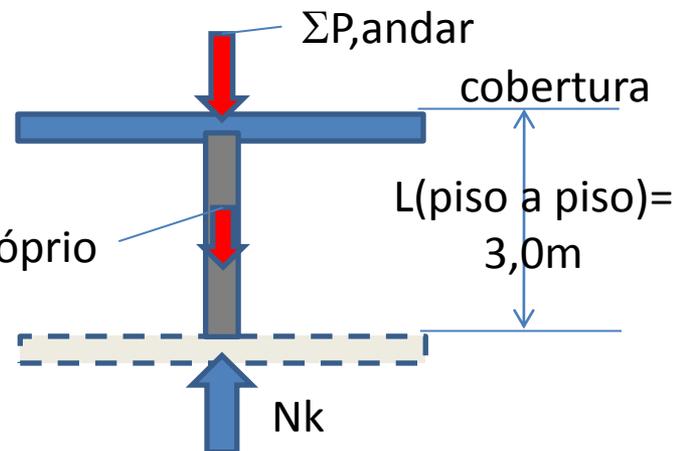


a) $\Sigma P_{\text{andar}} = 100 + 150 + 50 + 200 = 500 \text{ kN}$

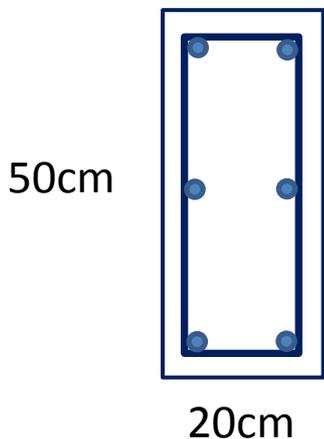
b) Portanto $N_k = 500 + 0,2 \cdot 0,5 \cdot 3,0 \cdot 25$

$N_k = 507,5 \text{ kN}$

Peso próprio

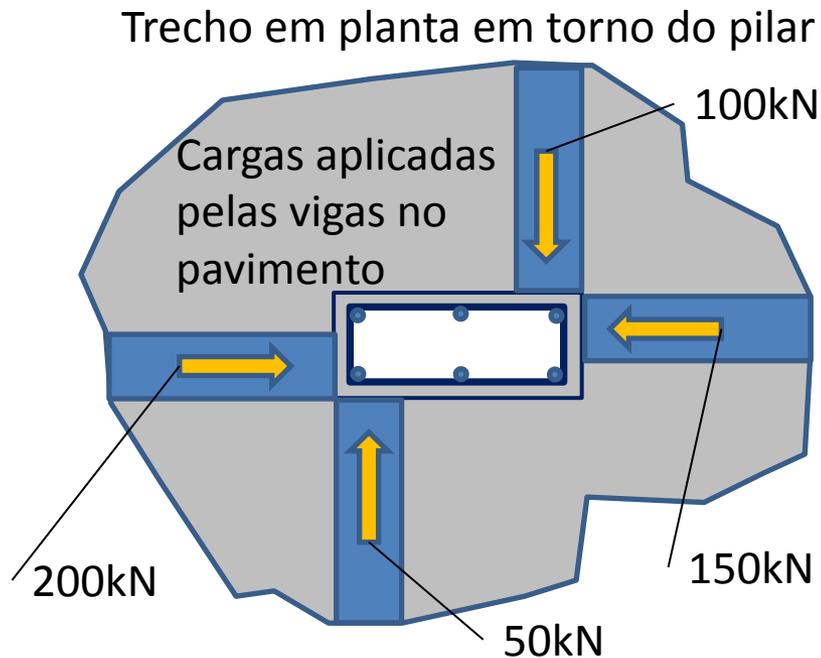


Exemplo 1 de dimensionamento de pilares



Concreto $f_{ck}=25\text{MPa}$

Aço CA-50 - 6ϕ de ??
 $d'=5\text{cm}$ assumido para
cobrimento 2,5cm



c) Σ Momentos será assumida = 0

d) Portanto $M_{k1} = M_{k1,\min}$

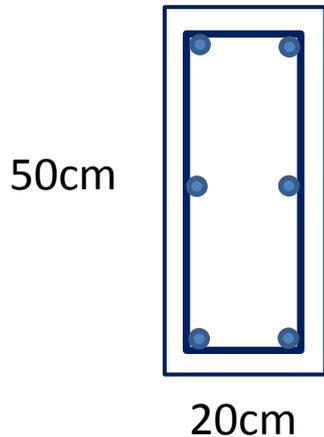
e) $e_{1,\min} = 0,03h + 0,015\text{m}$

f) Para direção da menor dimensão (esbeltez maior) $h = 20\text{cm}$

g) $e_1 = 0,03 \cdot 0,2 + 0,015 = 0,021\text{ m (2,1 cm)}$

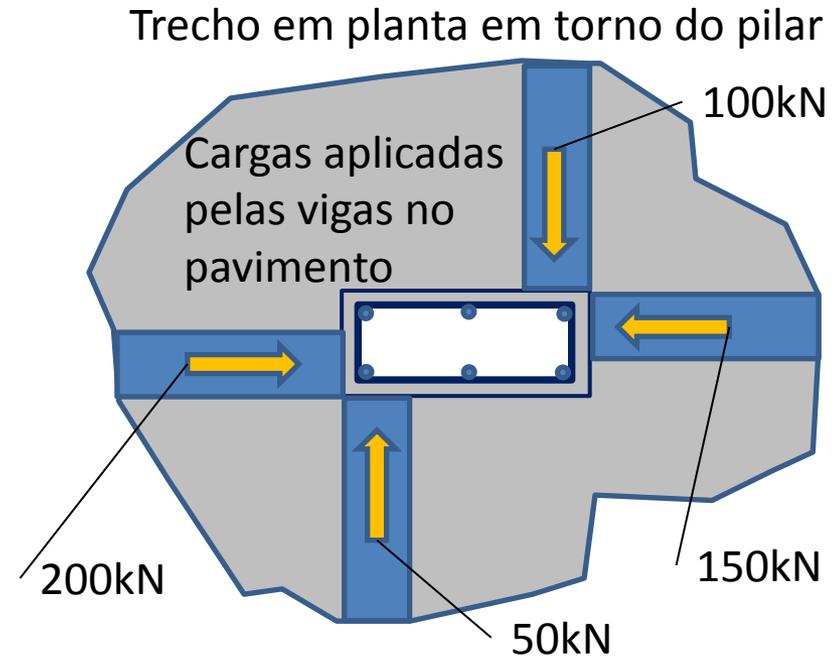
O correto seria avaliar o desequilíbrio evidente das força aplicadas pelas vigas em relação ao CG do pilar.

Exemplo 1 de dimensionamento de pilares



Concreto $f_{ck}=25\text{MPa}$

Aço CA-50 - 6 ϕ de ??
 $d'=5\text{cm}$ assumido para
 cobrimento 2,5cm



h) $M_{1k} = 0,021 \cdot 507,5 = 10,658 \text{ kNm}$

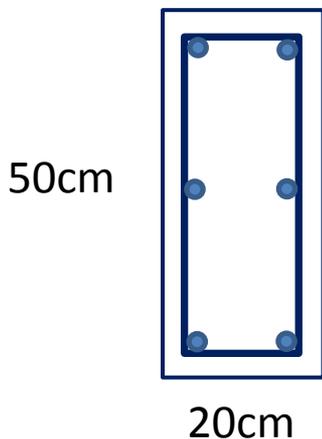
i) $L_e = L_g = 3,0 \text{ m}$ $\lambda = 3,46 \cdot 3,0 / 0,2 = 51,9 > 35$ o pilar é esbelto

φ) $v = \frac{507,5 \cdot 1,4}{25000/1,4 \cdot 0,2 \cdot 0,5} = 0,398$ $(v + 0,5) = 0,898 < 1$, portanto, $(v + 0,5) = 1$

k) $e_2 = 9/10 \cdot 0,005 / (1 \cdot 0,2) = 0,0225 \text{ m}$

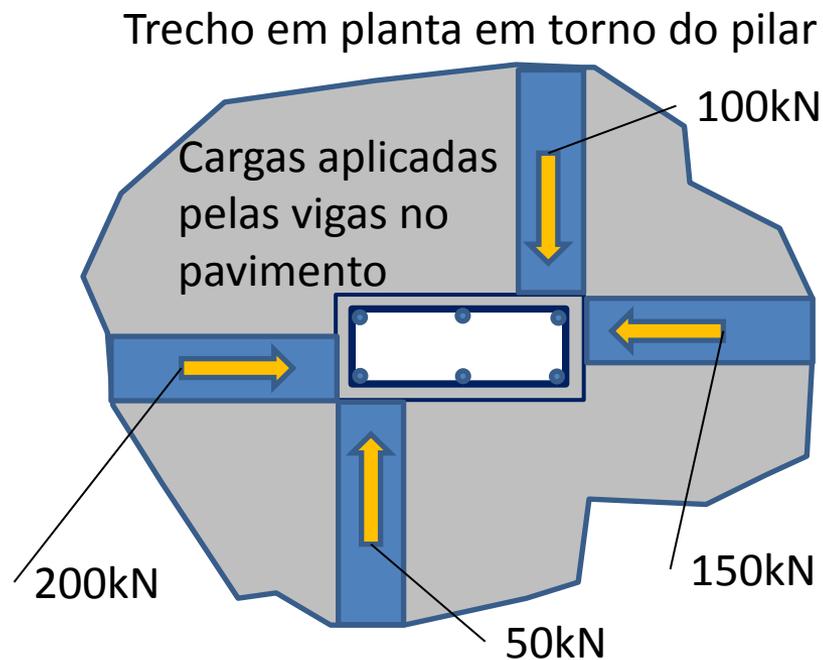
l) $M_{2k} = 0,0225 \cdot 507,5 = 11,419 \text{ kNm}$

Exemplo 1 de dimensionamento de pilares



Concreto $f_{ck}=25\text{MPa}$

Aço CA-50 - 6ϕ de ??
 $d'=5\text{cm}$ assumido para
cobrimento 2,5cm



m) $M_{total,k} = 10,658 + 11,419 = 22,077 \text{ kNm}$

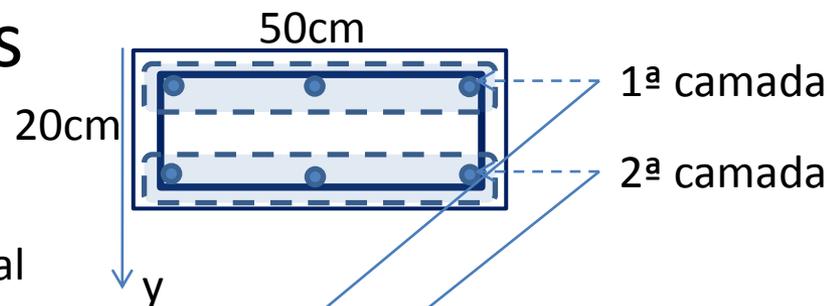
n) Introduzindo o par N_d, M_d no diagrama tem-se

o) $N_d = 710,5 \text{ kN}$ e $M_d = 30,91 \text{ kNm}$ que devem estar numa região segura do diagrama de interação.

Exemplo 1 de dimensionamento de pilares

Concreto $f_{ck}=25\text{MPa}$

Aço CA-50 - 6ϕ de 16mm = 12cm^2 - área total
 $d' = 5\text{cm}$ assumido para cobertura 2,5cm



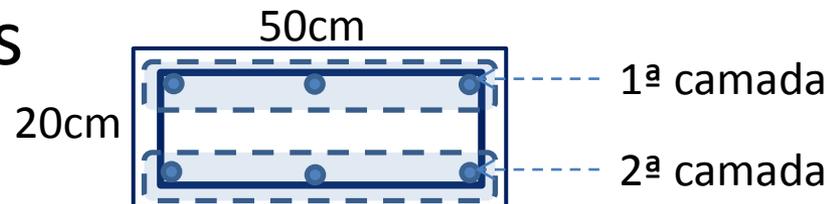
Entrada de dados na planilha desenvolvida com o conteúdo apresentado na disciplina

Diagrama de interação				γ_f	γ_c	K_{mod}	γ_s
				1,4	1,4	0,85	1,15
kN,m							
1) Seção de concreto							
	b	h	f_{ck}	K_{mod.fcd}			
	0,500m	0,200m	25,0MPa	15179kN/m ²			
2) Seção de aço							
	camada	y	A_s	aço			d/h
				f_{yk}	f_{yd}	ε_{yd}	
	1	0,050m	6,0cm ²	500,0MPa	43,48	0,00207	0,750
	2	0,150m	6,0cm ²	500,0MPa	43,48	0,00207	
	3				0,00	0	
	4				0,00	0	
	5				0,00	0	
		0,150m	12,0cm ²			0,00207	
			1,20%				

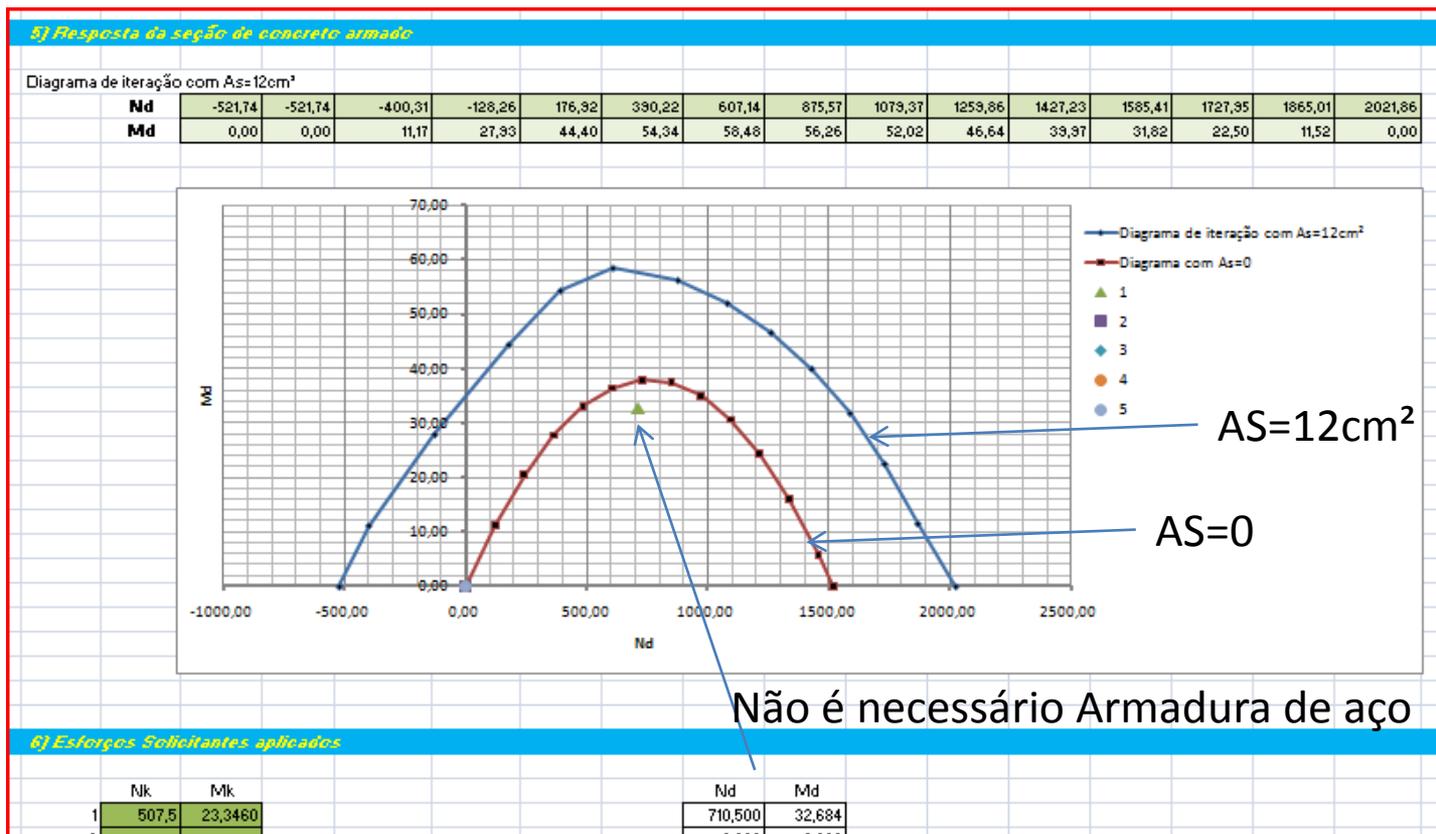
Exemplo 1 de dimensionamento de pilares

Concreto $f_{ck}=25\text{MPa}$

Aço CA-50 - 6ϕ de 16mm = 12cm^2 - área total
 $d' = 5\text{cm}$ assumido para cobertura 2,5cm



Resultados no gráfico da planilha



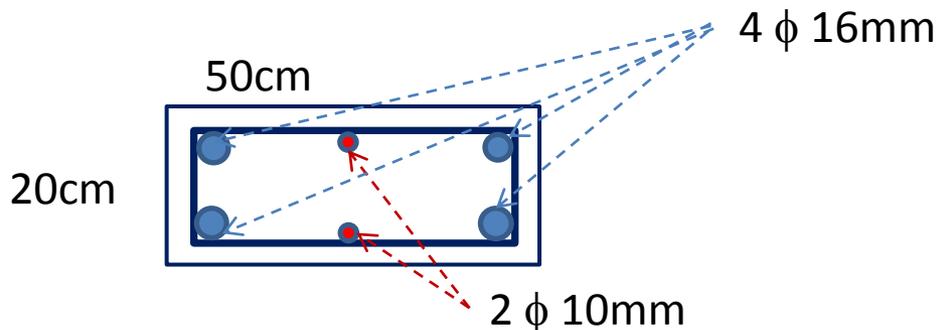
Exemplo 1 de dimensionamento de pilares

Concreto $f_{ck}=25\text{MPa}$

Aço CA-50 - 6 ϕ de ?? mm

$d' = 5\text{cm}$ assumido para cobrimento 2,5cm

- p) Como a armadura de aço não é necessária aplica-se a armadura mínima $0,8\%A_c$
- q) Portanto, $A_s = 0,008 \cdot 20 \cdot 50 = 8 \text{ cm}^2$ a dividir por 6 barras.
- r) $8 / 6 = 1,333 \text{ cm}^2/\text{barra}$ como o espaçamento máximo entra barras é de 30cm o número de 6 barras é mínimo aceitável e portanto, o mais correto seria adotar 4 barras de 16mm (4x2) + 2 barras de 10 mm ($1,6 \text{ cm}^2$), totalizando: $9,6 \text{ cm}^2$



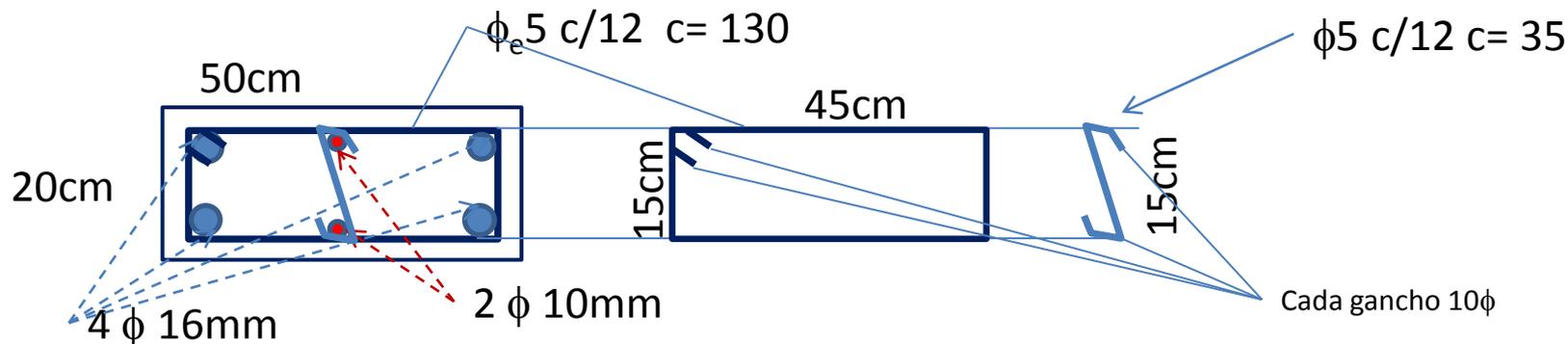
Exemplo 1 de dimensionamento de pilares

Concreto $f_{ck}=25\text{MPa}$

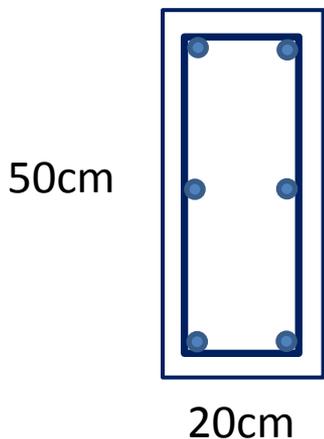
Aço CA-50 - $4\phi 16\text{mm} + 2\phi 10\text{mm}$

$d' = 5\text{cm}$ assumido para cobertura 2,5cm

- p) Diâmetro do estribo - $\phi_e = \text{Max}(\phi_{\text{max}}/4 ; 5\text{mm}) = \text{Max}(16/4 ; 5) = 5\text{mm}$
- q) Espaçamento dos estribos na vertical (direção longitudinal do pilar)
 $s_v = \text{Min}(12\phi_{\text{min}}; h_{\text{min}}; 20\text{cm}) = \text{Min}(12 \times 1,0; 20; 20) = 12\text{ cm}$
- s) Espaçamento entre barras longitudinais sem travamento horizontal (transversal)
 $s_t = 20 \phi_e = 20 \times 0,5 = 10\text{ cm}$, portanto necessário travar os 2 $\phi 10\text{mm}$ internos com uma barra de diâmetro igual ao do estribo e espaçada de s_v . Ou seja, $\phi 5\text{ c}/12$



Exemplo 2 de dimensionamento de pilares



Concreto $f_{ck}=25\text{MPa}$

Aço CA-50 - 6 ϕ de ??
 $d'=5\text{cm}$ assumido para
 cobrimento 2,5cm

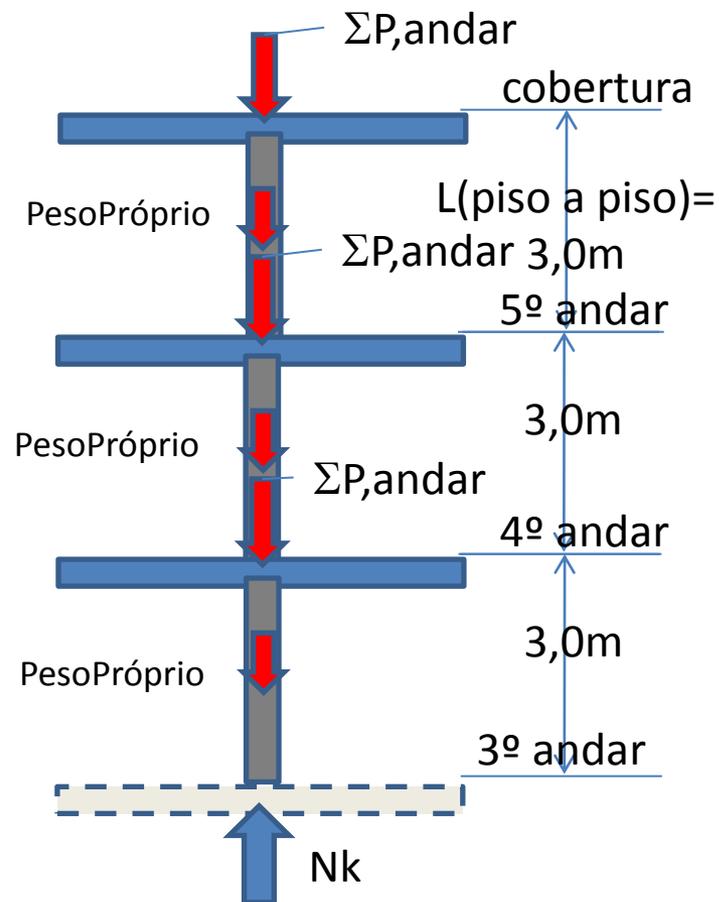
Idem exemplo 1 , anterior

a) $\Sigma P_{\text{andar}} = 100 + 150 + 50 + 200 = 500 \text{ kN}$

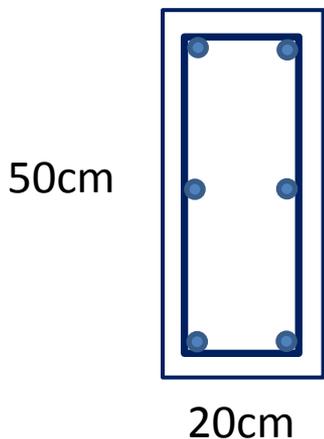
b) Portanto $N_k = (500 + 0,2 \cdot 0,5 \cdot 3,0 \cdot 25) \times 3$

$N_k = 1.522,5 \text{ kN}$

Peso próprio



Exemplo 2 de dimensionamento de pilares

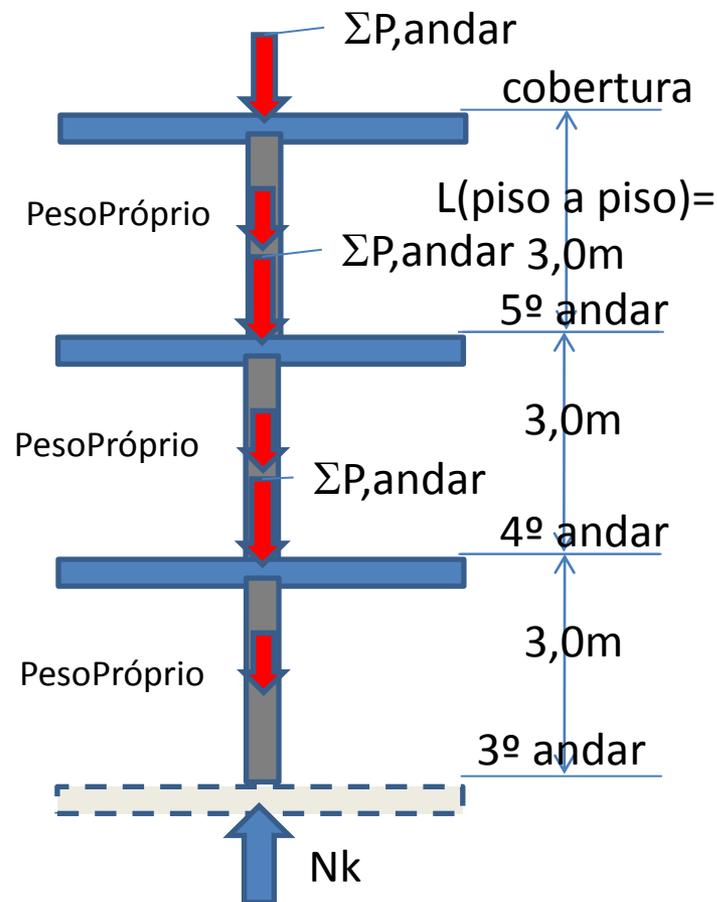


Concreto $f_{ck}=25\text{MPa}$

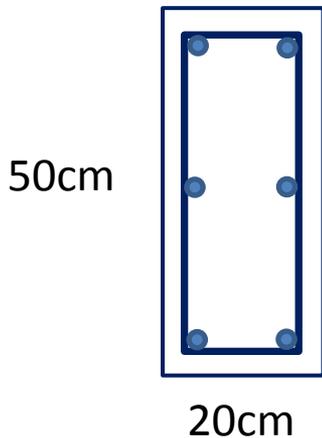
Aço CA-50 - 6 ϕ de ??
 $d'=5\text{cm}$ assumido para
cobrimento 2,5cm

Idem exemplo 1

- c) Σ Momentos será assumida = 0
- d) Portanto $M_{k1} = M_{k1,\text{min}}$
- e) $e_{1,\text{min}} = 0,03h + 0,015\text{m}$
- f) Para direção da menor dimensão (esbeltez maior) $h = 20\text{cm}$
- g) $e_1 = 0,03 \cdot 0,2 + 0,015 = 0,021\text{ m (2,1 cm)}$

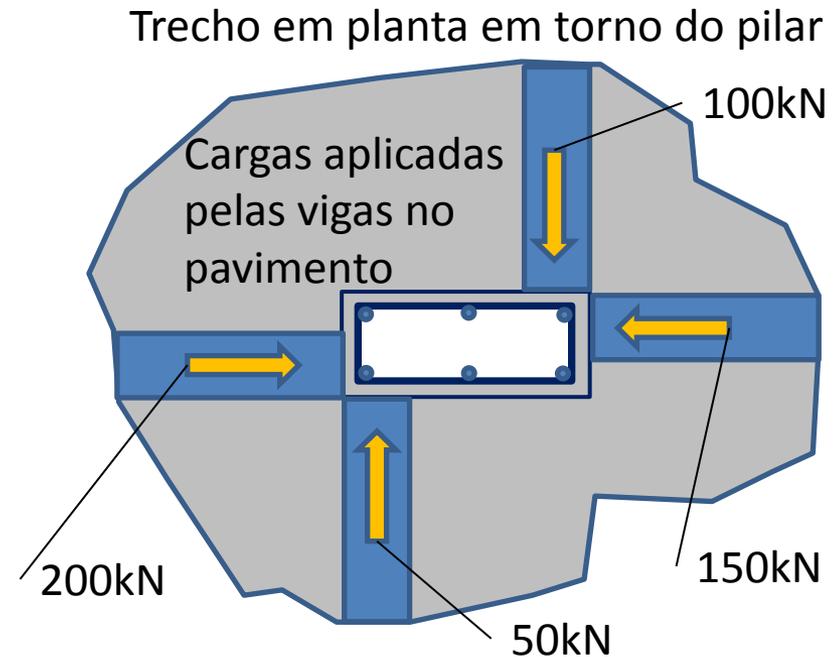


Exemplo 2 de dimensionamento de pilares



Concreto $f_{ck}=25\text{MPa}$

Aço CA-50 - 6ϕ de ??
 $d'=5\text{cm}$ assumido para
 cobrimento 2,5cm



h) $M_{1k} = 0,021 \cdot 1.522,5 = 31,973 \text{ kNm}$

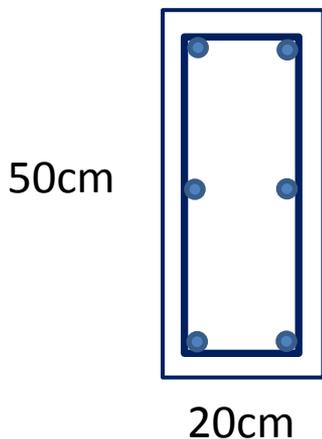
i) $L_e = L_g = 3,0 \text{ m}$ $\lambda = 3,46 \cdot 3,0 / 0,2 = 51,9 > 35$ o pilar é esbelto

φ) $v = \frac{1.522,5 \cdot 1,4}{25000/1,4 \cdot 0,2 \cdot 0,5} = 1,194$ $(v + 0,5) = 1,694 > 1$, portanto, $(v + 0,5) = 1,694$

k) $e_2 = 9/10 \cdot 0,005 / (1,694 \cdot 0,2) = 0,01328 \text{ m}$ - Menor do que a do exemplo 1

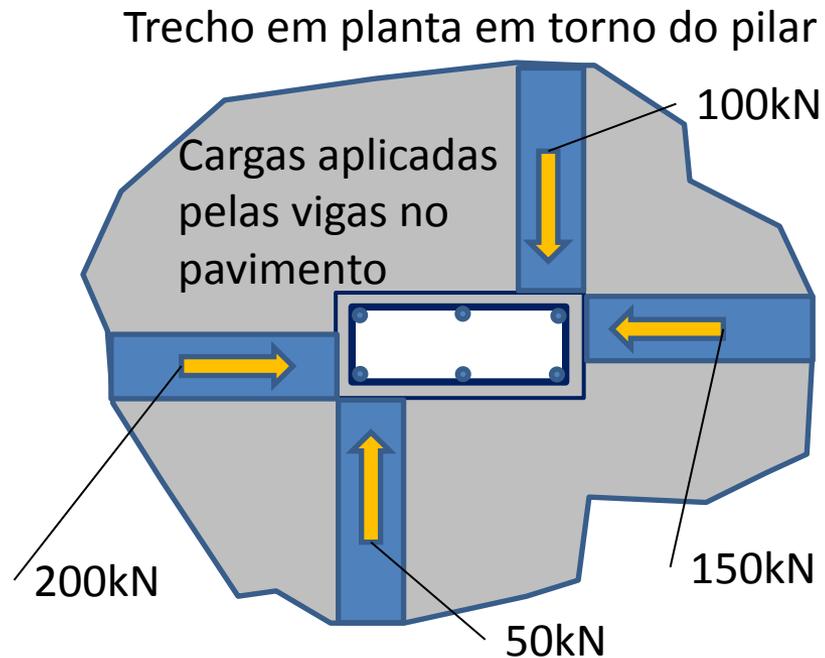
l) $M_{2k} = 0,01328 \cdot 1522,5 = 20,22 \text{ kNm}$

Exemplo 2 de dimensionamento de pilares



Concreto $f_{ck}=25\text{MPa}$

Aço CA-50 - 6ϕ de ??
 $d'=5\text{cm}$ assumido para
cobrimento 2,5cm



m) $M_{total,k} = 31,973 + 20,22 = 52,20 \text{ kNm}$

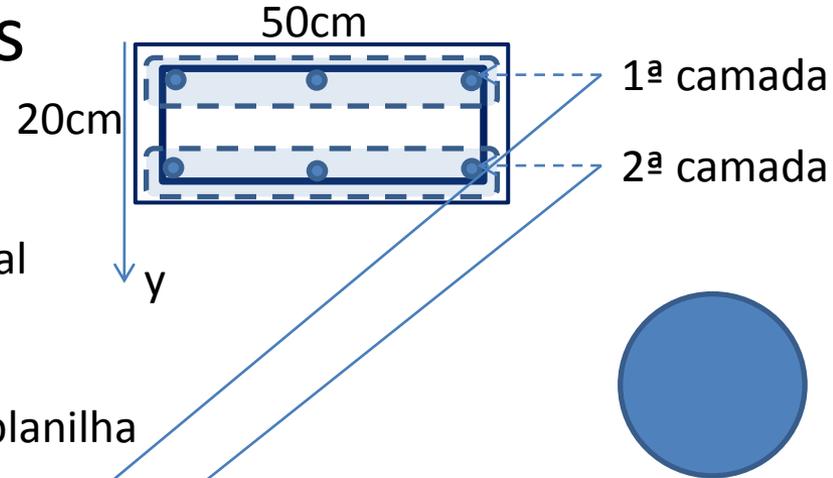
n) Introduzindo o par N_d, M_d no diagrama tem-se

o) $N_d = 2.131,5 \text{ kN}$ e $M_d = 73,08 \text{ kNm}$ que devem estar numa região segura do diagrama de interação.

Exemplo 2 de dimensionamento de pilares

Concreto $f_{ck}=25\text{MPa}$

Aço CA-50 - 6ϕ de 16mm = 12cm^2 - área total
 $d' = 5\text{cm}$ assumido para cobertura 2,5cm



Entrada de dados na planilha

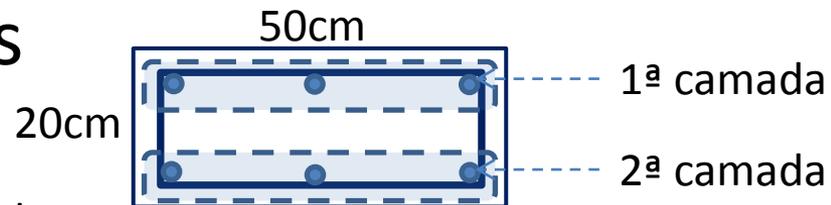
Diagrama de interação		γ_f	γ_c	K_{mod}	γ_s	
kN,m		1,4	1,4	0,85	1,15	
1) Seção de concreto						
b	h	f_{ck}	K_{mod.fcd}			
0,500m	0,200m	25,0MPa	15179kN/m ²			
2) Seção de aço						
		aço				
camada	g	A_s	f_{yk}	f_{yd}	ε_{gd}	d/h
1	0,050m	22,3cm ²	500,0MPa	43,48	0,00207	0,750
2	0,150m	22,3cm ²	500,0MPa	43,48	0,00207	
3				0,00	0	
4				0,00	0	
5				0,00	0	
		0,150m	45,8cm ²		0,00207	
			4,58%			

Exemplo 2 de dimensionamento de pilares

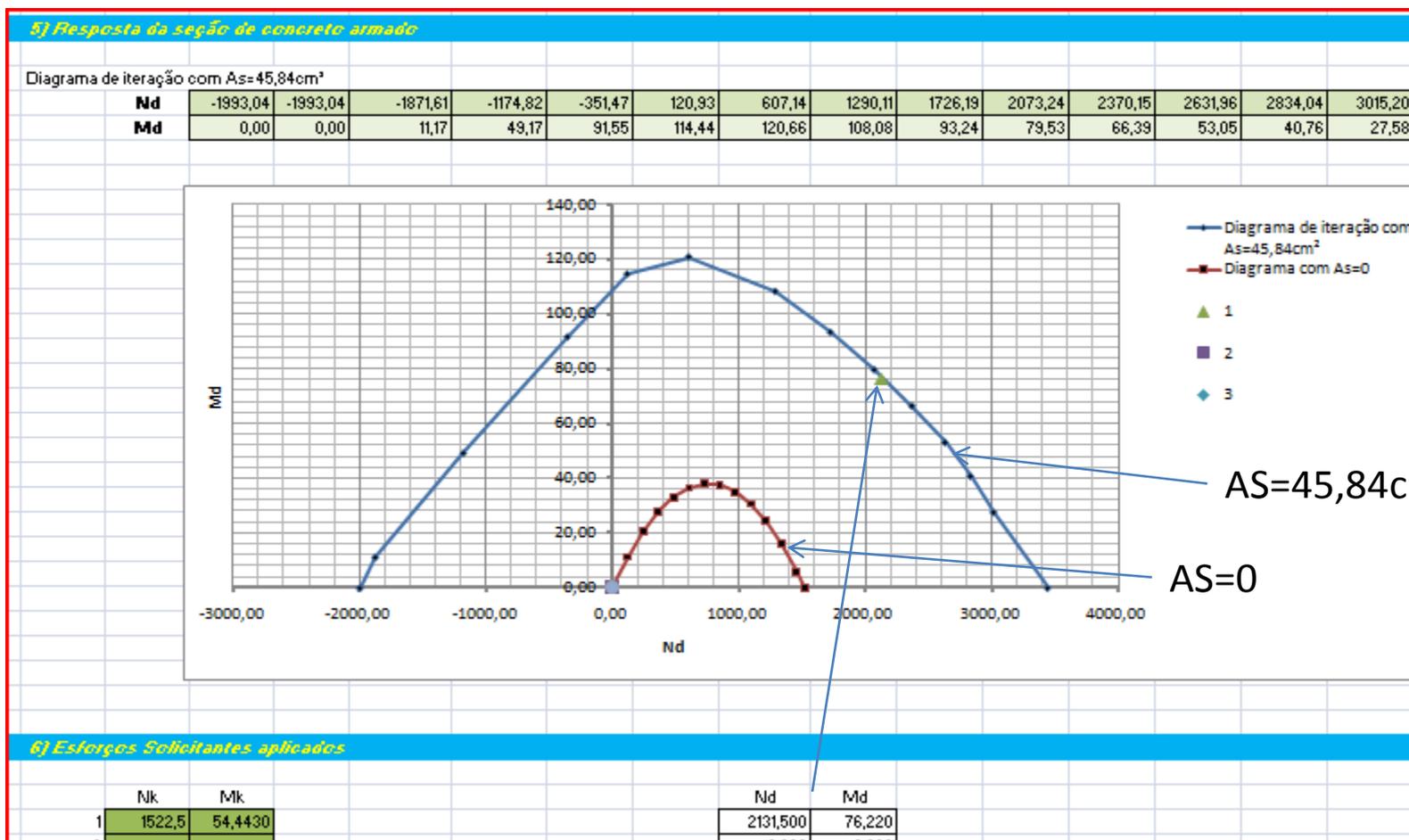
Concreto $f_{ck}=25\text{MPa}$

Aço CA-50 - 6 ϕ de 16mm = 12cm^2 - área total

$d'=5\text{cm}$ assumido para cobrimento 2,5cm



Resultados no gráfico da planilha



Exemplo 2 de dimensionamento de pilares

Concreto $f_{ck}=25\text{MPa}$

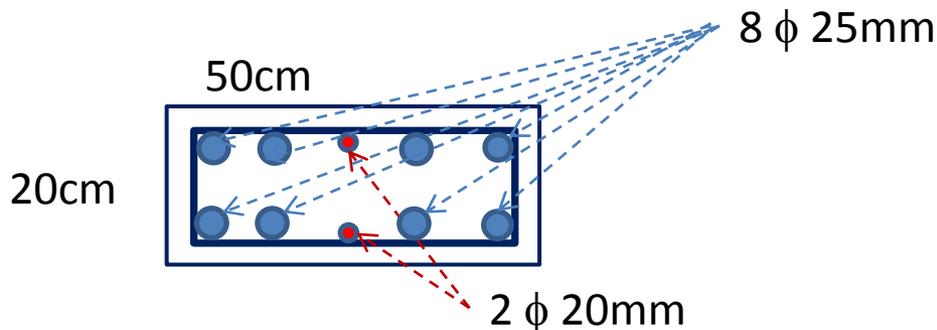
Aço CA-50 - 6ϕ de ?? mm

$d' = 5\text{cm}$ assumido para cobrimento 2,5cm

p) A armadura de aço necessária é $45,84\text{cm}^2$

q) Pelo “critério prático de espaçamento” $n\phi = \text{int}(50/12)+1 = 5$ por lado de 50 cm

r) Com $45,84\text{cm}^2 / 10$ barras = $4,584\text{cm}^2$ por barra - $8f\ 25\text{mm} + 2f\ 20\text{mm}$

$$\underbrace{8 \times 5,0}_{8f\ 25\text{mm}} + \underbrace{2 \times 3,15}_{2f\ 20\text{mm}} = 46,3\text{cm}^2$$


Exemplo 2 de dimensionamento de pilares

Concreto $f_{ck}=25\text{MPa}$

Aço CA-50 - $8\phi 25\text{mm} + 2\phi 20\text{mm}$

$d' = 5\text{cm}$ assumido para cobertura $2,5\text{cm}$

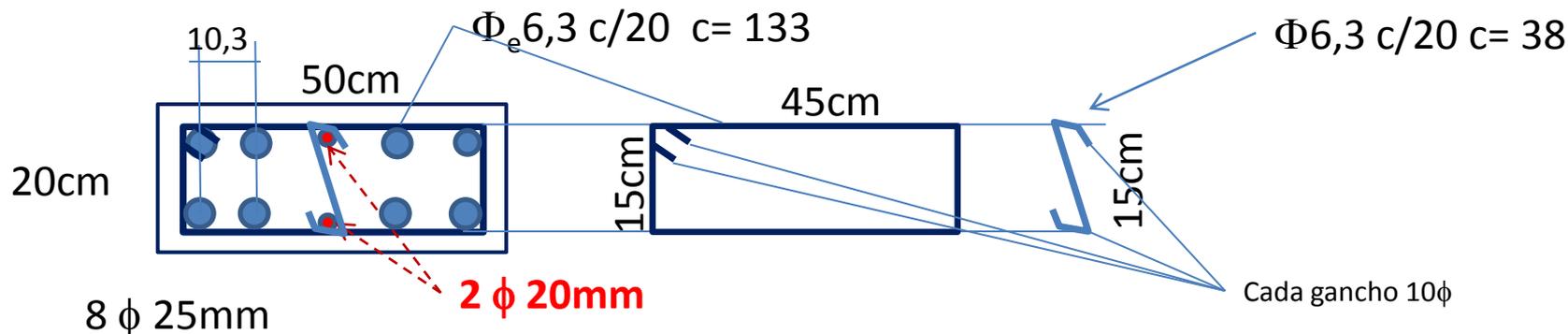
p) Diâmetro do estribo - $\phi_e = \text{Max}(\phi_{\text{max}}/4 ; 5\text{mm}) = \text{Max}(25/4 ; 5) = 6,3\text{mm}$

q) Espaçamento dos estribos na vertical (direção longitudinal do pilar)

$$s_v = \text{Min}(12\phi_{\text{min}}; h_{\text{min}}; 20\text{cm}) = \text{Min}(12 \times 2,0; 20; 20) = 20\text{cm}$$

s) Espaçamento entre barras longitudinais sem travamento horizontal (transversal)

$s_t = 20 \phi_e = 20 \times 0,63 = 12,6\text{ cm}$, portanto necessário travar os $2 \phi 20\text{mm}$ internos com uma barra de diâmetro igual ao do estribo e espaçada de s_v . Ou seja, $\phi 6,3 \text{ c}/20$



Comentários sobre os exemplos 1 e 2

- Notar que o efeito de 1ª ordem devido a excentricidade mínima fez com que o momento M_1 triplicasse do exemplo 1 para o 2
- O efeito de 2ª ordem (representado por e_2) não aumentou da mesma forma que e_1 devido ao efeito de $(\nu+0,5) \geq 1$, que atuou de forma a diminuir o valor de e_2 .
- Mesmo assim, a armadura do pilar chegou a um limite acima do utilizado, em termos práticos, ou seja, $A_{s,min, pilar} = 3\%$ (A_s/A_c , exemplo 2 = 4,63%)

Comentários sobre os exemplos 1 e 2

- Em projetos profissionais, o que se faz é dimensionar a seção de concreto do pilar com taxas limites máximas (4%) no andar tipo mais inferior e aumentar a seção abaixo deste andar, de forma a que se atinja um projeto econômico.
- Caracteriza-se este andar de aumento de seção do pilar, aquele que deixa de ser tipo ou que tenha uma mudança de piso a piso.