



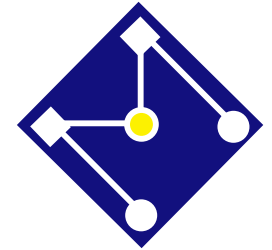
PMR 3306

Sistemas Dinâmicos II



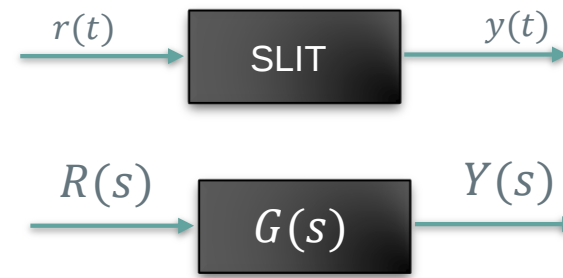
RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

Larissa Driemeier
driemeie@usp.br



FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA: LAPLACE

Quociente da transformada de Laplace ($\mathcal{L}$) do sinal de saída pela transformada de Laplace do sinal de entrada considerando nulas as condições iniciais



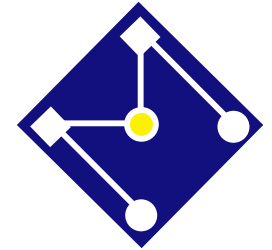
$$G(s) = \left. \frac{Y(s)}{R(s)} \right|_{c.i.=0}$$

Para condições iniciais nulas



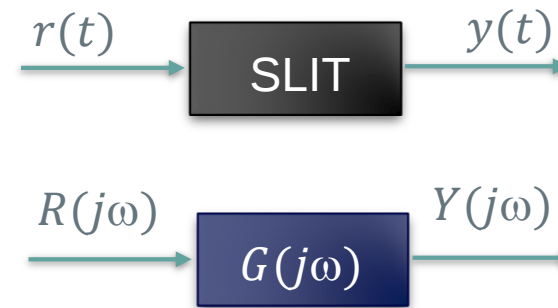
$$Y(s) = G(s)R(s)$$

- A função de transferência é um conceito importante para descrever o comportamento de sistemas do ponto de vista de entrada/saída
- Para SLITs, a função de transferência caracteriza completamente o sistema do ponto de vista de entrada-saída

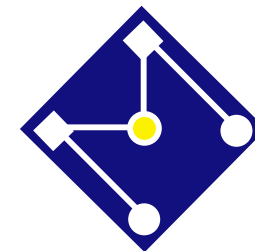


FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA: FOURIER

Quociente da transformada de Fourier ($\mathcal{F}$) do sinal de saída pela transformada de Fourier do sinal de entrada, considerando nulas as condições iniciais



$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)} = M e^{j\varphi} = M \angle \varphi$$



LAPLACE VS FOURIER

Transformada de Laplace (1785)

$$X(\textcolor{red}{s}) = \int_{-0}^{+\infty} x(t)e^{-\textcolor{red}{s}t} dt$$

Função da variável complexa $s = \sigma + j\omega$

Função do tempo (frequentemente mudando em $t = 0$)

Usada em controle, estabilidade

Transformada de Fourier (1822)

$$X(\textcolor{blue}{\omega}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\textcolor{blue}{\omega}t} dt$$

Função da frequência ω

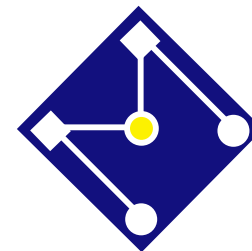
Função do tempo, geralmente periódica ou de duração infinita

Usada para análise em frequência

RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

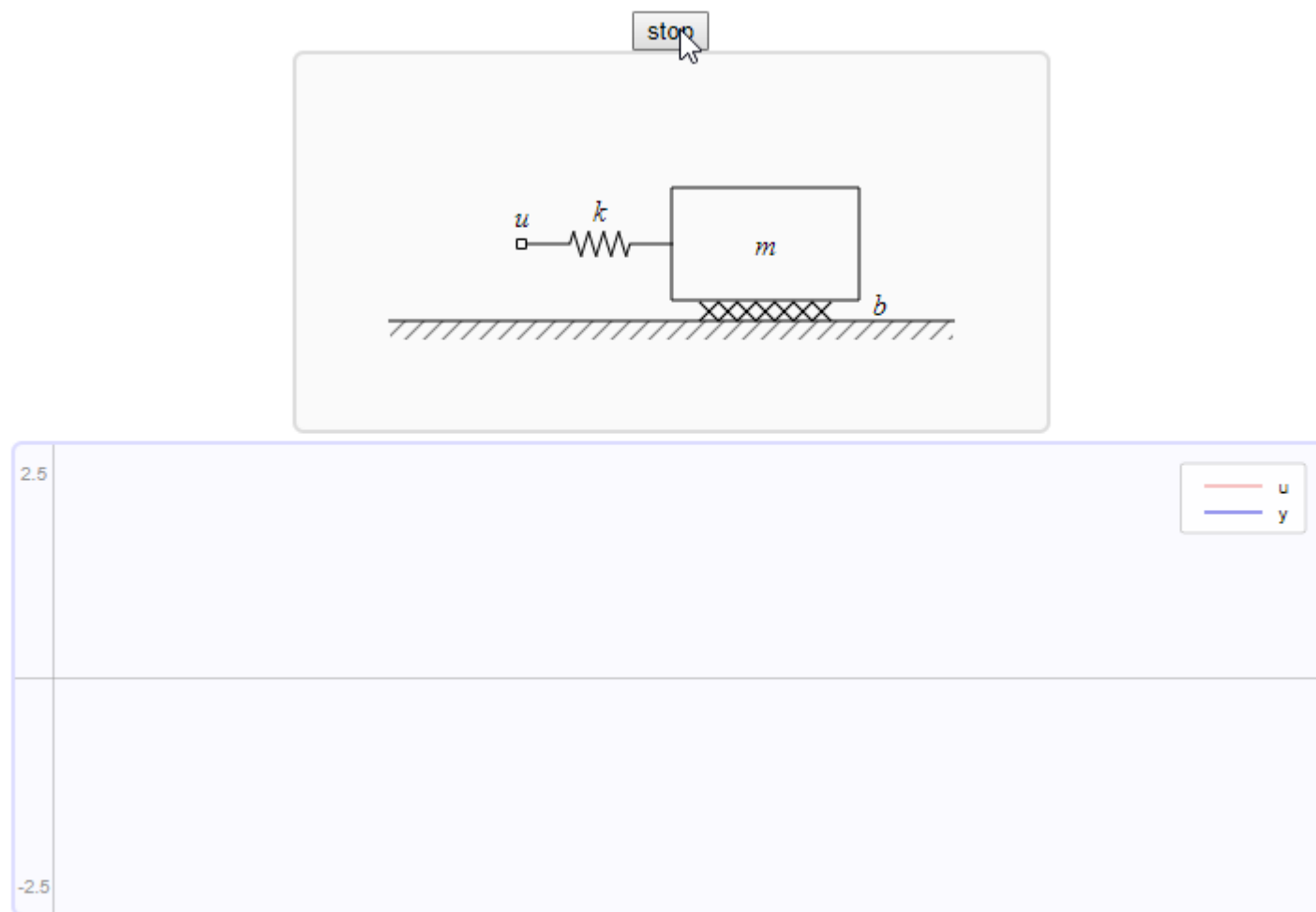
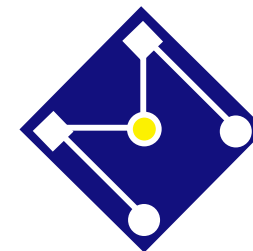
O termo ***resposta em frequência*** significa a **resposta em regime permanente de um sistema a uma entrada senoidal.**

[Ogata]

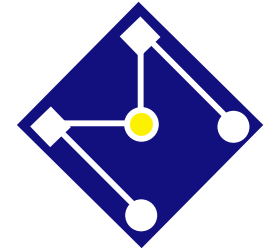


RESULTADOS DE UM TESTE DE UM VEÍCULO EM UMA ESTRADA DE PERFIL SENOIDAL, COM VELOCIDADE CRESCENTE

- Até 40 Km/h as oscilações do condutor acompanham as da via, ié, quando a via sobe, o condutor sobe a mesma amplitude e vice versa;
- Aos, aproximadamente, 70 Km/h a amplitude das oscilações do condutor é muito maior do que a amplitude do perfil da via;
- A $80 - 85 \text{ Km/h}$ a amplitude das oscilações é semelhante à observada a 70 Km/h ; no entanto, a diferença de fase é da ordem dos 180° , i.e., quando a via sobe, o condutor desce no assento, quando a estrada desce o condutor bate com a cabeça no capô
- A 150 Km/h as oscilações são quase imperceptíveis ao condutor, e a condução se torna bastante agradável !



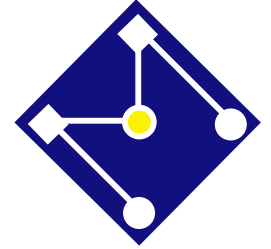
Animation by Ames Bielenberg



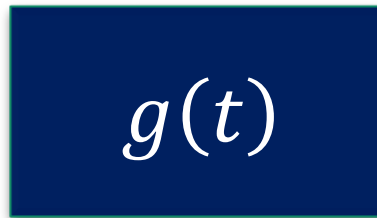
ONDA SENOIDAL

Para Sistema **LIT**, se a entrada é uma onda senoidal a uma frequência particular, então a saída será ...



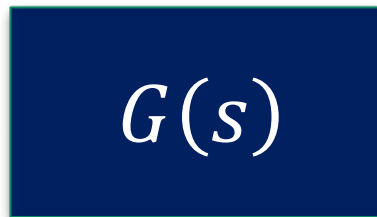


$$r(t) = A_{in} \sin(\omega_0 t)$$

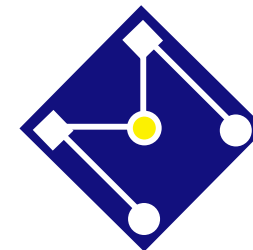


$$y(t) = r(t) * x(t)$$

$$R(s) = \frac{A_{in} \omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$



$$Y(s) = G(s)R(s) = G(s) \frac{A_{in} \omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$



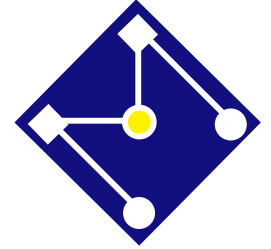
$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{(s + z_1)(s + z_2) \dots}{(s + p_1)(s + p_2) \dots} \\
 R(s) &= \frac{A_{in} \omega_0}{s^2 + \omega_0^2}
 \end{aligned}
 \quad \rightarrow \quad
 Y(s) = R(s)G(s) = \underbrace{\frac{c_1}{s + j\omega_0} + \frac{c_2}{s - j\omega_0}}_{\frac{A_{in} \omega_0}{s^2 + \omega_0^2}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s + p_i}}_{\frac{(s + z_1)(s + z_2) \dots}{(s + p_1)(s + p_2) \dots}}$$

$$y(t) = \underbrace{c_1 e^{-j\omega_0 t} + c_2 e^{j\omega_0 t}}_{\text{Resposta forçada}} + \underbrace{K_1 e^{-P_1 t} + K_2 e^{-P_2 t} + \dots}_{\text{Resposta natural}}$$

Resposta forçada

Resposta natural

$\lim_{t \rightarrow \infty} = 0$ (sistema estável: $p_i > 0$)



$$Y(s) = R(s)G(s) = \frac{c_1}{s + j\omega_0} + \frac{c_2}{s - j\omega_0} + \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s + p_i}$$

$$Y(s) = \frac{A_{in}\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} G(s) = \frac{c_1(s - j\omega_0) + c_2(s + j\omega_0) + (s - j\omega_0)(s + j\omega_0) \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s + p_i}}{(s - j\omega_0)(s + j\omega_0)}$$

$$c_1 = \left. \frac{A_{in}\omega_0}{s - j\omega_0} G(s) \right|_{s=-j\omega_0} = \frac{A_{in}}{2} jG(-j\omega_0)$$

$$c_2 = \left. \frac{A_{in}\omega_0}{s + j\omega_0} G(s) \right|_{s=j\omega_0} = -\frac{A_{in}}{2} jG(j\omega_0)$$

$$y(t) = \boxed{\frac{A_{in}}{2} jG(-j\omega_0)e^{-j\omega_0 t} - \frac{A_{in}}{2} jG(j\omega_0)e^{j\omega_0 t}} + \boxed{\text{Uma parte que vai para 0 em regime estacionário...}}$$

Resposta forçada $y_p(t)$

Resposta natural $y_h(t)$

$$y_p(t) = \frac{A_{in}}{2} jG(-j\omega_0)e^{-j\omega_0 t} - \frac{A_{in}}{2} jG(j\omega_0)e^{j\omega_0 t}$$

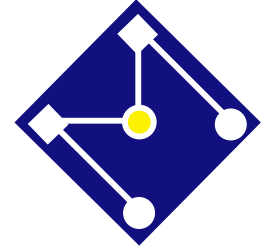
$G(j\omega_0)$ é um número complexo, e pode ser, portanto, escrito como:

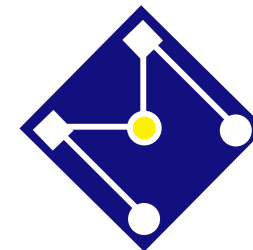
$$G(j\omega_0) = |G(j\omega_0)|e^{j\phi}$$

$$G(-j\omega_0) = |G(j\omega_0)|e^{-j\phi}$$

$$y_p(t) = A_{in}|G(j\omega_0)| \frac{e^{(j\omega_0 t + \phi)} - e^{-(j\omega_0 t + \phi)}}{2j}$$

$$y_p(t) = A_{in}|G(j\omega_0)| \sin(j\omega_0 t + \phi)$$





$$X(\omega) = A(\omega) + jB(\omega)$$

$$A(\omega) = \text{Re}[X(\omega)]$$

$$B(\omega) = \text{Im}[X(\omega)]$$

$$X(\omega) = A(\omega) + jB(\omega) = |X(\omega)| \angle \phi = |X(\omega)| e^{j\phi}$$

em radianos

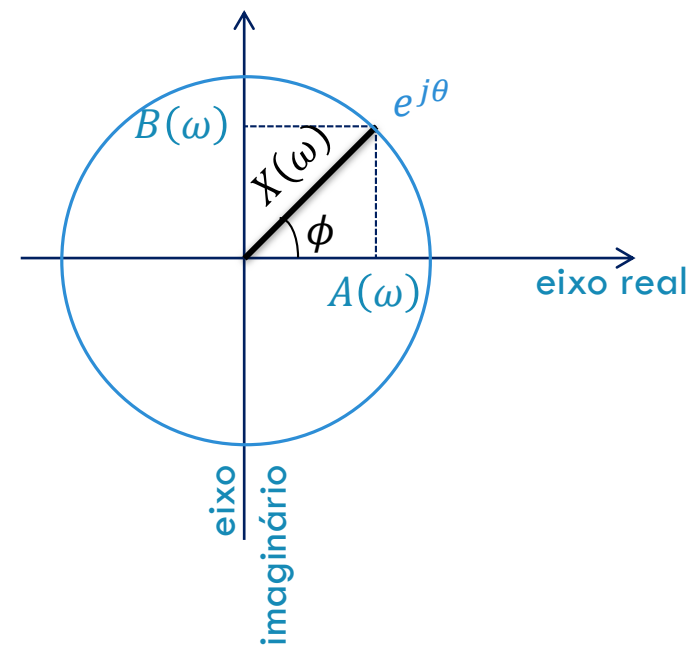
$$|X(\omega)| = \sqrt{[A(\omega)]^2 + [B(\omega)]^2}$$

em graus

Função par

$$\phi = \text{atan} \frac{B(\omega)}{A(\omega)}$$

Função ímpar



Produto e Divisão

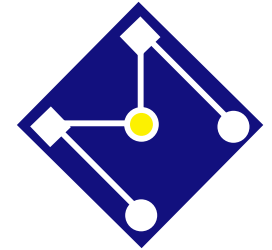
$$\frac{A \angle \theta}{C \angle \phi} = \frac{A}{C} \angle (\theta - \phi)$$

$$A \angle \theta \cdot C \angle \phi = A \cdot C \angle (\theta + \phi)$$

Potenciação e radiciação:

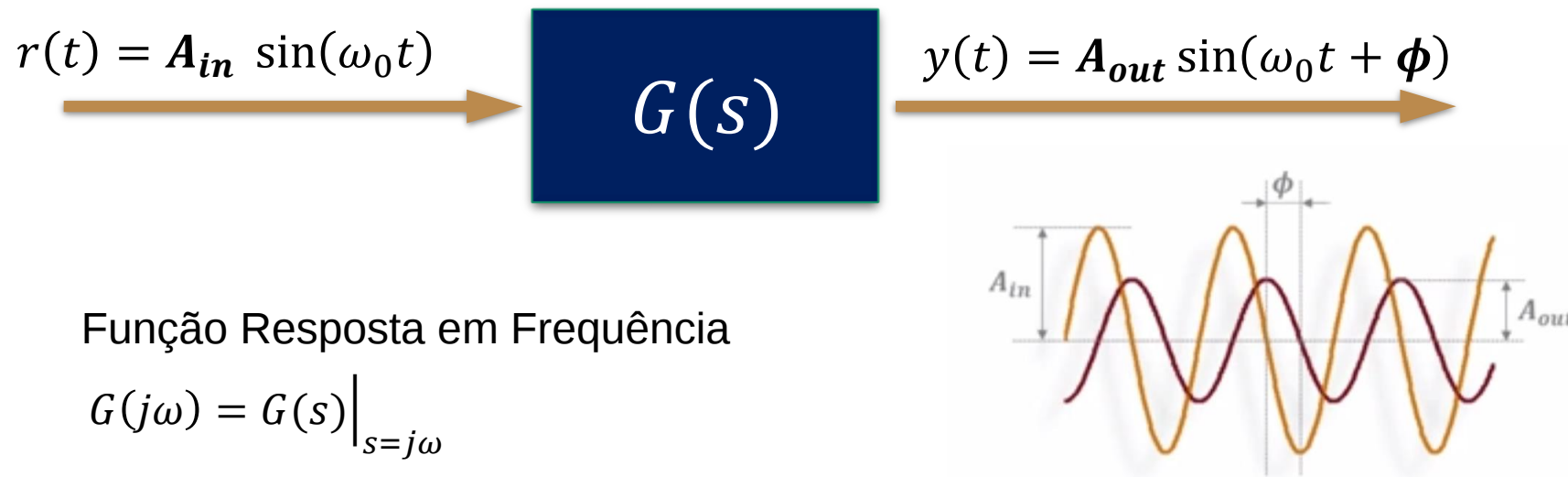
$$(A \angle \theta)^a = A^a \angle (\theta \cdot a)$$

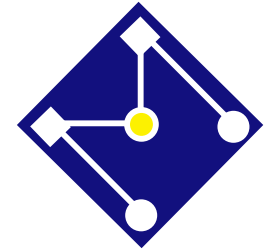
$$\sqrt[a]{A \angle \theta} = \sqrt[a]{A} \angle (\theta \div a)$$



ONDA SENOIDAL

Para Sistema **LIT**, se a entrada é uma onda senoidal a uma frequência particular, então a saída será também uma onda sinusoidal na mesma frequência, mas com diferente fase $\phi = \arg G(j\omega_0)$ e amplitude $A_{out} = A_{in}|G(j\omega_0)|$.

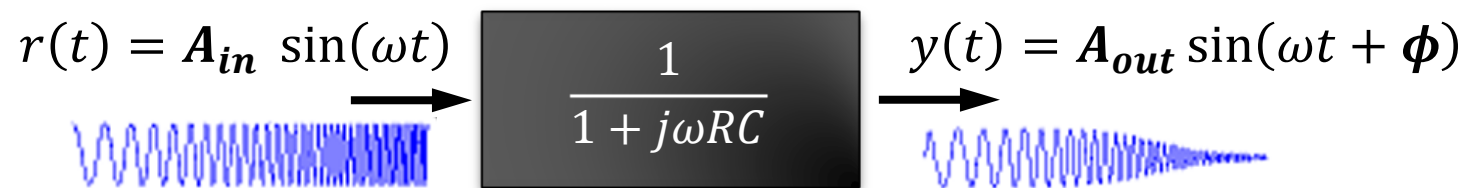
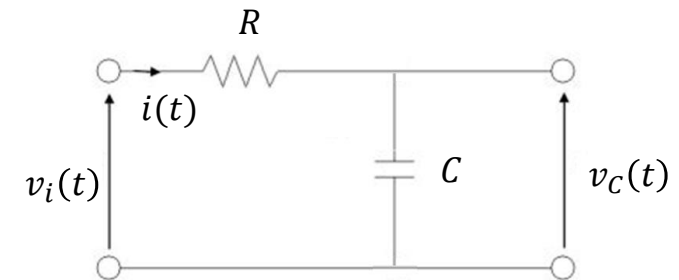


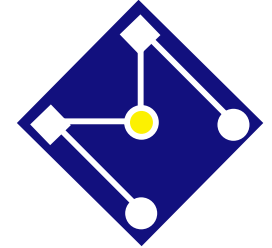


RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DE UM SISTEMA DE PRIMEIRA ORDEM

Função de transferência,

$$G(j\omega) = \frac{V_C(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$





RESPOSTA VS ESTÍMULO SENOIDAL

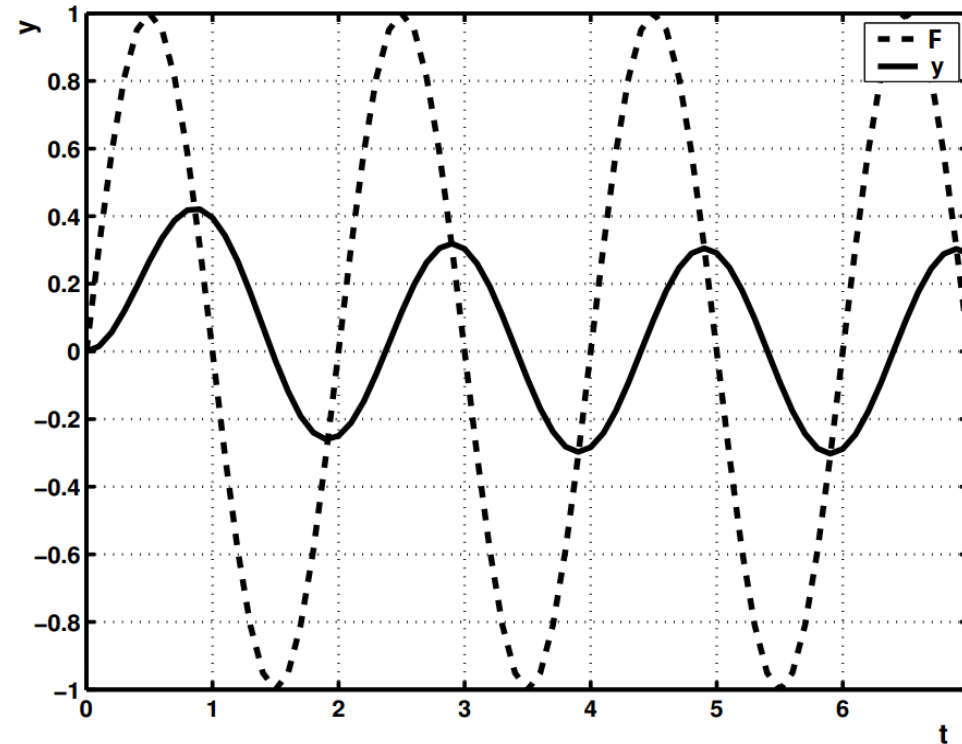
- Razão de amplitude, $M_P(\omega)$

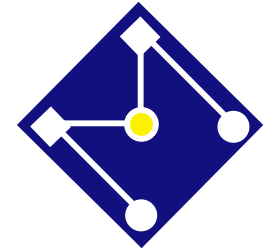
$$M_P(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

- Ângulo de fase,

$$\phi(\omega) = -\tan^{-1} \omega\tau$$

a resposta é também uma onda senoidal com frequência ω igual à onda senoidal do sinal de entrada





EXEMPLOS

Analisar a relação entre entrada e saída do SLIT de primeira ordem definido anteriormente para as seguintes funções:

$$v_i(t) = 3 \sin 30t$$

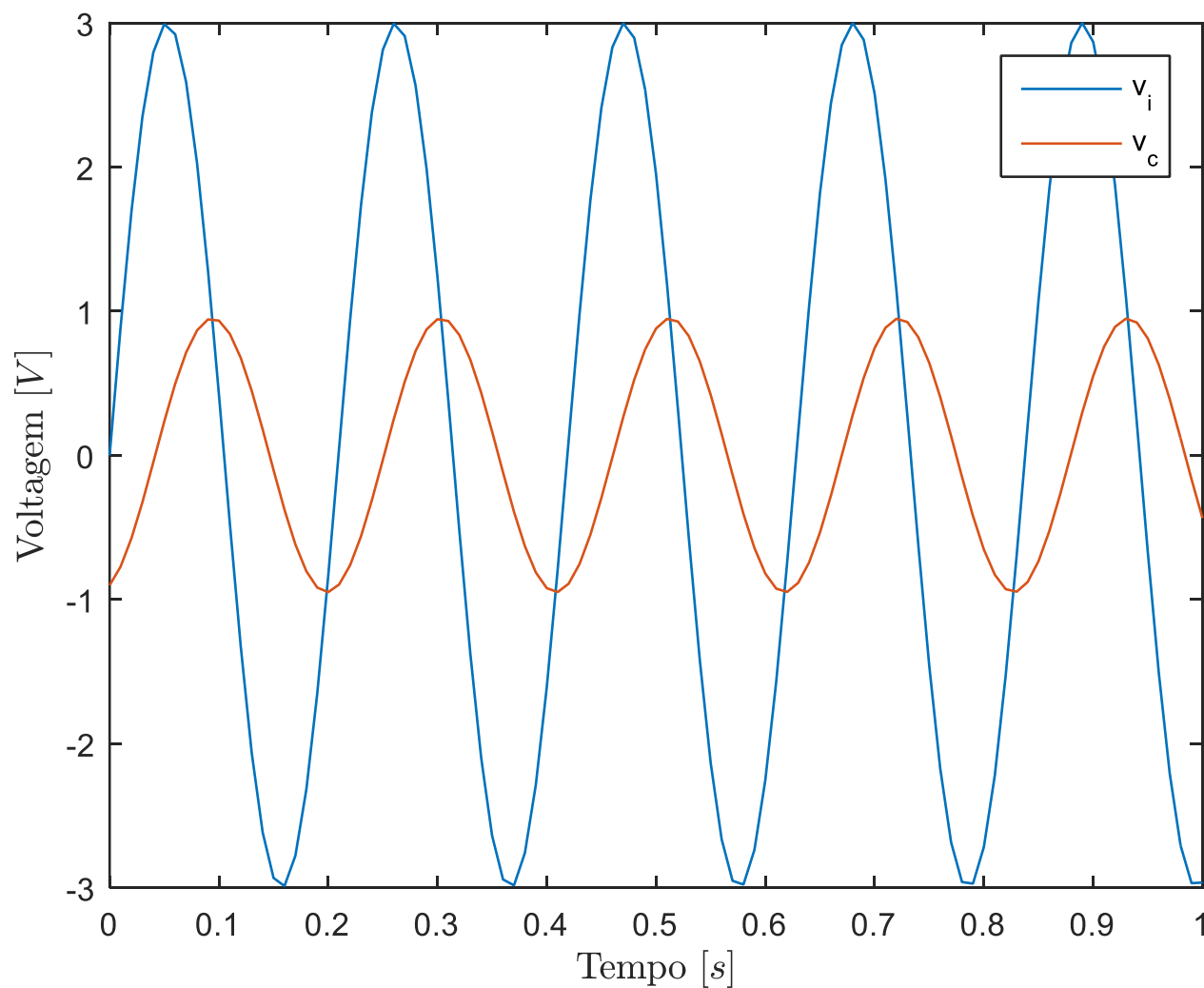
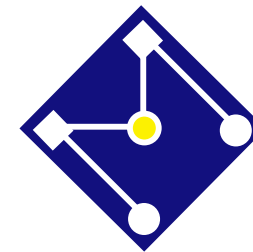
$$v_i(t) = 3 \sin(30t + 40^\circ)$$

$$v_i(t) = 3 \sin(10t + 40^\circ)$$

$$v_i(t) = 3 \cos(10t)$$

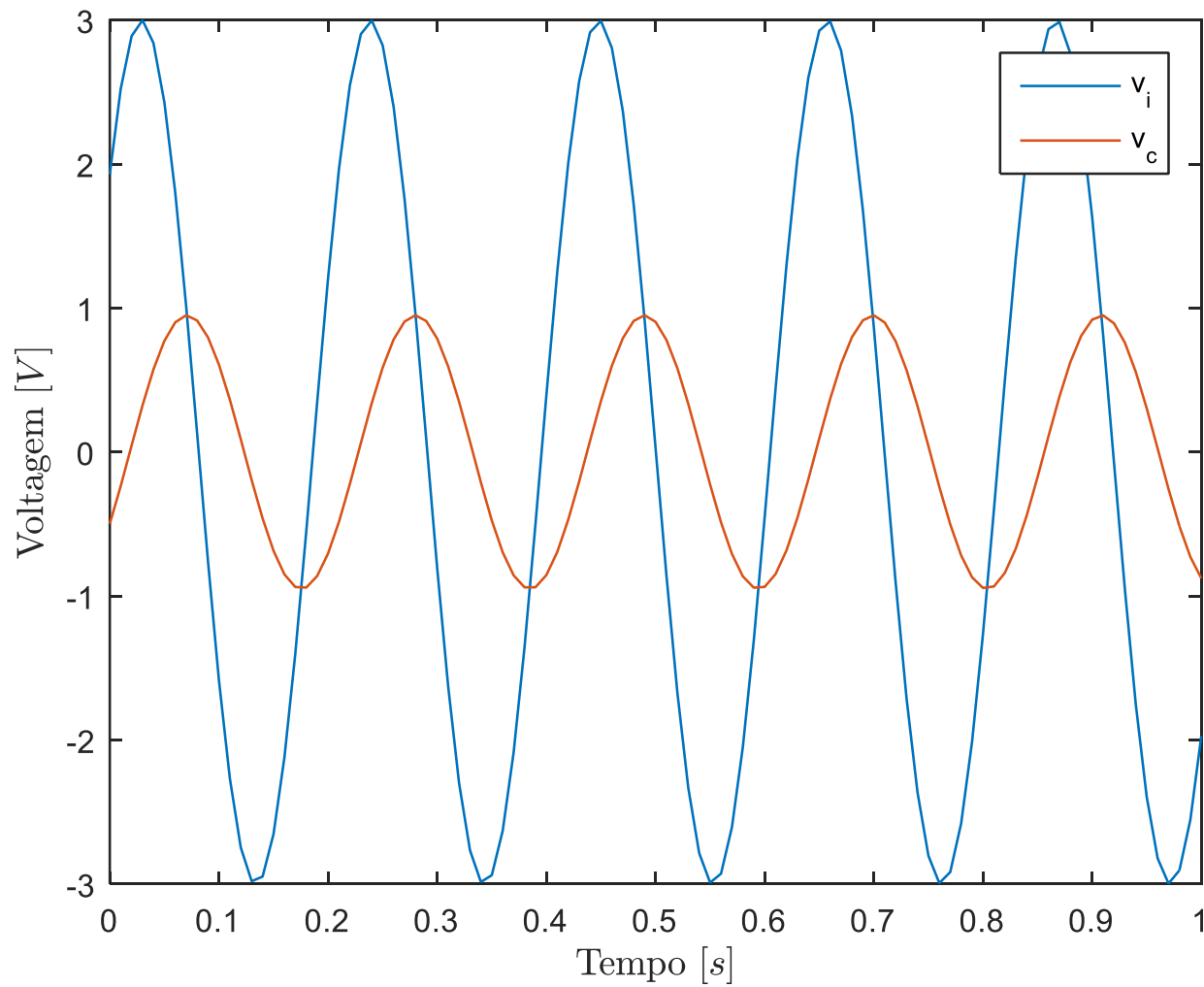
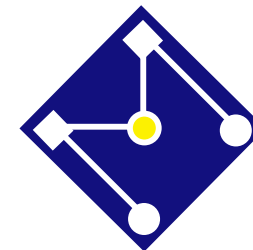
$$v_i(t) = \sin(70t)$$

Considere $R = 100\Omega$ e $C = 1mF$



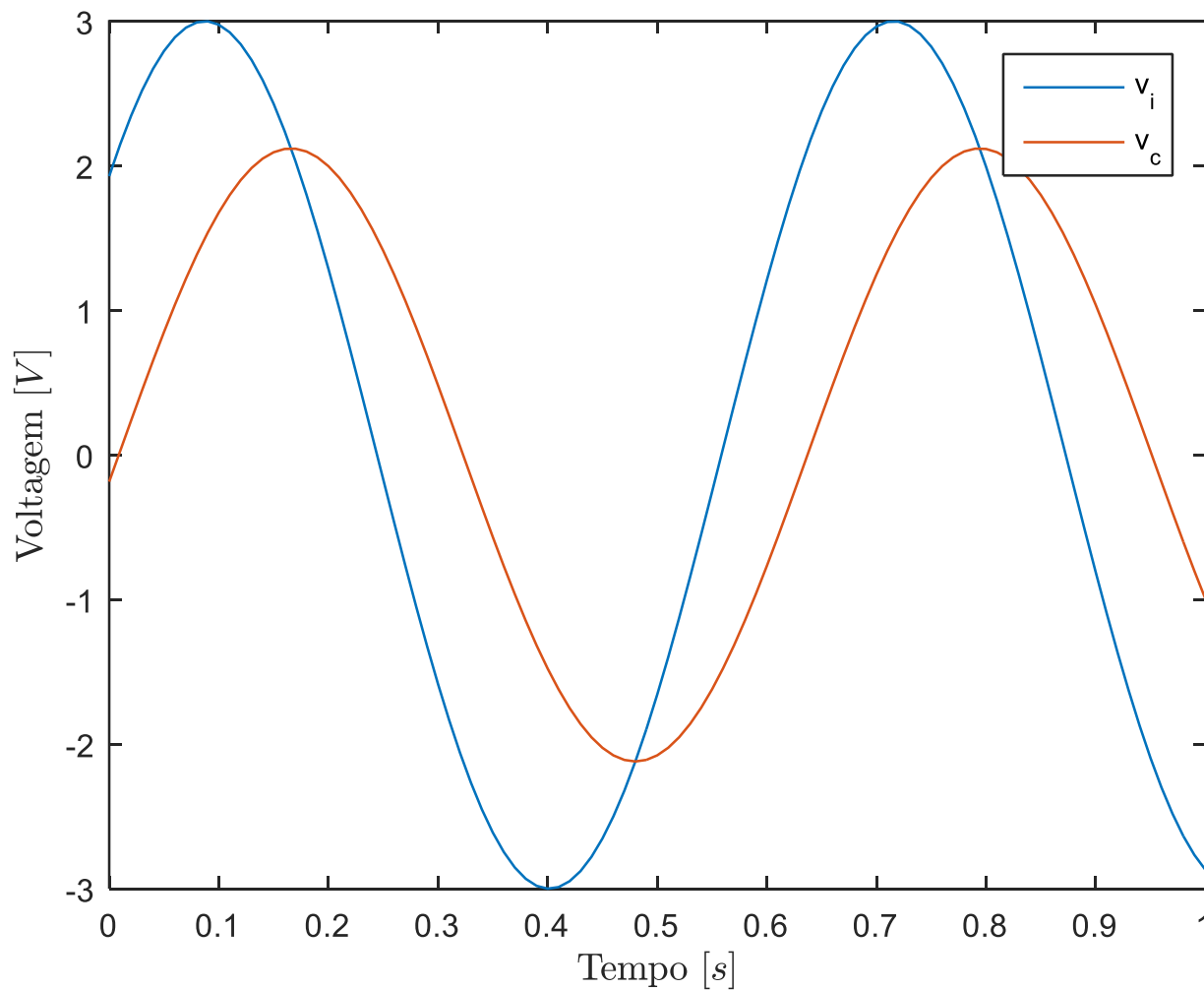
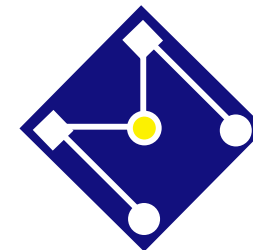
$$v_i(t) = 3 \sin 30t$$

$$v_c = 0.95 \sin(30t - 71,6^\circ)$$



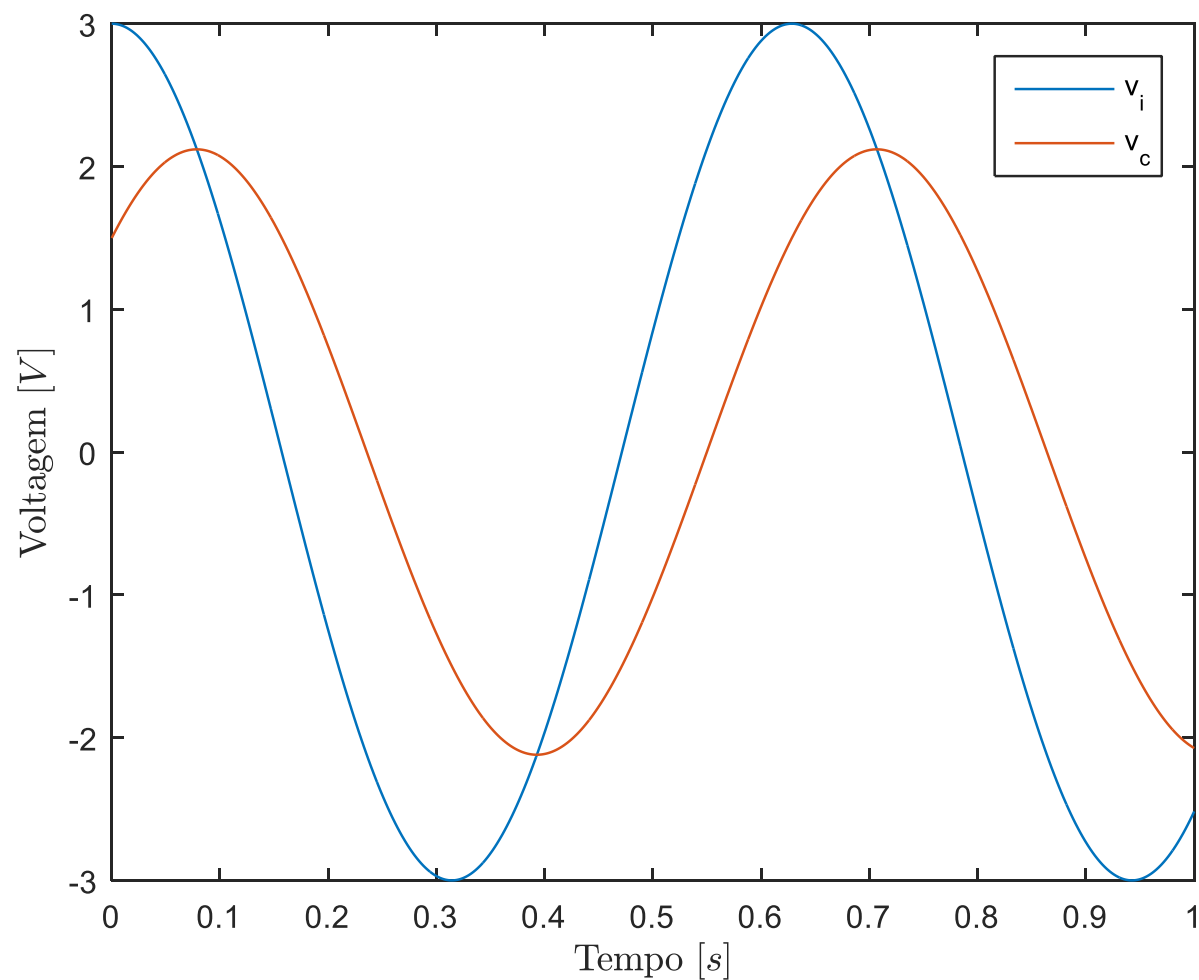
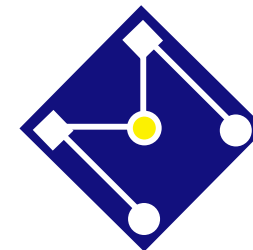
$$v_i(t) = 3 \sin(30t + 40^\circ)$$

$$v_c = 0.95 \sin(30t - 31,6^\circ)$$



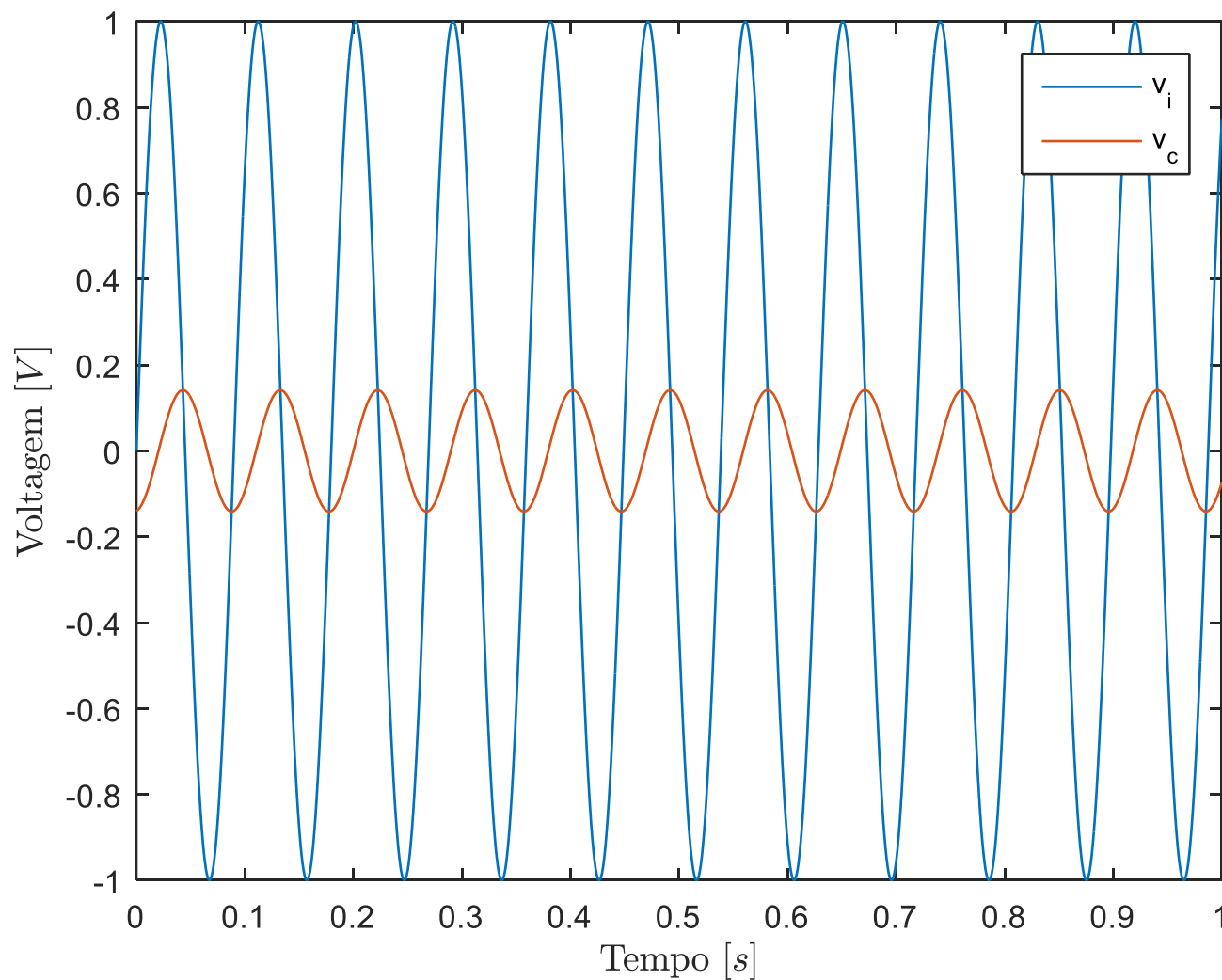
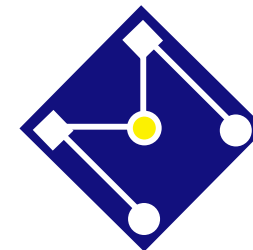
$$v_i(t) = 3 \sin(10t + 40^\circ)$$

$$v_c = 2.12 \sin(10t - 5^\circ)$$



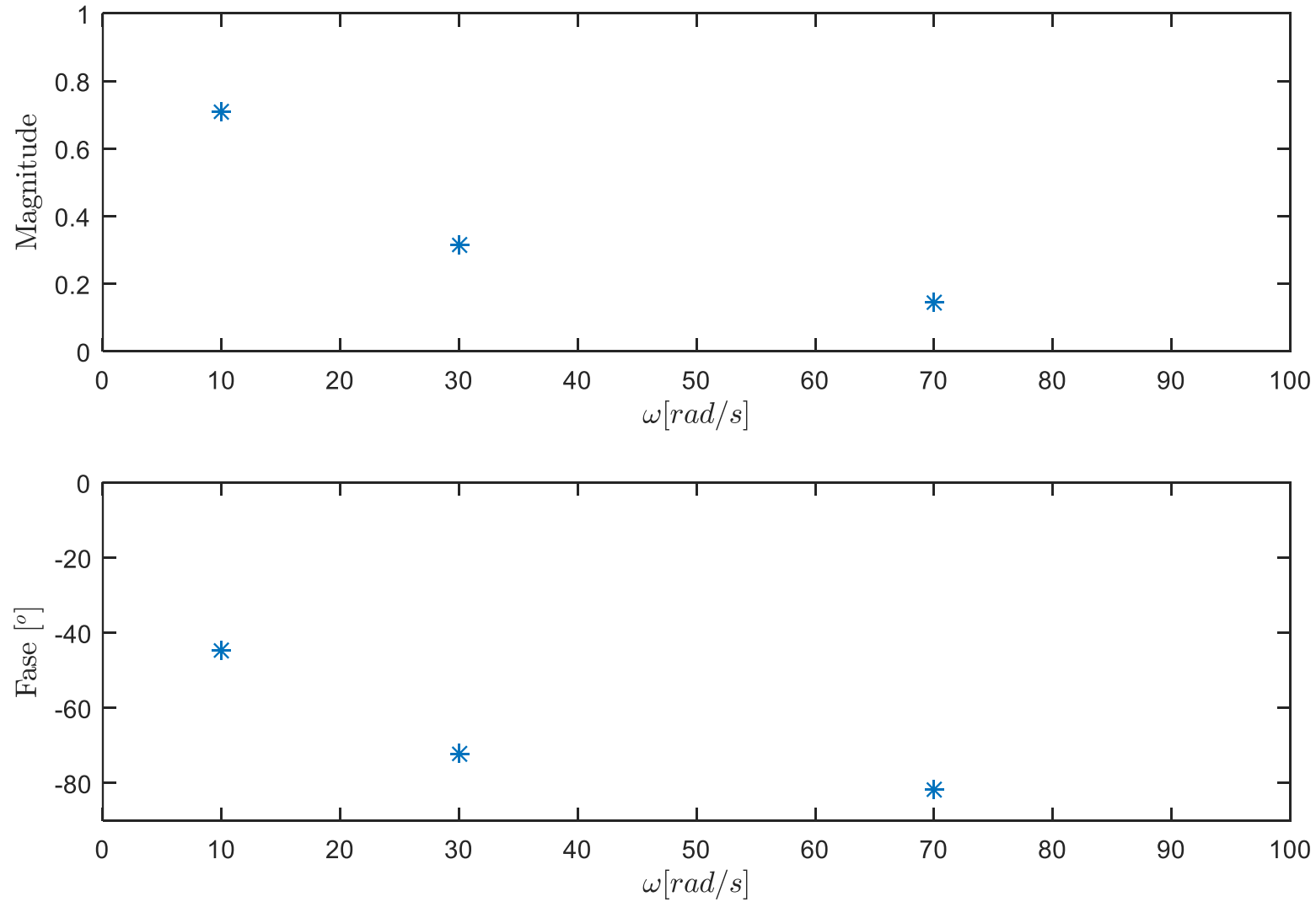
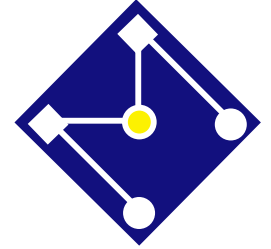
$$v_i(t) = 3 \cos(10t)$$

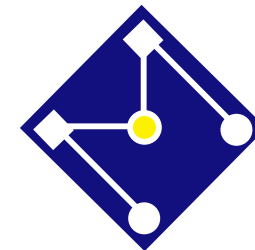
$$v_c = 2.12 \sin(10t - 45^\circ)$$



$$v_i(t) = \sin(70t)$$

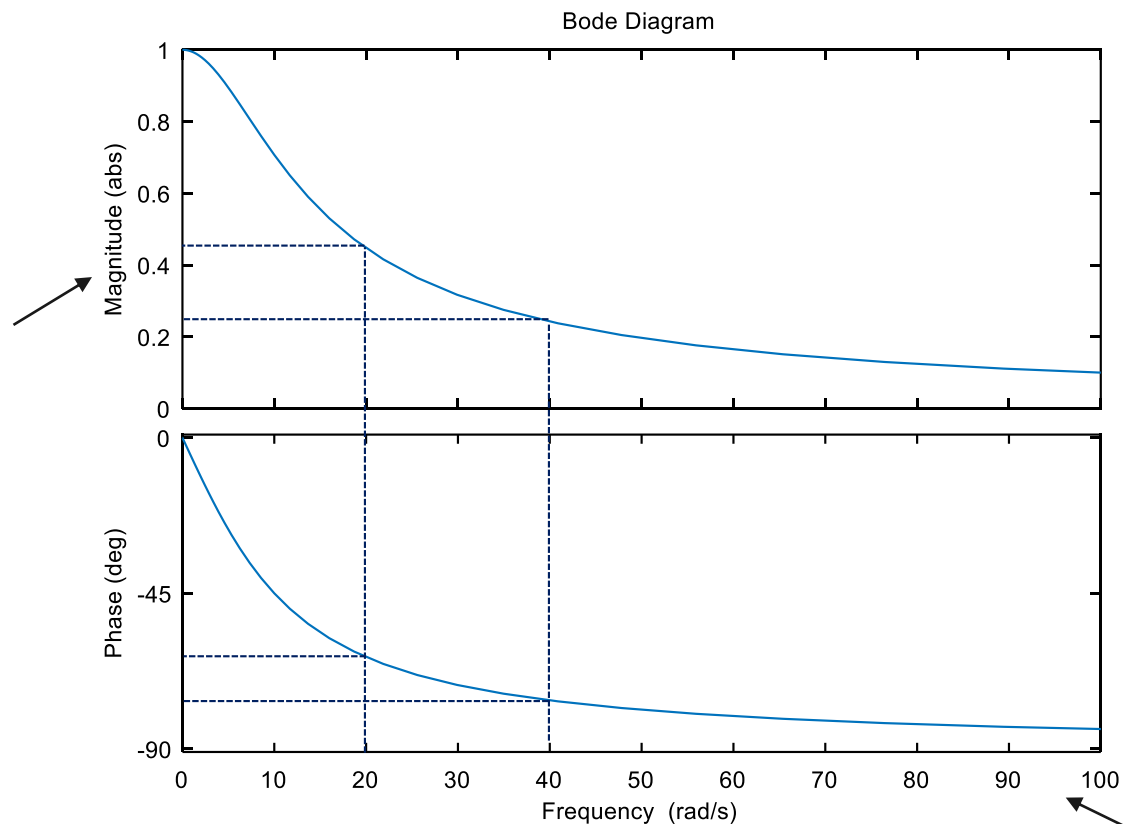
$$v_c = 0.1414 \sin(70t - 81,9^\circ)$$



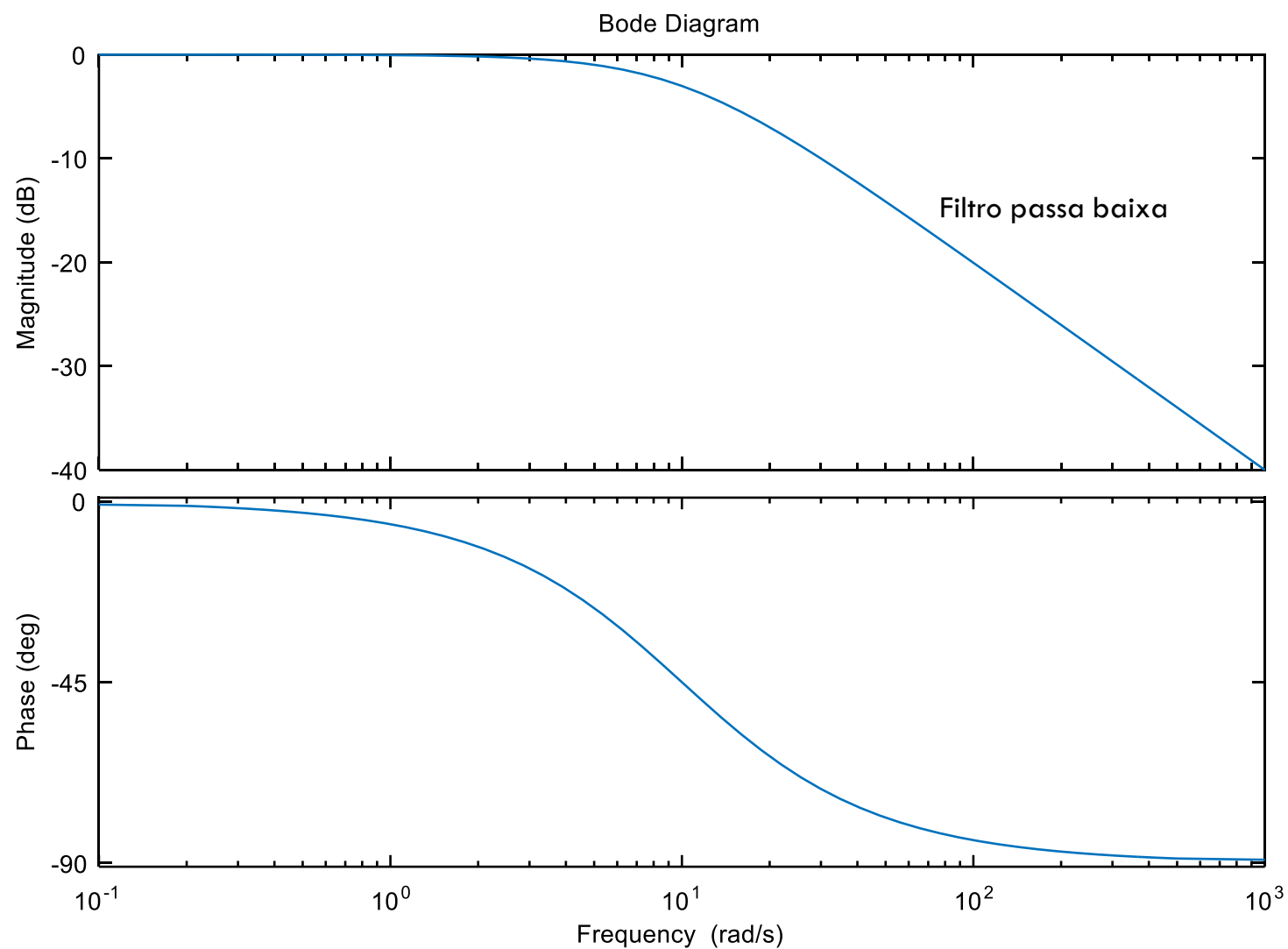
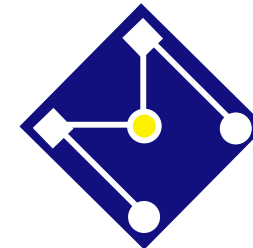


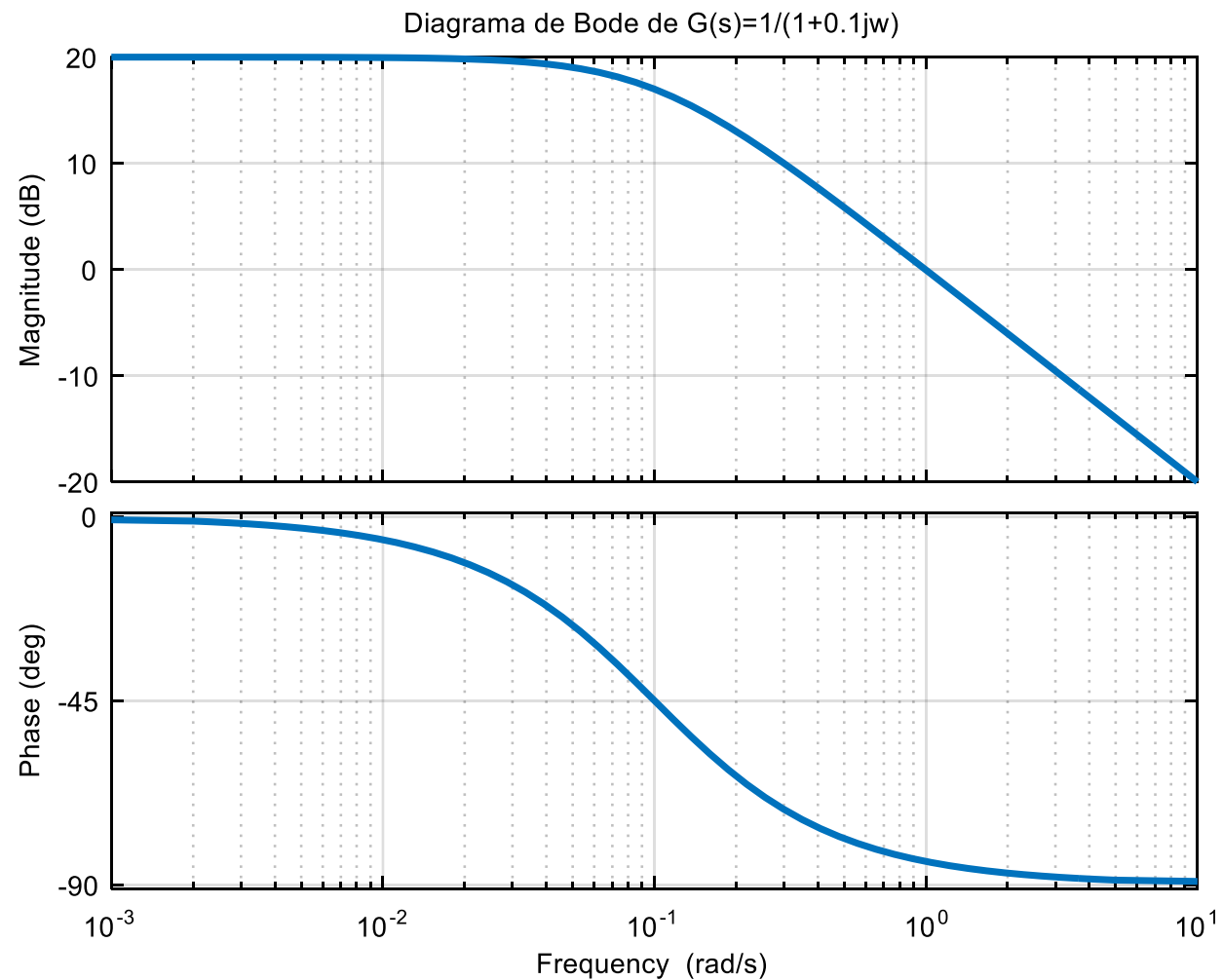
BODE

Em dB, mas
aprenderemos
mais tarde

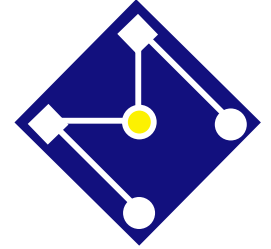


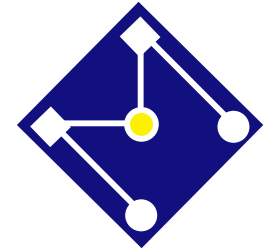
Escala Log, mas
aprenderemos
mais tarde



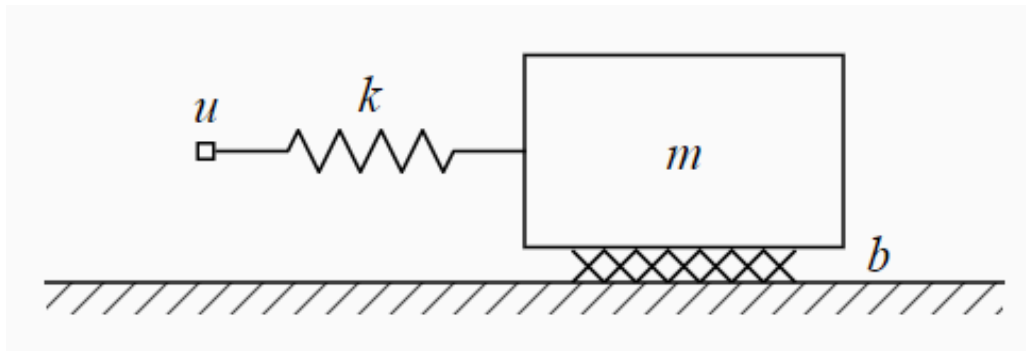


```
opts = bodeoptions;  
opts.PhaseMatching='on'  
opts.Grid='on'  
num=[1]  
den=[1 0.1]  
bode(num,den,opts)  
title('Diagrama de Bode de  $G(s)=1/(1+0.1j\omega)$ ')
```





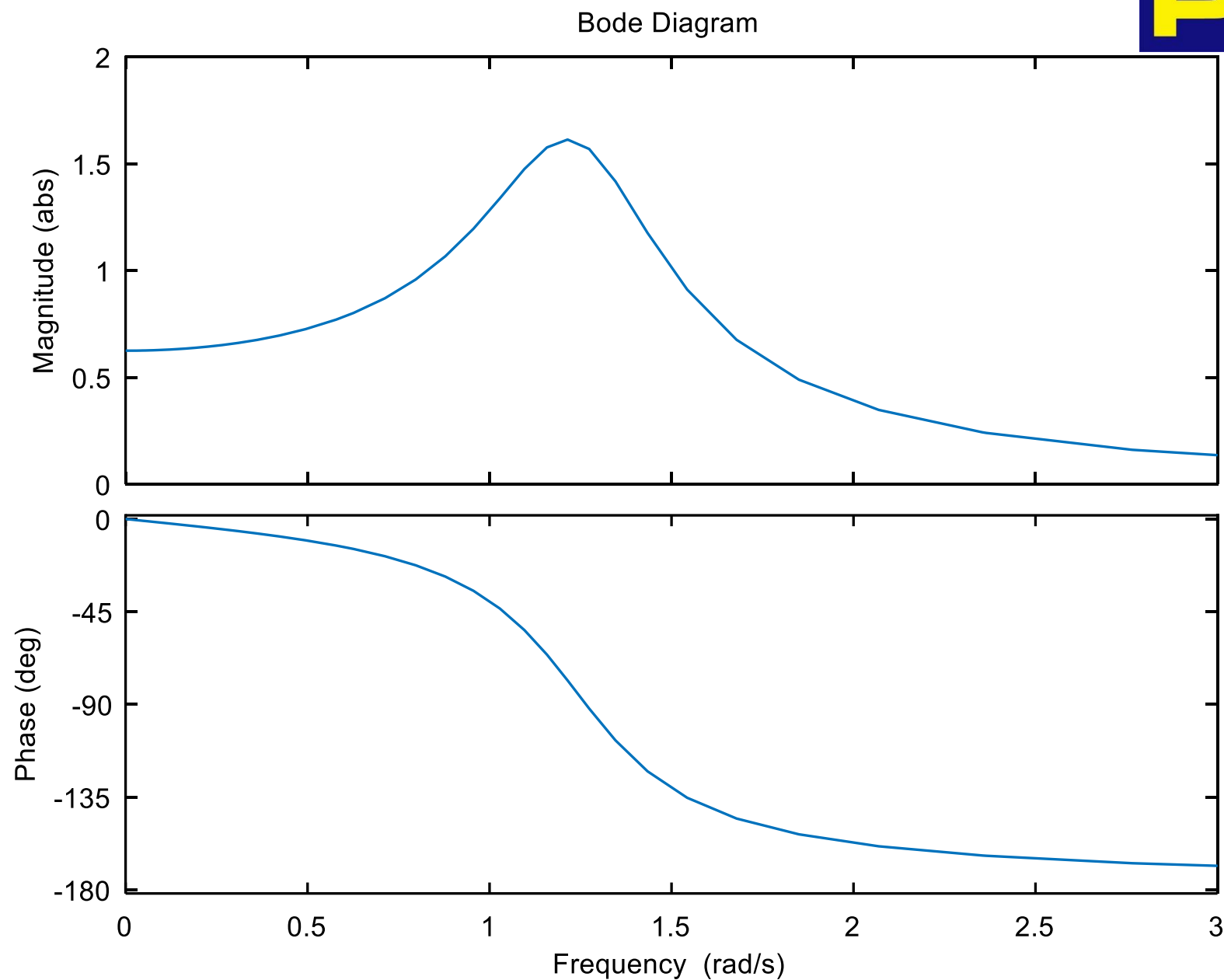
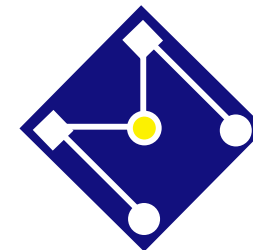
E UM SISTEMA DE SEGUNDA ORDEM?

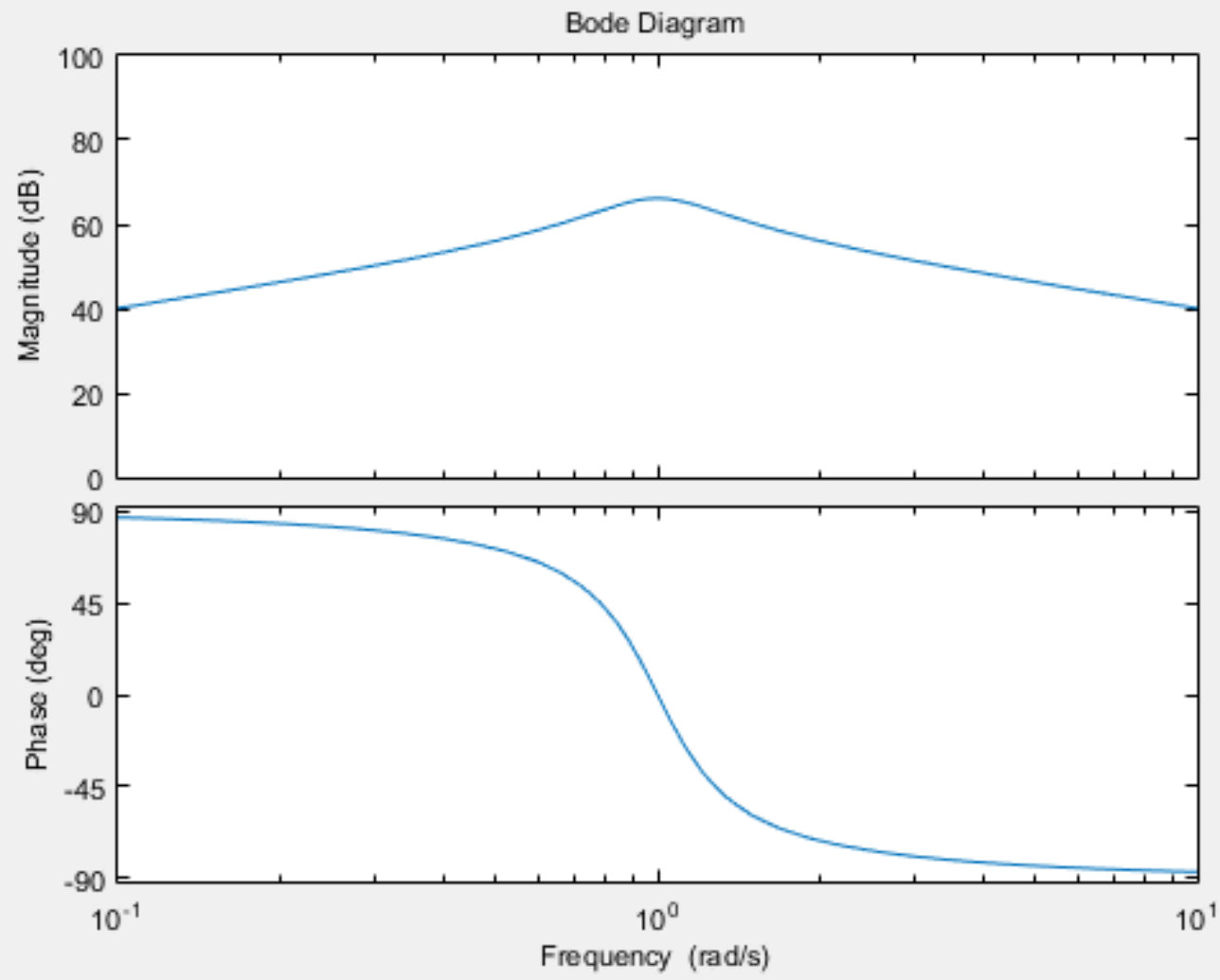
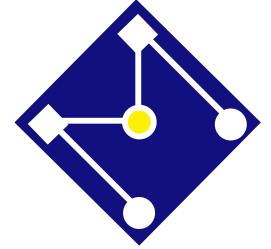


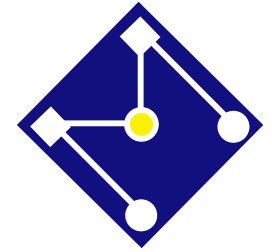
$$\begin{aligned} m &= 1 \text{ kg} \\ b &= 0.5 \text{ Ns/m} \\ k &= 1.6 \text{ N/m} \end{aligned}$$

$$\frac{k}{m} = \omega_n^2 = \frac{1.6}{1} = 1.6 \quad \frac{b}{m} = 2\zeta\omega_n = \frac{0.5}{1} = 0.5 \quad \frac{1}{k} = K = \frac{1}{1.6} = 0.625$$

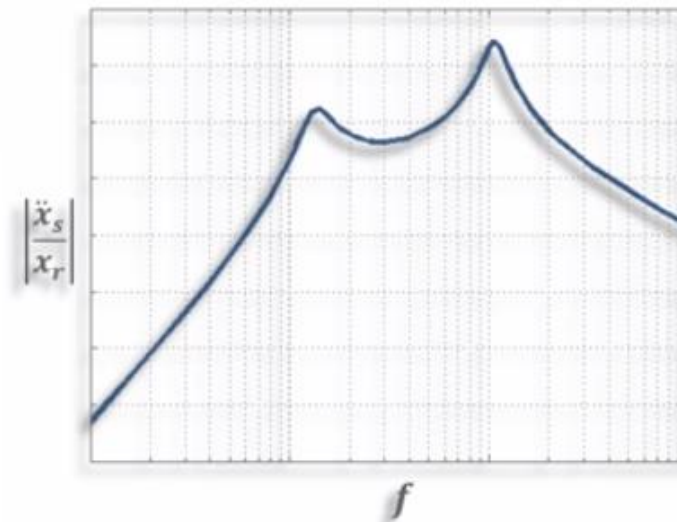
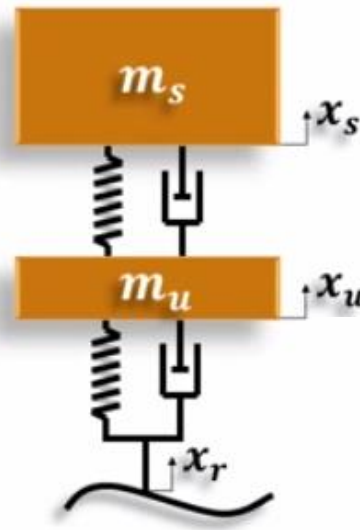
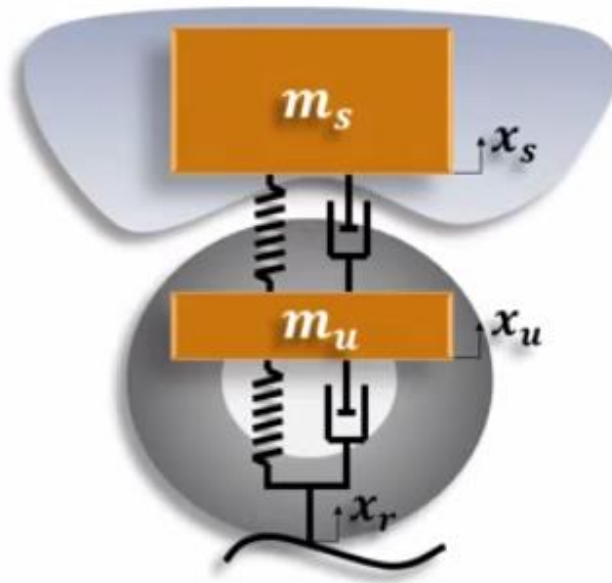
$$\frac{K\omega_n^2}{-\omega^2 + 2\zeta\omega_n j\omega + \omega_n^2} = \frac{1}{-\omega^2 + 0.5 j\omega + 1.6} = \frac{K}{1 - r^2 + j2\zeta r} \quad r = \frac{\omega}{\omega_n}$$







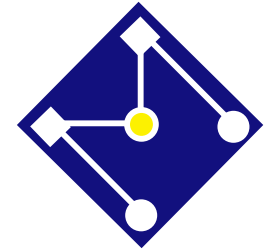
COMPORTAMENTO TÍPICO DA SUSPENSÃO DE CARRO



<https://www.mathworks.com/videos/understanding-bode-plots-why-use-them-1-of-4-76194.html>

DIAGRAMA DE BODE

O que o diagrama
representa????



BODE PLOTS

- Os diagramas de **Bode** (de módulo e fase) são uma forma de caracterizar sinais no domínio da frequência.

- Diagrama de Bode de **Módulo**

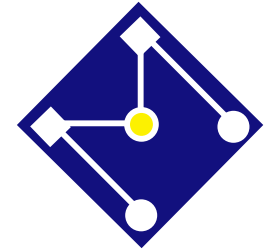
$|G(j\omega)|$ em dB $\times \omega$ (com escala logaritmica)

- Diagrama de Bode de **Fase**

$\angle G(j\omega)$ em graus $\times \omega$ (com escala logaritmica)



Eng. Americano Hendrik Wade Bode
(1905-1982)



MSC — TU — dB

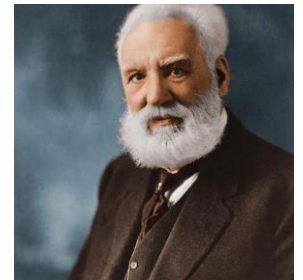
• *Miles of Standard Cable (MSC)*

1 MSC correspondia à perda de potência ao longo de 1 milha ($\approx 1,6km$) de cabo telefônico padrão, a uma frequência de $5000 rad/s$, menor atenuação média detectável para o ouvido humano.

• *Transmission Unit (TU)*

Em 1924, o *Bell Telephone Lab* recebeu uma resposta favorável à uma nova definição de unidade entre membros do Comitê Consultivo Internacional de Telefonia de Longa Distância na Europa e substituíram o MSC pela Unidade de Transmissão (TU).

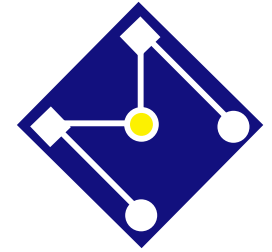
$$TU = 10 \log \left(\frac{P_0}{P_i} \right)$$



• *Decibel (dB)*

Em 1928, em homenagem ao pioneiro de telecomunicações Alexander Graham Bell, o *Bell Telephone Lab* renomeou a TU para decibel. Em termos de potência P , ou voltagem V , respectivamente,

$$\text{Ganho (dB)} = 10 \log \left(\frac{P_0}{P_i} \right) \qquad \text{Ganho (dB)} = 20 \log \left(\frac{V_0}{V_i} \right)$$



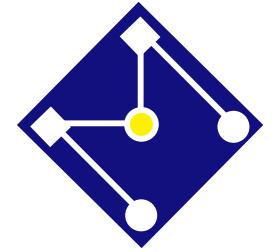
VALORES COMUNS...

- $20 \log_{10} 1 = 0 \text{ dB}$
- $20 \log_{10} \sqrt{2} = 10 \log_{10} 2 \cong 3 \text{ dB}$
- $20 \log_{10} 2 \cong 6 \text{ dB}$
- $20 \log_{10} 4 \cong 12 \text{ dB}$
- $20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{2}} \cong -3 \text{ dB}$ (half power = $10 \log_{10} \frac{1}{2}$)
- $20 \log_{10} 10 = 20 \text{ dB}$
- $20 \log_{10} 100 = 40 \text{ dB}$



20 dB para cada fator de 10

Um número maior que uma unidade apresenta um valor positivo em dB, enquanto um número menor que a unidade apresenta valor negativo.



LEMBRE-SE: POLOS E ZEROS DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

$$G(s) = \frac{q(s)}{p(s)}$$

Equação Característica:

O polinômio $p(s)$ é chamado de *polinômio característico* de $G(s)$, ou o *polinômio característico* do sistema. A equação

$$p(s) = 0$$

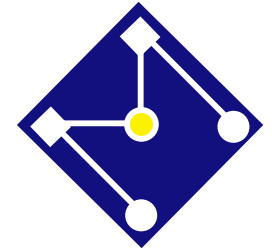
é chamada de a “*equação característica*” do sistema.

Pólos da função de transferência:

As raízes do *polinômio característico* são chamadas de *pólos* do sistema. Ou seja, os pólos são as soluções da *equação característica*.

Zeros da função de transferência:

As raízes do numerador de $G(s)$ são chamadas de *zeros* do sistema. Ou seja, os zeros são as soluções da equação $q(s) = 0$.



FATORES BÁSICOS PARA CONSTRUÇÃO DE UM DIAGRAMA DE BODE

em S

O ganho de Bode, K

Os fatores integrativos (polos na origem) $\left(\frac{1}{s}\right)^n$

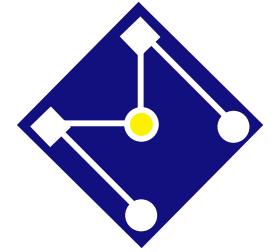
Os fatores derivativos (zeros na origem) s^n

Fatores de primeira ordem tipo *polos reais* $\left(\frac{1}{\tau s + 1}\right)^n$

Fatores de primeira ordem tipo *zeros reais* $(\tau s + 1)^n$

Fatores de segunda ordem ou quadráticos tipo *polos complexos* $\left(\frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}\right)^n$

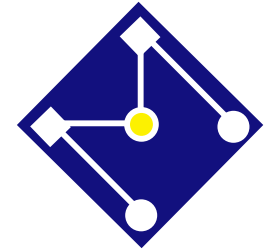
Fatores de segunda ordem ou quadráticos tipo *zeros complexos* $\left(1 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)^n$



EXEMPLO

Escreva a função de transferência abaixo inteiramente em termos de fatores básicos,

$$G(s) = \frac{2(s + 30)}{s(s + 2)(s^2 + 2s + 2)}$$



FATORES BÁSICOS PARA CONSTRUÇÃO DE UM DIAGRAM DE BODE

em $j\omega$ O ganho de Bode, K

Os fatores integrativos (polos na origem) $\left(\frac{1}{j\omega}\right)^n$

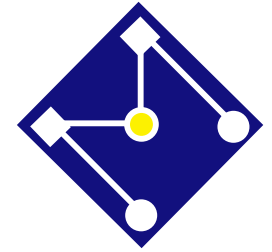
Os fatores derivativos (zeros na origem) $(j\omega)^n$

Fatores de primeira ordem tipo *polos reais* $\left(\frac{1}{j\omega\tau+1}\right)^n$

Fatores de primeira ordem tipo *zeros reais* $(\tau s + 1)^n$

Fatores de segunda ordem ou quadráticos tipo *polos complexos* $\left(\frac{1}{1+2\zeta\frac{j\omega}{\omega_n}+\frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2}}\right)^n$

Fatores de segunda ordem ou quadráticos tipo *zeros complexos* $\left(1 + 2\zeta\frac{j\omega}{\omega_n} + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2}\right)^n$



FATORES BÁSICOS

$$G(s) = \frac{K(\tau_2 s + 1) \left(1 + \frac{2\zeta_2}{\omega_{n_2}} s + \frac{s^2}{\omega_{n_2}^2} \right)}{s(\tau_1 s + 1) \left(1 + \frac{2\zeta_1}{\omega_{n_1}} s + \frac{s^2}{\omega_{n_1}^2} \right)}$$

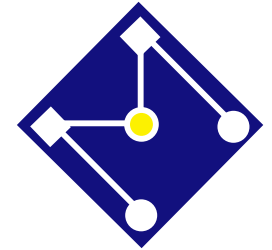


Função de transferência

$$G(j\omega) = \frac{K(\tau_2 j\omega + 1) \left(1 + \frac{2\zeta_2}{\omega_{n_2}} j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_{n_2}^2} \right)}{(j\omega)(\tau_1 j\omega + 1) \left(1 + \frac{2\zeta_1}{\omega_{n_1}} j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_{n_1}^2} \right)}$$



Função resposta em frequência



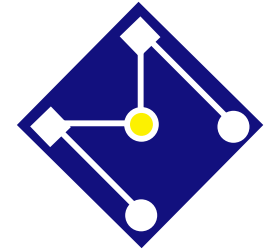
AMPLITUDE E FASE

$$|G(j\omega)| = \frac{|K| |\tau_2 j\omega + 1| \left| 1 + \frac{2\zeta_2}{\omega_{n_2}} j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_{n_2}^2} \right|}{|j\omega| |\tau_1 j\omega + 1| \left| 1 + \frac{2\zeta_1}{\omega_{n_1}} j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_{n_1}^2} \right|}$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log |G(j\omega)|$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = |K|_{dB} + |\tau_2 j\omega + 1|_{dB} + \left| 1 + \frac{2\zeta_2}{\omega_{n_2}} j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_{n_2}^2} \right|_{dB} - |j\omega|_{dB} - |\tau_1 j\omega + 1|_{dB} - \left| 1 + \frac{2\zeta_1}{\omega_{n_1}} j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_{n_1}^2} \right|_{dB}$$

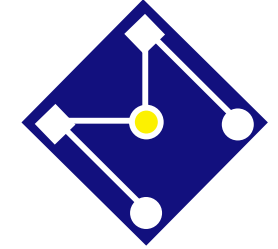
$$\arg G(j\omega) = \arg K + \arg(\tau_2 j\omega + 1) + \arg \left(1 + \frac{2\zeta_2}{\omega_{n_2}} j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_{n_2}^2} \right) - \arg j\omega - \arg(\tau_1 j\omega + 1) - \arg \left(1 + \frac{2\zeta_1}{\omega_{n_1}} j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_{n_1}^2} \right)$$



IDEIA...

Uma vez familiarizados com os fatores básicos apresentados, é possível utilizá-los na construção dos diagramas de Bode das demais funções de transferência.

Portanto, agora vamos mostrar os diagramas de Bode (**módulo** e **fase**) para cada um dos fatores básicos vistos.



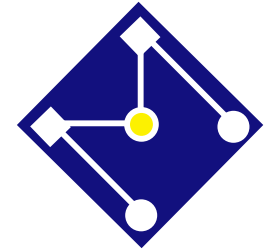
Vantagens em trabalhar com resposta em frequência usando diagramas de Bode

1. O projeto de compensadores dinâmicos pode ser completamente baseado em diagramas de Bode.
2. Diagramas de Bode podem ser determinados experimentalmente.
3. Diagramas de Bode de sistemas em série são simplesmente somados, o que é bastante conveniente.
4. O uso da escala log permite que uma faixa de frequência muito mais larga seja apresentada em um único diagrama, o que não seria possível usando a escala linear.

É importante que o engenheiro de controle de sistemas entenda as técnicas de traçado do diagrama de Bode por muitos motivos: este conhecimento permite ao engenheiro não apenas lidar com problemas simples, mas também executar uma verificação nos resultados computacionais para os casos mais complicados. Muitas vezes, aproximações podem ser usadas para esboçar rapidamente a resposta em frequência e deduzir a estabilidade, bem como para determinar a forma das compensações dinâmicas necessárias. Finalmente, uma compreensão do método de traçado é útil na interpretação de resposta em frequência de dados que foram gerados experimentalmente.

GANHO

K



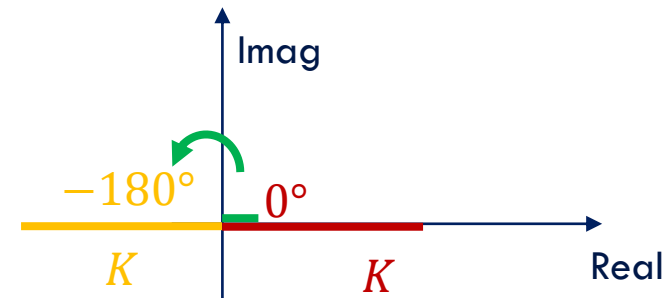
O GANHO K

Como $G(j\omega) = K$ é uma constante (não varia com ω),

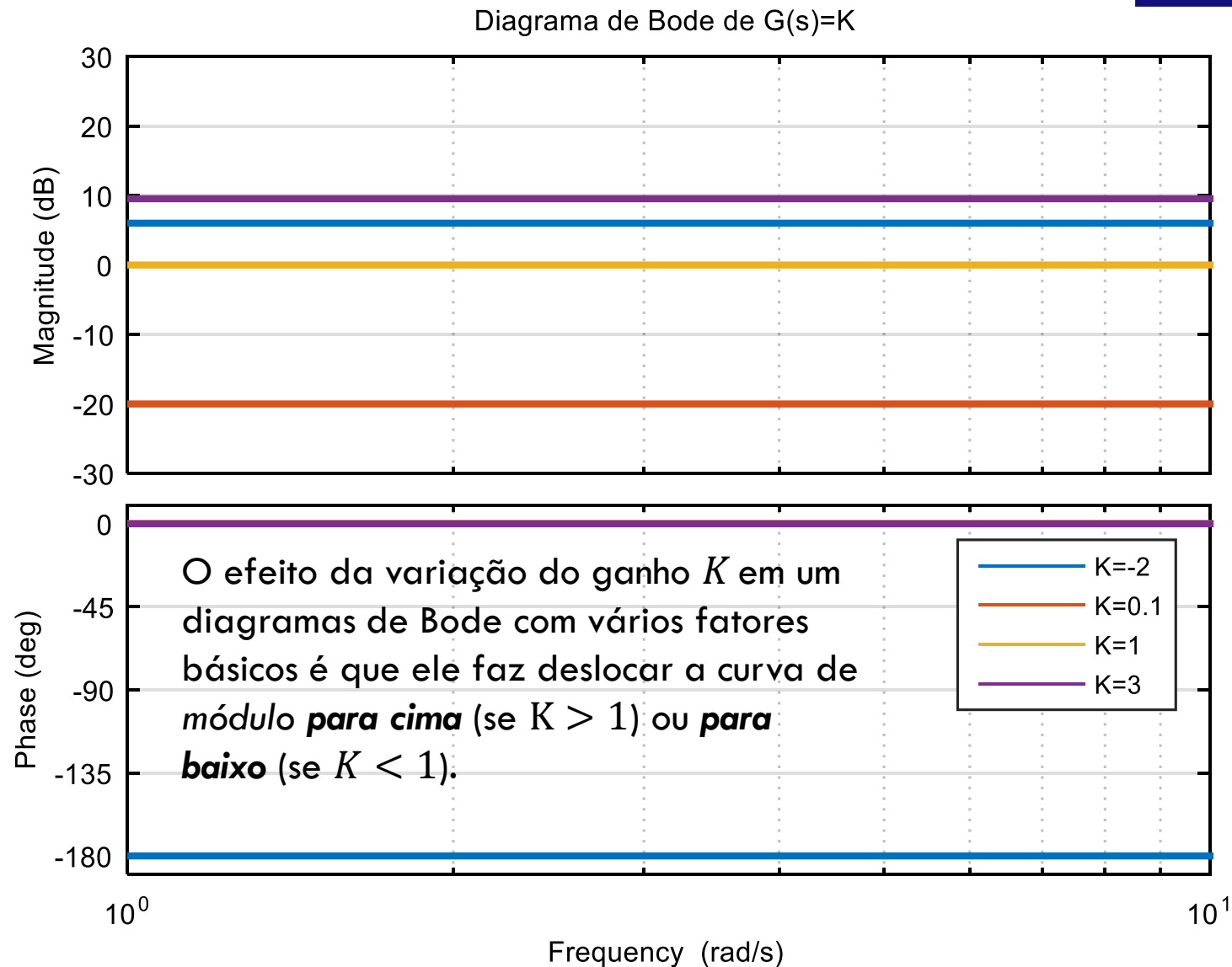
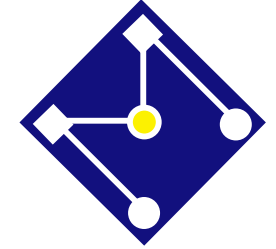
$$|K|_{dB} = 20 \log|K|$$

$$\angle K = 0^\circ \text{ para } K > 0$$

$$\angle K = -180^\circ \text{ para } K < 0$$

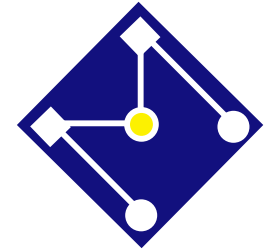


A curva de módulo em dB de um ganho constante K é uma reta de valor $20 \log|K|$ dB.



FATORES INTEGRAL E DERIVATIVO

$$(j\omega)^{\pm 1}$$



FATOR INTEGRAL

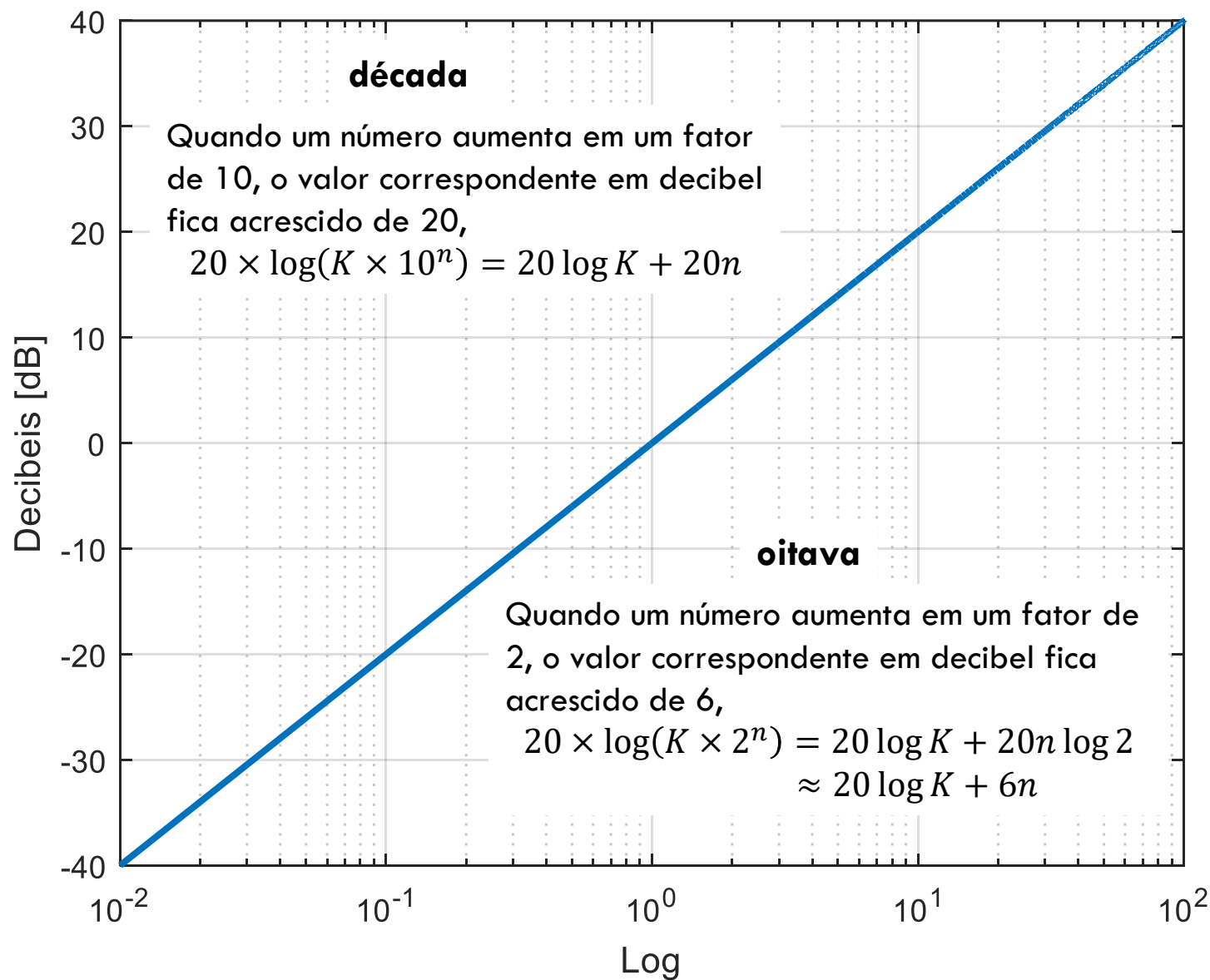
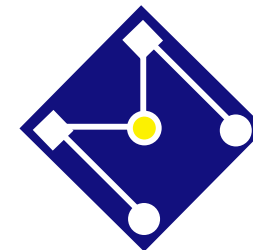
$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

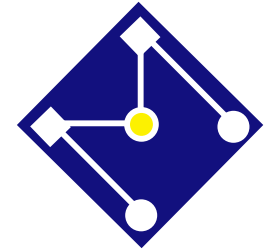
$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log \left| \frac{1}{j\omega} \right| = -20 \log \omega \text{ dB}$$

$$\angle G(j\omega) = \angle \frac{1}{j\omega} = -\angle \frac{j}{\omega} = -90^\circ$$

No diagrama de Bode as relações entre as frequências são dadas em termos de oitavas ou décadas:

- Uma oitava é um intervalo compreendido entre ω e 2ω .
- Uma década é um intervalo compreendido entre ω e 10ω .

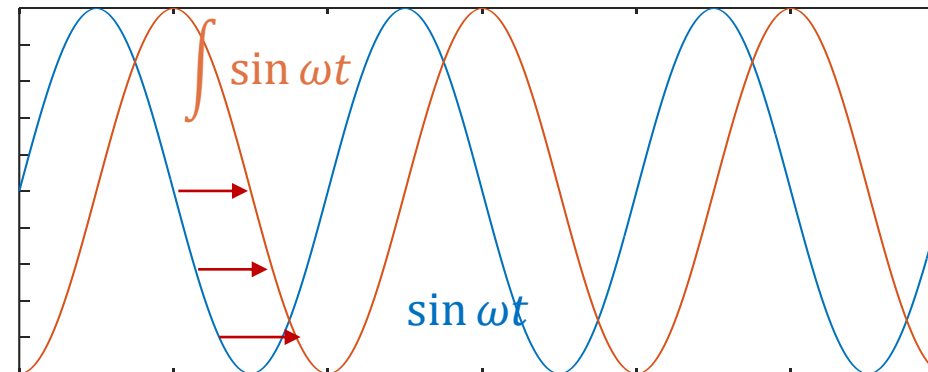
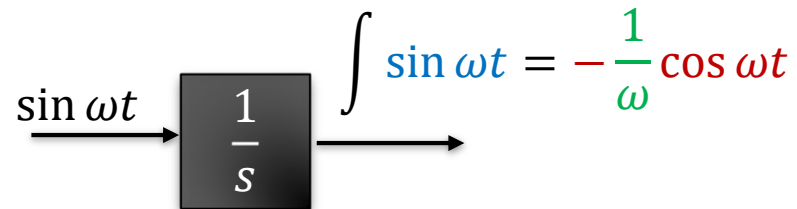




ESSA RESPOSTA É ESPERADA DE UM SISTEMA INTEGRAL...

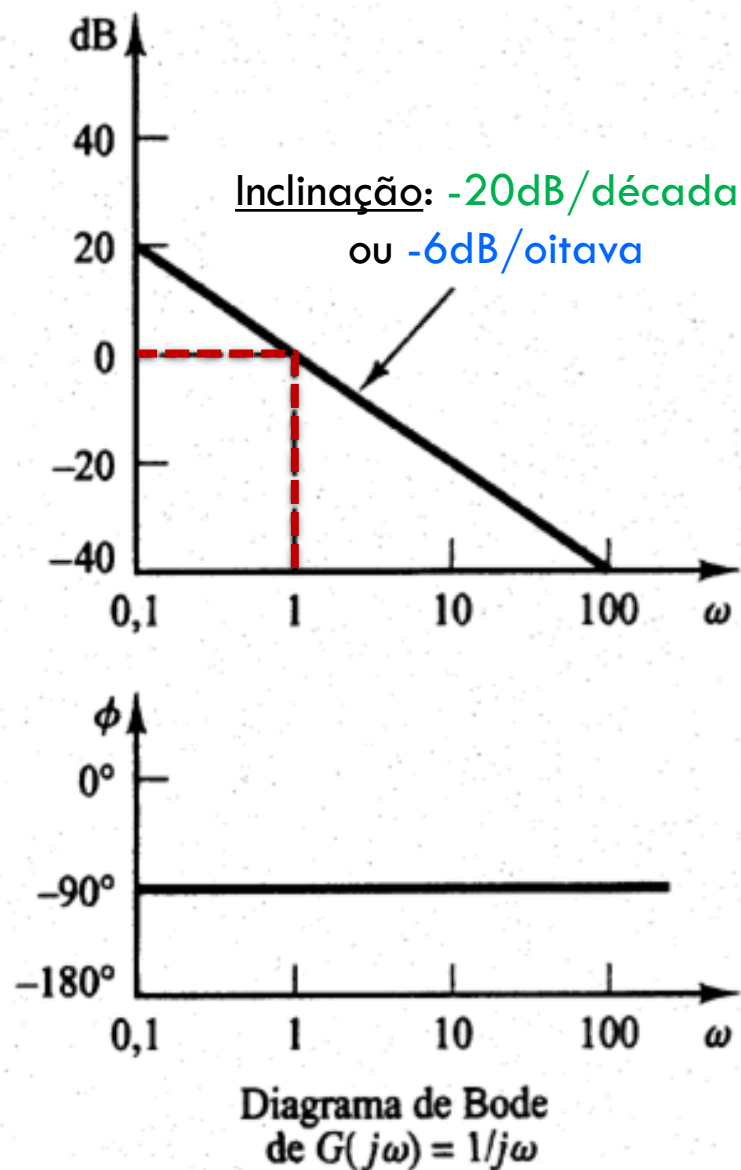
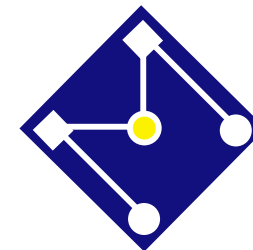
$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log \left| \frac{1}{j\omega} \right| = 20 \log \frac{1}{\omega} \text{ dB}$$

$$\angle G(j\omega) = \angle \frac{1}{j\omega} = -\angle \frac{j}{\omega} = -90^\circ$$



90°

$\omega = 1$



(Ogata)

$$G(j\omega) = -20 \log \omega \text{ dB}$$

$$|G(j\omega)| = 0 \text{ em } \omega = 1$$

$$\text{para } \omega = 0,01 \quad G(j\omega) = 40 \text{ dB}$$

$$\text{para } \omega = 0,10 \quad G(j\omega) = 20 \text{ dB}$$

$$\text{para } \omega = 1,00 \quad G(j\omega) = 0 \text{ dB}$$

$$\text{para } \omega = 10,0 \quad G(j\omega) = -20 \text{ dB}$$

$$\text{para } \omega = 100 \quad G(j\omega) = -40 \text{ dB}$$

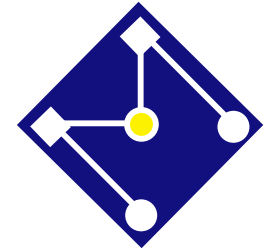
$$\text{para } \omega = 0,5 \quad G(j\omega) = 6,0206 \cong 6 \text{ dB}$$

$$\text{para } \omega = 1,0 \quad G(j\omega) = 0 \text{ dB}$$

$$\text{para } \omega = 2,0 \quad G(j\omega) = -6,0206 \cong -6 \text{ dB}$$

$$\text{para } \omega = 4,0 \quad G(j\omega) = -12,0412 \cong -12 \text{ dB}$$

$$\text{para } \omega = 8,0 \quad G(j\omega) = -18,0618 \cong -18 \text{ dB}$$

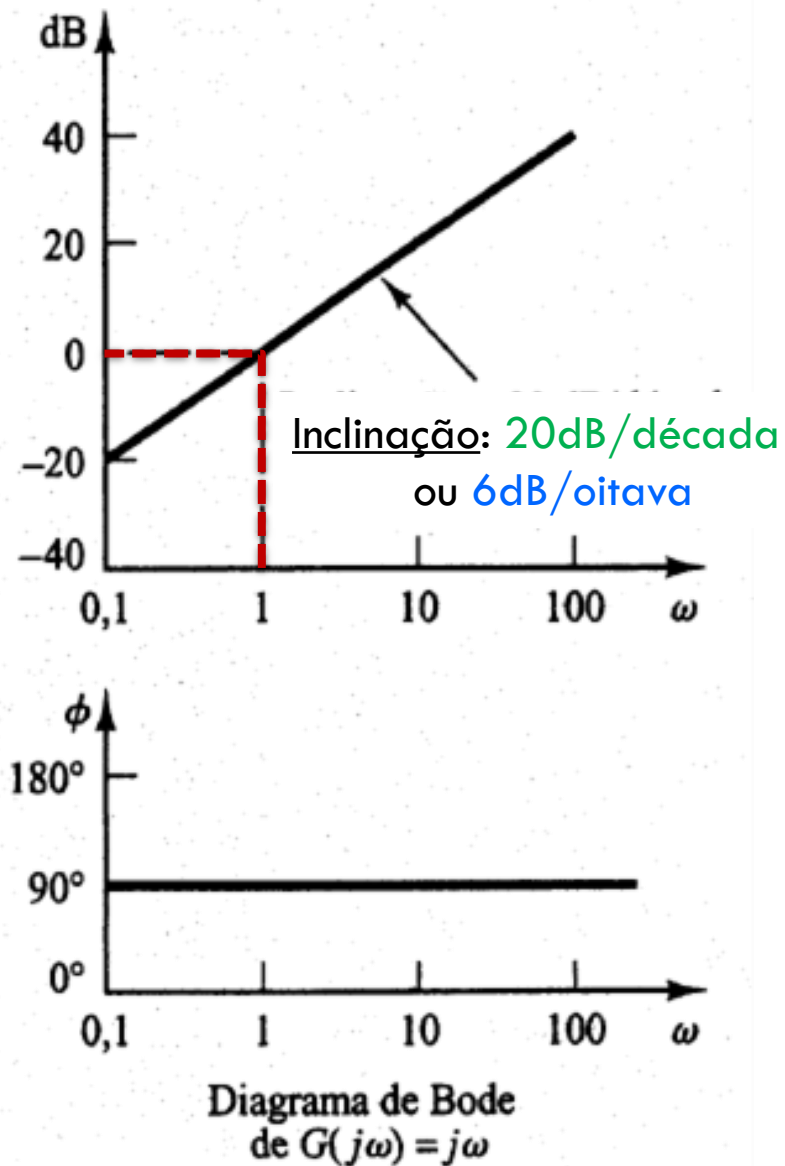
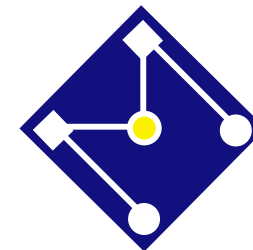


FATOR DERIVATIVO

$$G(j\omega) = j\omega$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log |j\omega| = 20 \log \omega \text{ dB}$$

$$\angle G(j\omega) = \angle j\omega = 90^\circ$$



$$G(j\omega) = 20 \log \omega \text{ dB}$$

$$|G(j\omega)| = 0 \text{ em } \omega = 1$$

$$\text{para } \omega = 0,10 \quad G(j\omega) = -20 \text{ dB}$$

$$\text{para } \omega = 1,00 \quad G(j\omega) = 0 \text{ dB}$$

$$\text{para } \omega = 10,0 \quad G(j\omega) = 20 \text{ dB}$$

$$\text{para } \omega = 100 \quad G(j\omega) = 40 \text{ dB}$$

$$\text{para } \omega = 0,5 \quad G(j\omega) = -6,0206 \cong -6 \text{ dB}$$

$$\text{para } \omega = 1,0 \quad G(j\omega) = 0 \text{ dB}$$

$$\text{para } \omega = 2,0 \quad G(j\omega) = 6,0206 \cong 6 \text{ dB}$$

$$\text{para } \omega = 4,0 \quad G(j\omega) = 12,0412 \cong 12 \text{ dB}$$

$$\text{para } \omega = 8,0 \quad G(j\omega) = 18,0618 \cong 18 \text{ dB}$$

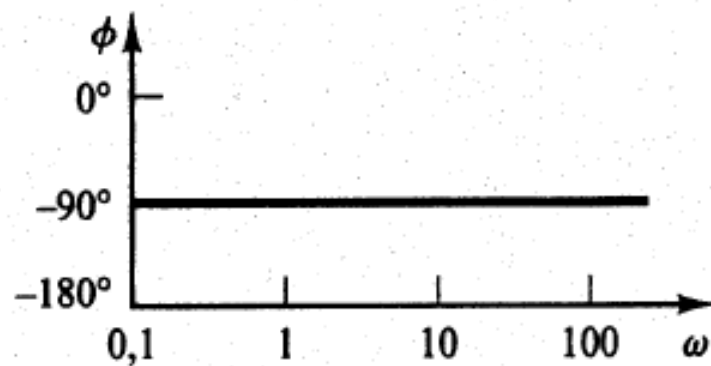
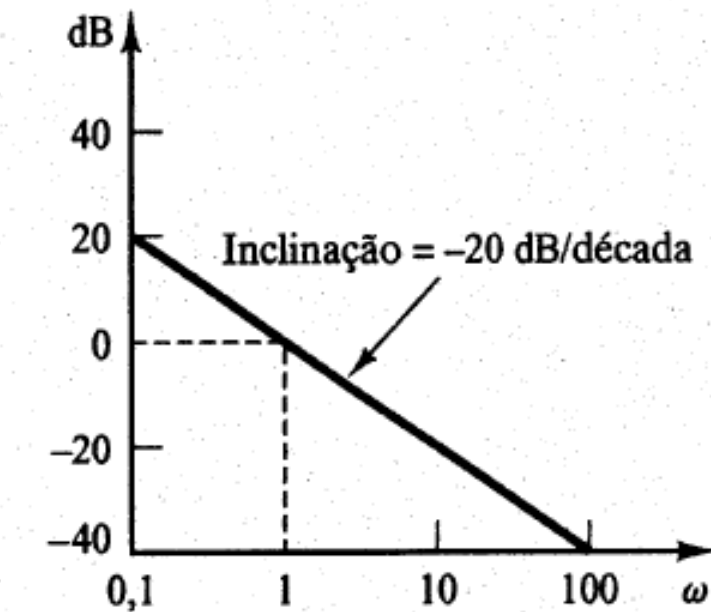
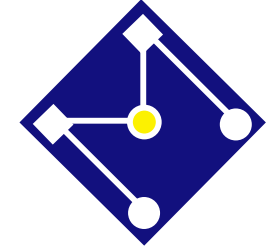


Diagrama de Bode
de $G(j\omega) = 1/j\omega$

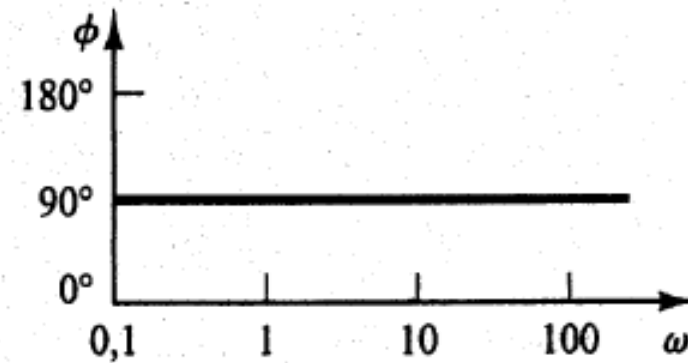
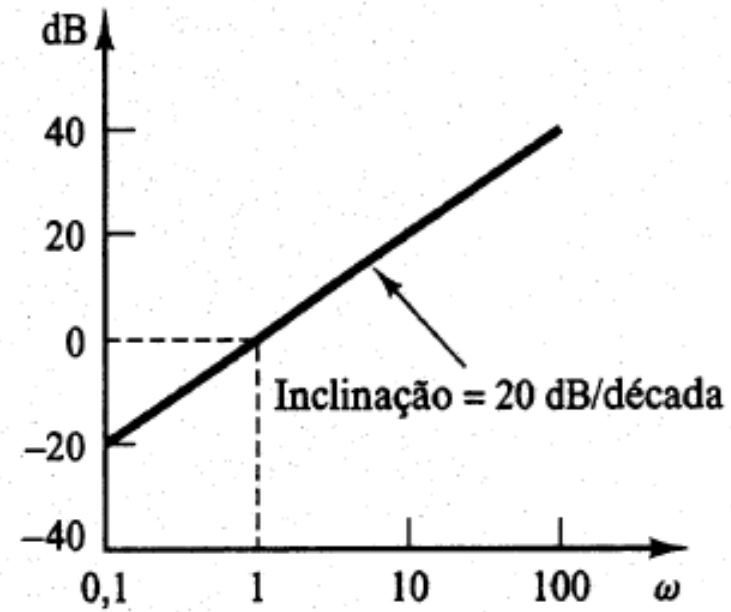
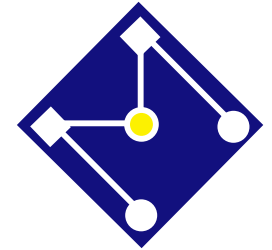


Diagrama de Bode
de $G(j\omega) = j\omega$



FATORES INTEGRAL E DERIVATIVO $(j\omega)^{\pm n}$

Se a função de transferência possuir o fator $(1/j\omega)^n$ ou $(j\omega)^n$, as grandezas logarítmicas se tornarão respectivamente:

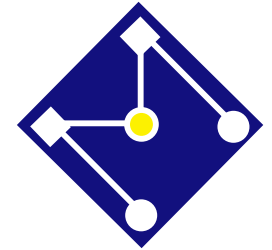
$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log \left| \left(\frac{1}{j\omega} \right)^n \right| = n \log \left| \frac{1}{j\omega} \right| = -20n \log \omega \quad dB$$

ou

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log |(j\omega)^n| = n \log |j\omega| = 20n \log \omega \quad dB$$

As inclinações passam a ser respectivamente $-20n$ dB/década ou $20n$ dB/década

O ângulo de fase de $(1/j\omega)^n$ é igual a $-90n$ em toda a faixa de frequência, enquanto que o de $(j\omega)^n$ é igual a $90n$ em toda a faixa de frequência.

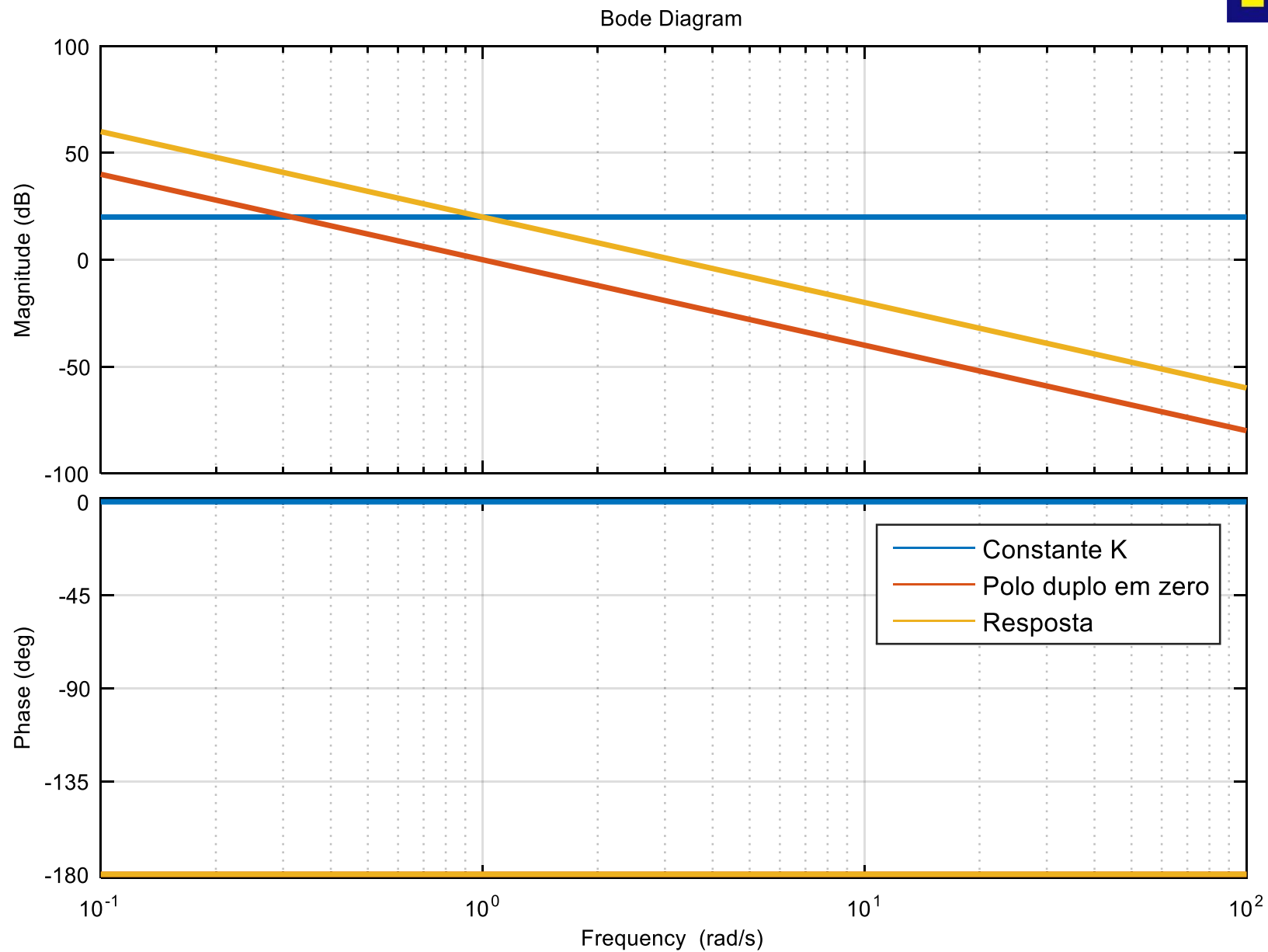
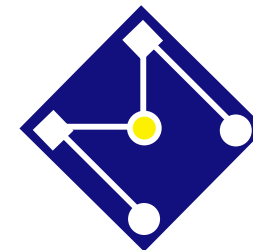


EXEMPLO

Trace o diagrama de Bode

$$G(s) = \frac{10}{s^2}$$

Fator	Frequência de canto	Módulo	Fase
Constante $K = 10$	---	$20 \log 10 = 20$	0^0
Polo duplo na origem $s^{-n} = (j\omega)^{-2}$	$\omega = \frac{1 \text{ rad}}{s}$ em 0 dB	$-20n \log \omega = -40 \log \omega$	$-90n = -180^0$



```

clear all; close all; clc
opts = bodeoptions;
opts.Grid='on'
opts.XLim = {[0.1,100]};
opts.XLimMode = {'manual'};
figure;
Ht=tf(10*[1],[1]);
    bode(Ht,opts)
    hold on;

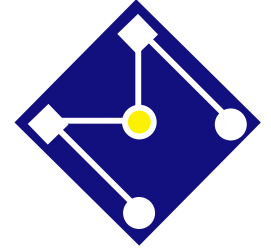
Hc=tf([1],[1 0 0]);
    bode(Hc,opts)
    hold on

Hc=tf([10],[1 0 0]);
    bode(Hc,opts)

legend('Constante K','Polo duplo em
zero','Resposta')

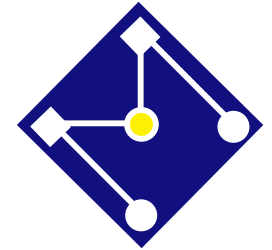
h = findobj(gcf,'type','line');
set(h,'linewidth',2);

```



FATORES DE PRIMEIRA ORDEM

$$(1 + j\omega\tau)^{\pm 1}$$



FATOR POLO DE PRIMEIRA ORDEM

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

- O módulo em dB para o fator de pólo de primeira ordem é:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega\tau} \right| = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2\tau^2} \text{ dB}$$

Para baixas frequências, $\omega \ll 1/\tau$

$$|G(j\omega)|_{dB} = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2\tau^2} \cong -20 \log 1 = 0 \text{ dB}$$

Para $\omega = 1/\tau$

$$|G(j\omega)|_{dB} = -20 \log \sqrt{2} \cong -3 \text{ dB}$$

Para altas frequências, $\omega \gg 1/\tau$

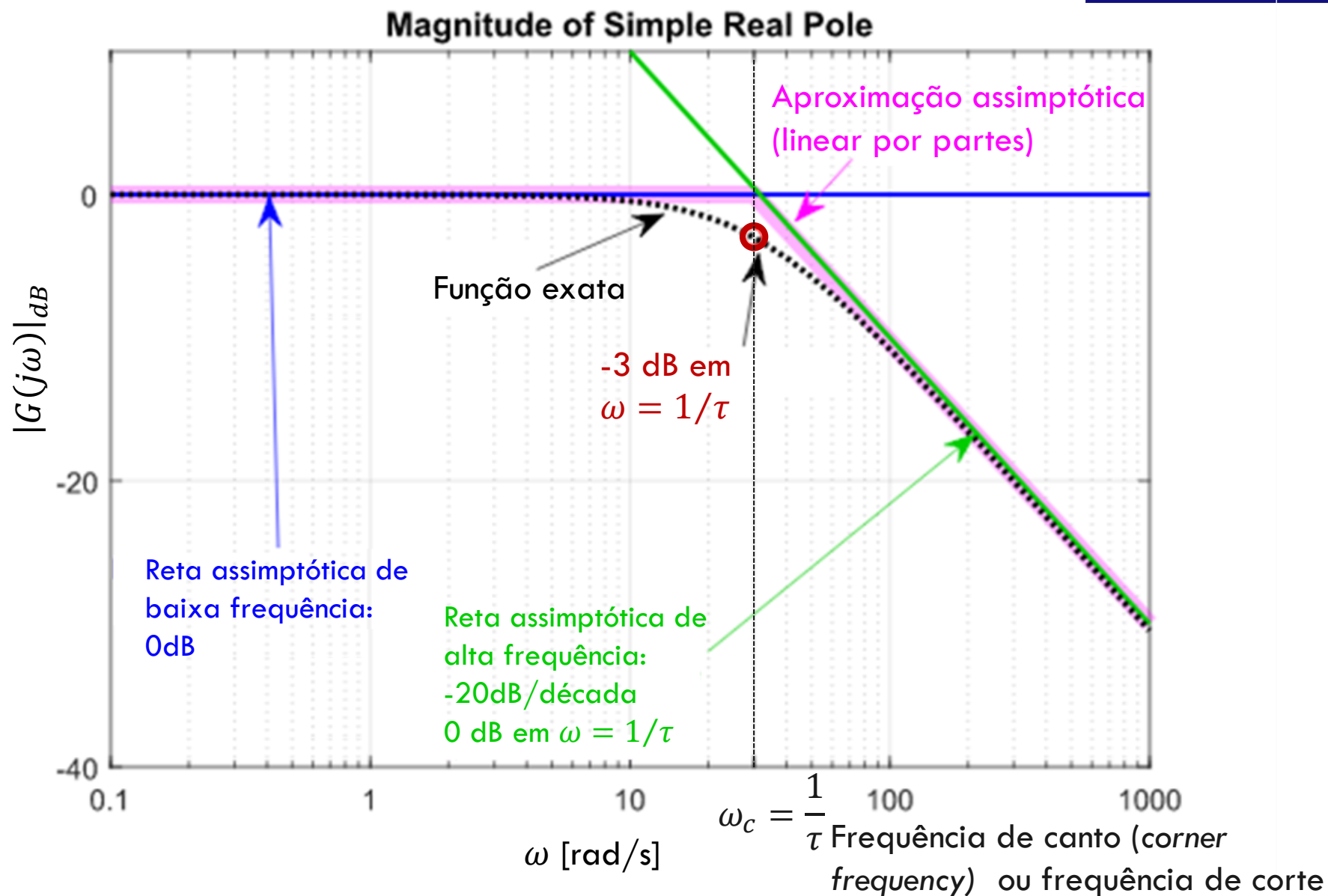
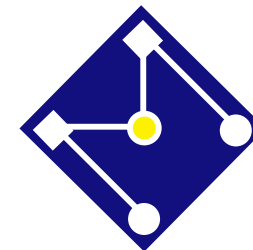
$$|G(j\omega)|_{dB} = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2\tau^2} \cong -20 \log \omega\tau \text{ dB}$$

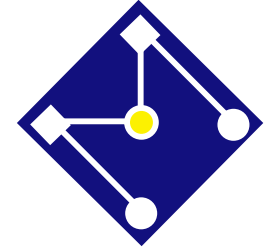
$$\omega = 1/\tau \rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 0 \text{ dB}$$

$$\omega = 10/\tau \rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = -20 \text{ dB}$$

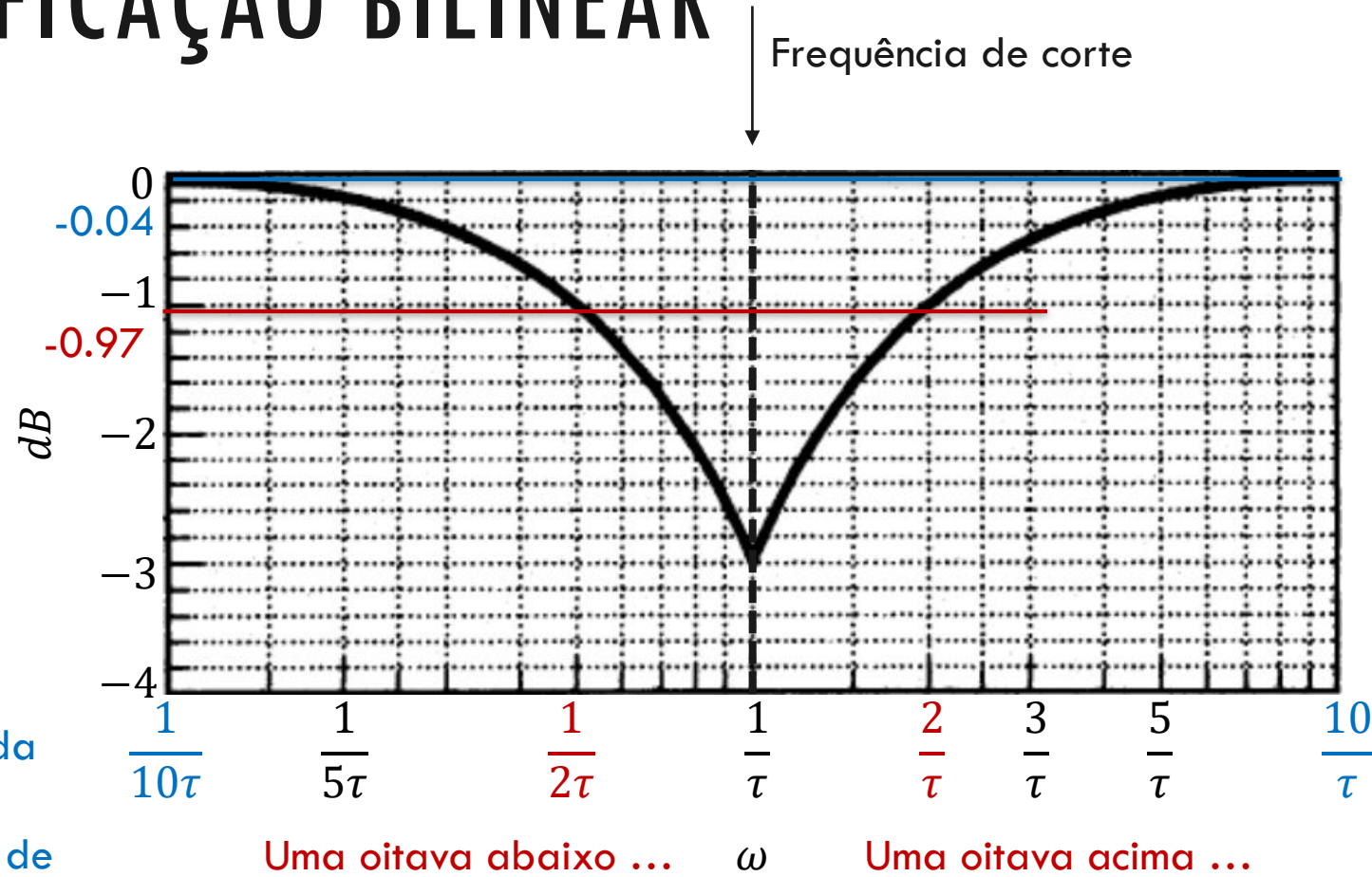


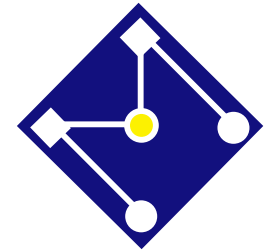
Decresce em 20 dB para cada década de ω





ERRO DO MODULO, EM DB, NO USO DA SIMPLIFICAÇÃO BILINEAR





FASE DO FATOR POLO DE PRIMEIRA ORDEM

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

- A fase para o fator pólo de primeira ordem é:

$$\angle G(j\omega) = \angle \left(\frac{1}{1 + j\omega\tau} \right) = -\angle(1 + j\omega\tau) = -\text{atan } \omega\tau$$

Para baixas frequências, $\omega \ll 1/\tau$

$$\angle G(j\omega) = -\text{atan } 0 = 0^\circ$$

Para $\omega = 1/\tau$

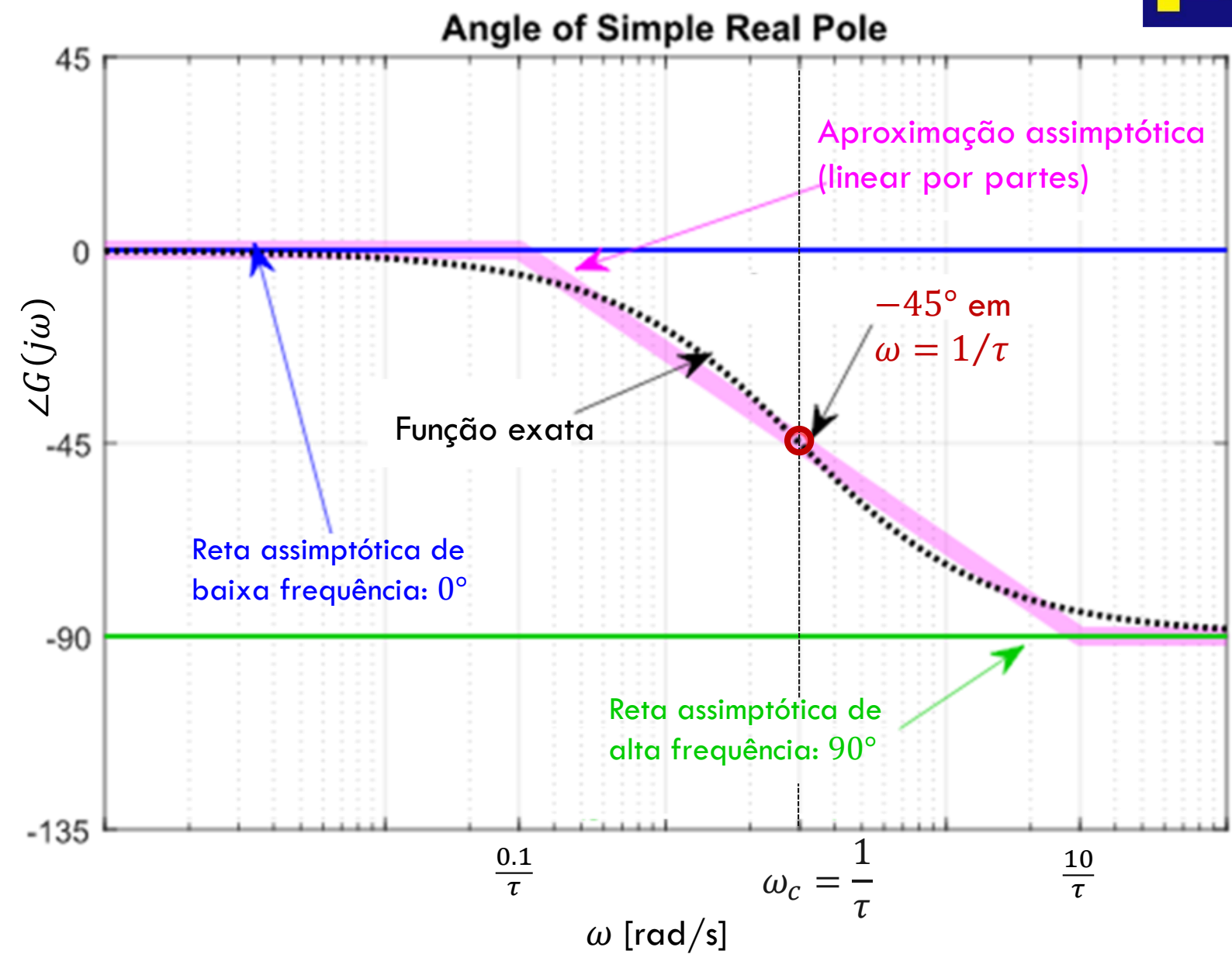
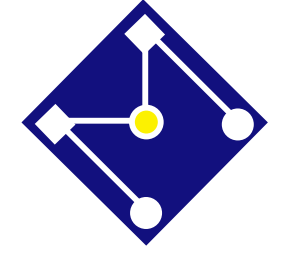
$$\angle G(j\omega) = -\text{atan } 1 = 45^\circ$$

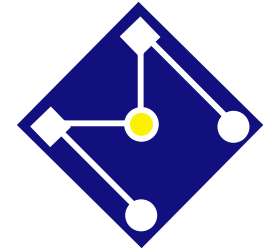
Para altas frequências, $\omega \gg 1/\tau$

$$\angle G(j\omega) = -\text{atan } \infty = -90^\circ$$

$$10^{-1}/\tau < \omega < 10/\tau$$

$$\angle G(j\omega) = -\text{atan } \omega\tau$$





FATOR ZEROS DE PRIMEIRA ORDEM

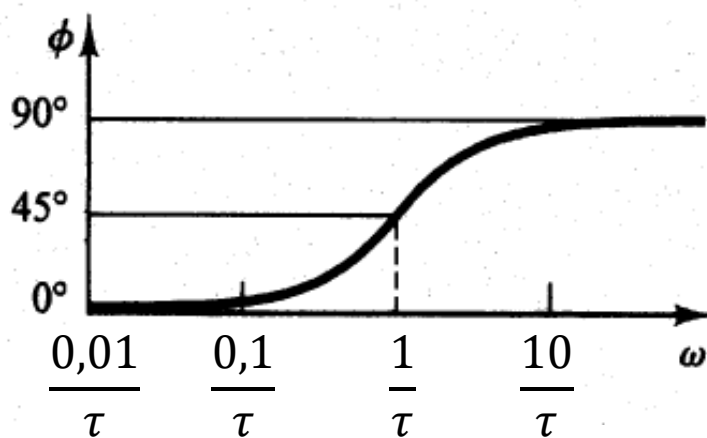
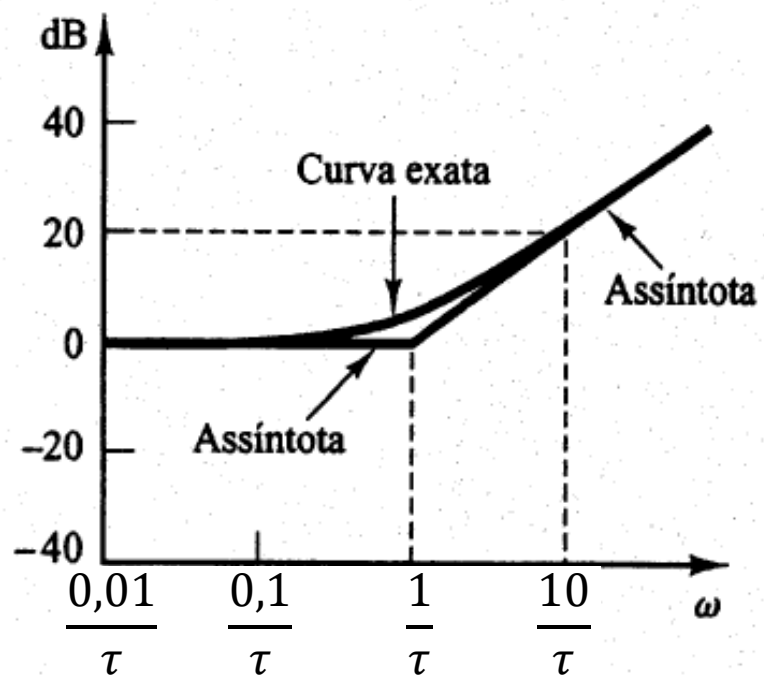
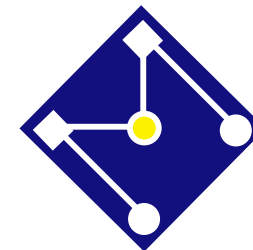
$$G(j\omega) = 1 + j\omega\tau$$

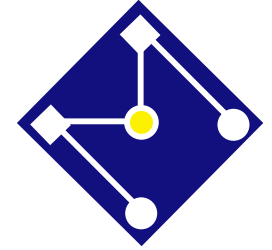
- O módulo em dB para o fator de primeira ordem $(1 + j\omega\tau)$ é:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log|1 + j\omega\tau| = 20 \log \sqrt{1 + \omega^2\tau^2} \text{ dB}$$

A fase para o fator de primeira ordem $(1 + j\omega\tau)$ é:

$$\angle G(j\omega) = \angle(1 + j\omega\tau) = \text{atan } \omega\tau$$





FATORES DE PRIMEIRA ORDEM $G(j\omega) = (1 + j\omega\tau)^{\pm n}$

A frequência de canto ainda está em $\omega = \frac{1}{\tau}$

A assíntota de baixa frequência é uma reta em 0 dB.

A assíntota de alta frequência tem inclinação de $-20n$ dB/década ou $20n$ dB/década

O erro envolvido nas expressões assintóticas é n vezes o erro correspondente a $G(j\omega) = (1 + j\omega\tau)^{\pm 1}$

O ângulo de fase é n vezes o erro correspondente a $G(j\omega) = (1 + j\omega\tau)^{\pm 1}$ em cada ponto de frequências.

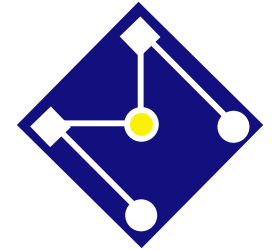
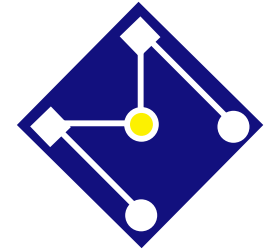


DIAGRAMA DE BODE PASSO A PASSO

Vamos desenhar passo a passo o Diagrama de Bode para seguinte função de transferência,

$$H(s) = 100 \frac{s + 1}{s^2 + 110s + 1000}$$

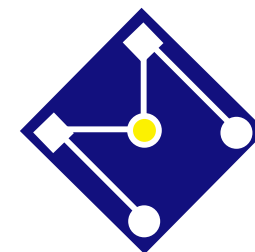


PASSOS 1 E 2

1. Reescreva a função de transferência na forma adequada

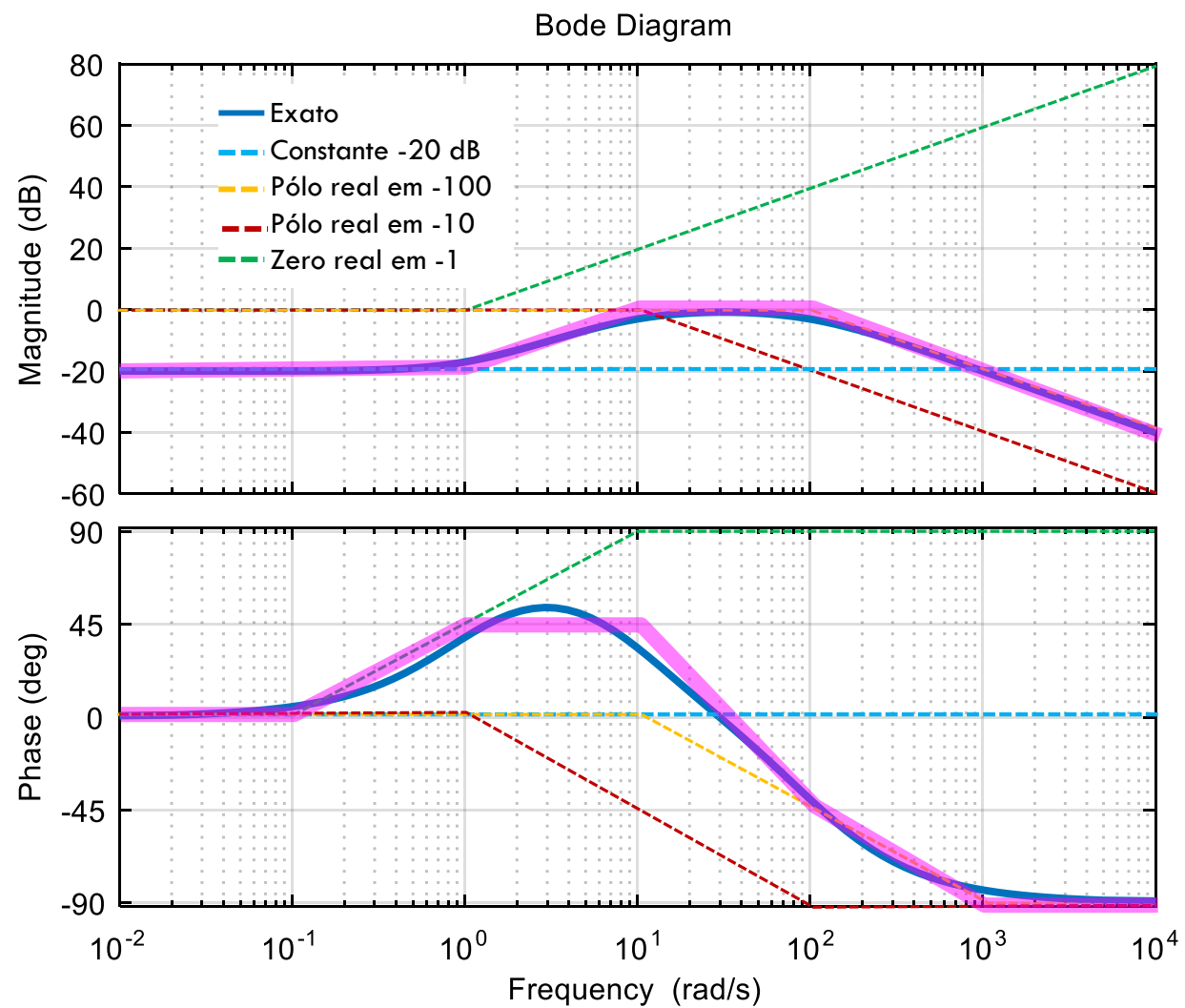
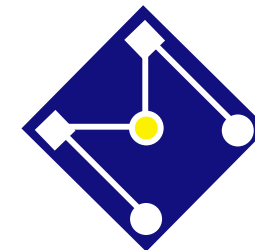
$$H(s) = 100 \frac{(s + 1)}{(s + 10)(s + 100)} = 0,1 \frac{s + 1}{\left(\frac{s}{10} + 1\right) \left(\frac{s}{100} + 1\right)}$$

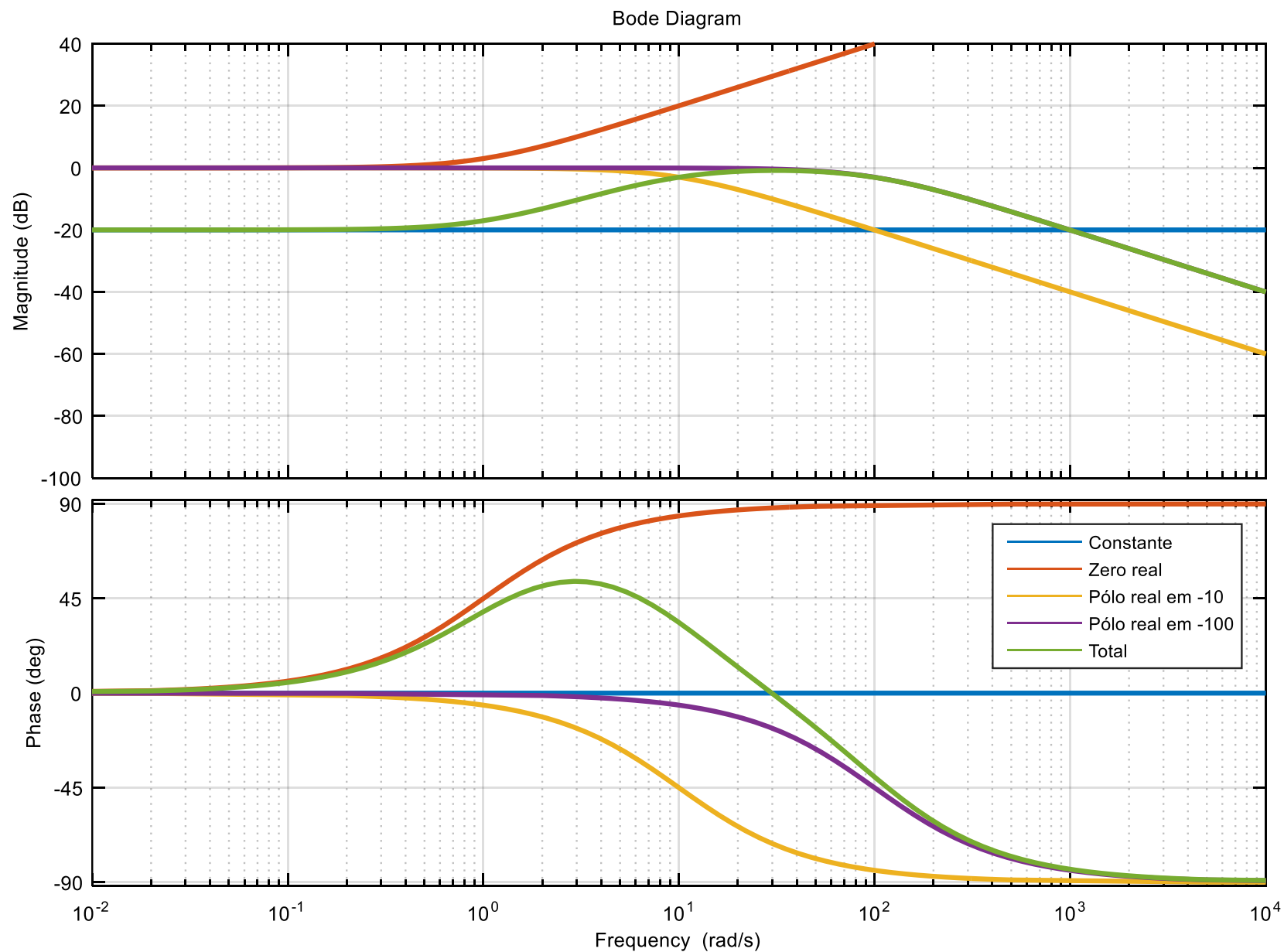
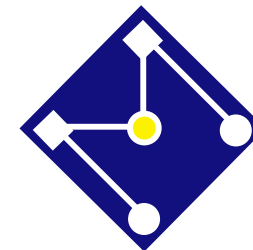
2. Separe a função de transferência em seus fatores básicos. Existem 7 fatores básicos: constantes, pólos na origem, zeros na origem, pólos reais, zeros reais, pólos complexos conjugados, zeros complexos conjugados. Particularmente nossa função tem,
 - uma constante 0,1;
 - um zero em $s = -1$, constante de tempo $\tau = 1$;
 - um pólo em $s = -10$, constante de tempo $\tau = 1/10$;
 - um pólo em $s = -100$, constante de tempo $\tau = 1/100$.

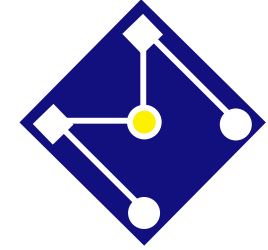


PASSO 3

Fator básico	Parâmetros	Módulo	Fase
Constante	$K = 0,1$	$ K _{dB} = 20 \log 0,1 = -20 \text{ dB}$	$\angle K = 0^\circ$
Zero real	$\tau = 1$	Baixas frequências: assintótica em 0dB Altas frequências: assintótica em +20dB/década Conexão das assintóticas em $\omega_c = 1 \text{ rad/s}$	Baixas frequências: assintótica em 0° Altas frequências: assintótica em $+90^\circ$ Conexão linear das assintóticas de $\omega = 0,1 \text{ rad/s}$ até $\omega = 10 \text{ rad/s}$
Pólo real	$\tau = \frac{1}{10}$	Baixas frequências: assintótica em 0dB Altas frequências: assintótica em -20dB/década Conexão das assintóticas em $\omega_c = 10 \text{ rad/s}$	Baixas frequências: assintótica em 0° Altas frequências: assintótica em -90° Conexão linear das assintóticas de $\omega = 1 \text{ rad/s}$ até $\omega = 100 \text{ rad/s}$
Pólo real	$\tau = \frac{1}{100}$	Baixas frequências: assintótica em 0dB Altas frequências: assintótica em -20dB/década Conexão das assintóticas em $\omega_c = 100 \text{ rad/s}$	Baixas frequências: assintótica em 0° Altas frequências: assintótica em -90° Conexão linear das assintóticas de $\omega = 10 \text{ rad/s}$ até $\omega = 1000 \text{ rad/s}$







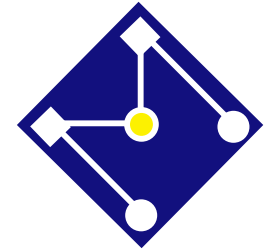
Rules for Drawing Bode Magnitude Plots with Simple Poles and Zeroes

- First determine all the break points (pole and zero locations) and arrange in order of increasing frequency. Choose a frequency range for the plot that encompasses all these points, adding an extra decade of frequency above and below this range.
- Based on the poles and zeroes, make a quick sketch of the expected shape of the Bode plot on a piece of scrap paper. This will help you find the appropriate vertical scales. For a simple pole or zero of the form $(s + a)$ the slope of the uncorrected Bode plot changes at the break point $\omega = a$, increasing by 20 dB/decade for a zero, and decreasing by 20dB/decade for a pole. For a *repeated* pole or zero $(s + a)^r$ the slope changes by $20r$ dB/decade, or 20 dB for each time the pole or zero is repeated.
- To find a reference level we first consider the behavior of the function for low-frequencies ($\omega \rightarrow 0$) or high frequencies ($\omega \rightarrow \infty$). If the limiting behavior approaches a constant value at these extremes that is a good starting point. Otherwise, we must evaluate the function numerically at some particular frequency, preferably in a region with a constant-value “plateau”.
- Once the uncorrected Bode plot is finished, a corrected version can be drawn. For simple/repeated roots the true response passes through a point that is $3r$ dB below the uncorrected curve at the break point, or 3dB for each time the pole is repeated

https://aprender.ead.unb.br/pluginfile.php/258332/mod_resource/content/1/Frequency%20Response.pdf

FATORES QUADRÁTICOS

$$\left[1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^{\pm n}$$



FATORES PÓLOS QUADRÁTICOS

$$G(j\omega) = \frac{1}{\left[1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right]}$$

Pólos complexos $0 \leq \zeta < 1$

Produto de dois fatores complexos conjugados.

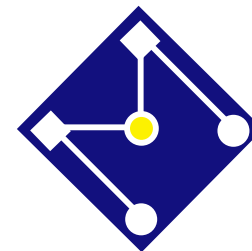
Pólos duplos $\zeta = 1$

Pólos duplos

Pólos reais distintos $\zeta > 1$

Expresso como um produto de dois fatores de primeira ordem com pólos reais.

Casos já
cobertos nos
fatores
básicos
anteriores.



FATOR PÓLO QUADRÁTICO

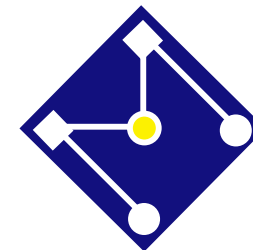
$$G(j\omega) = \frac{1}{\left[1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^n}$$

- O módulo em dB para o fator pólo quadrático é:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log \left| \frac{1}{\left[1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^n} \right|$$

$$= -20n \log \left| 1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \right|$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = -20n \log \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$



$$|G(j\omega)|_{dB} = -20n \log \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Para baixas frequências, $\omega \ll \omega_n$

$$|G(j\omega)|_{dB} = -20n \log \sqrt{1 + 0} \cong -20n \log 1 = 0 \text{ dB}$$

Para altas frequências, $\omega \gg \omega_n$

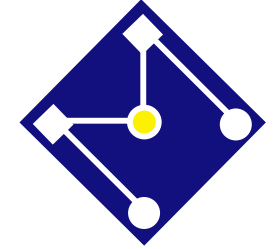
$$|G(j\omega)|_{dB} = -20 \log \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^4} \cong -40 \log \frac{\omega}{\omega_n} \text{ dB}$$

A assintótica de alta
frequência cruza a de baixa
frequência em $\omega = \omega_n$

Para $\omega = \omega_n$

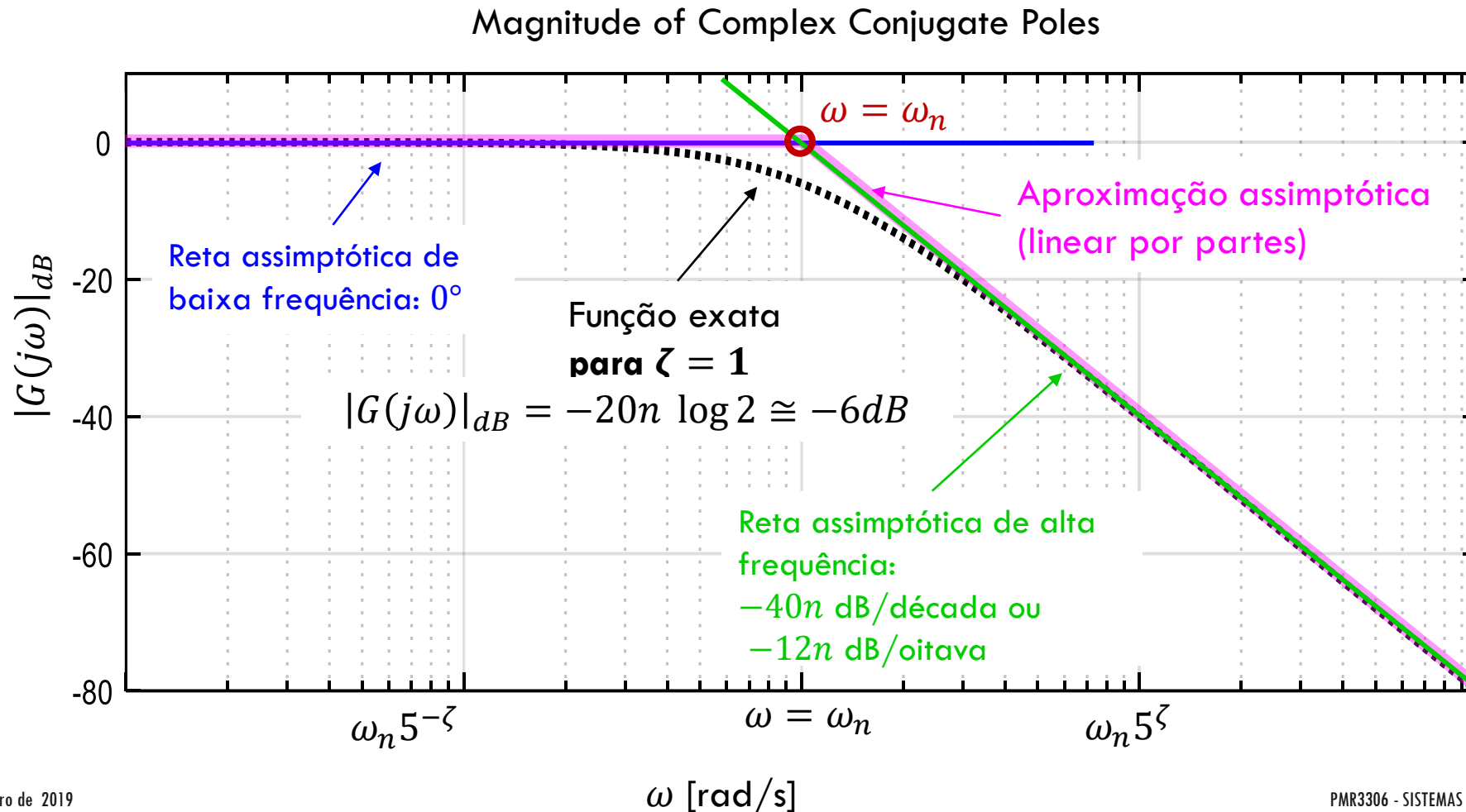
$$|G(j\omega_n)|_{dB} = -20 \log 2\zeta = 0 \text{ dB}$$

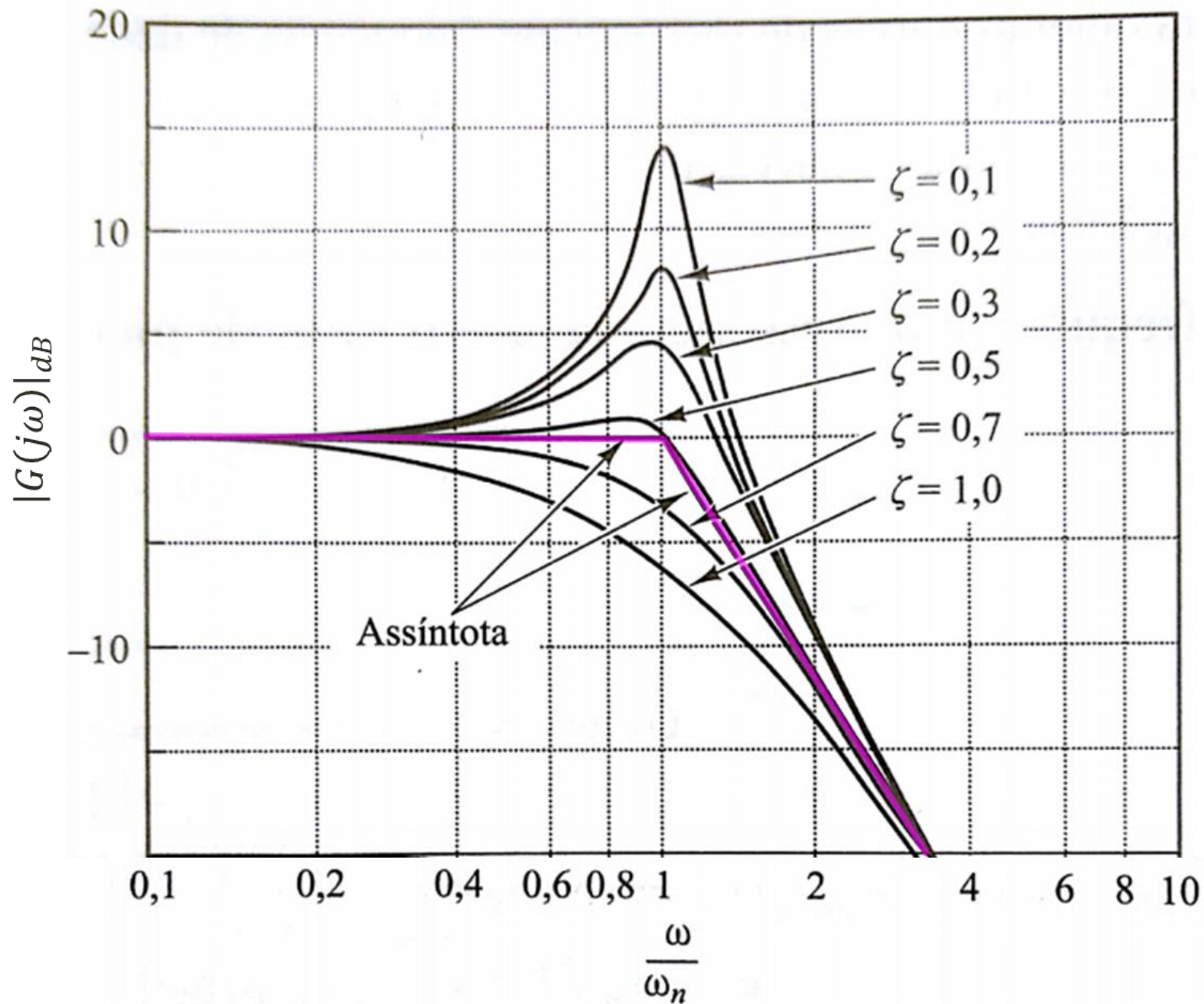
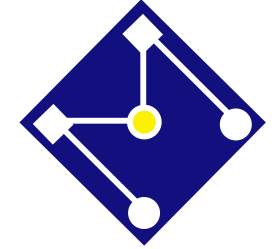




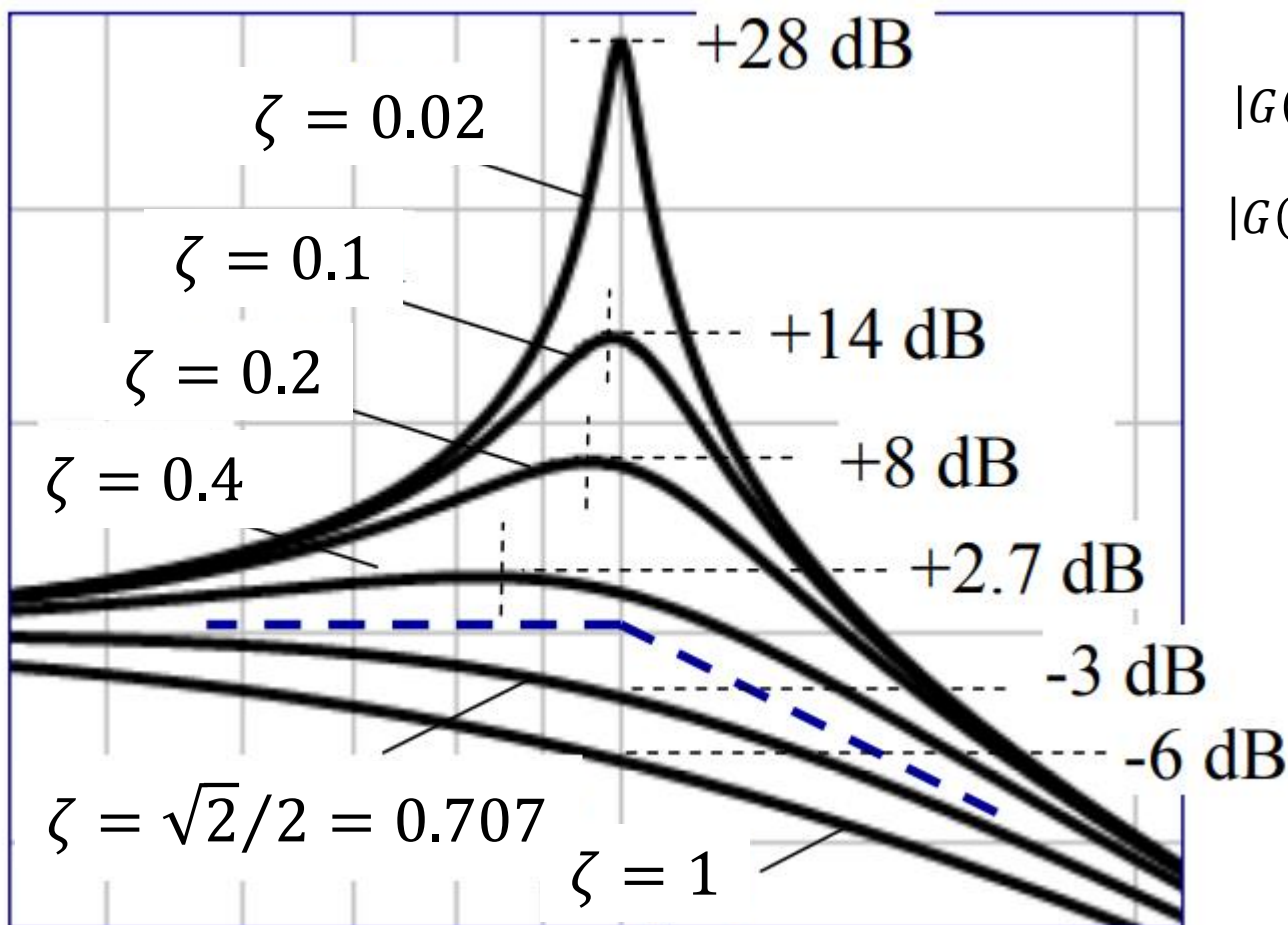
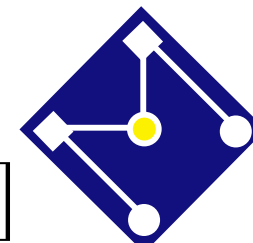
Para o caso particular $\zeta = 1$

Nas proximidades da frequência natural ω_n as assintóticas apenas aproximam da curva real de $|G(j\omega)|_{dB}$, apresentando um erro máximo de $\approx 6n$ dB que ocorre exatamente na frequência de corte ω_n , o ponto onde as duas assintóticas se encontram.





Amplitude do erro em relação às assintóticas dependerá do valor de ζ .



$$|G(j\omega_n)|_{dB} = -40 \log 2\zeta$$

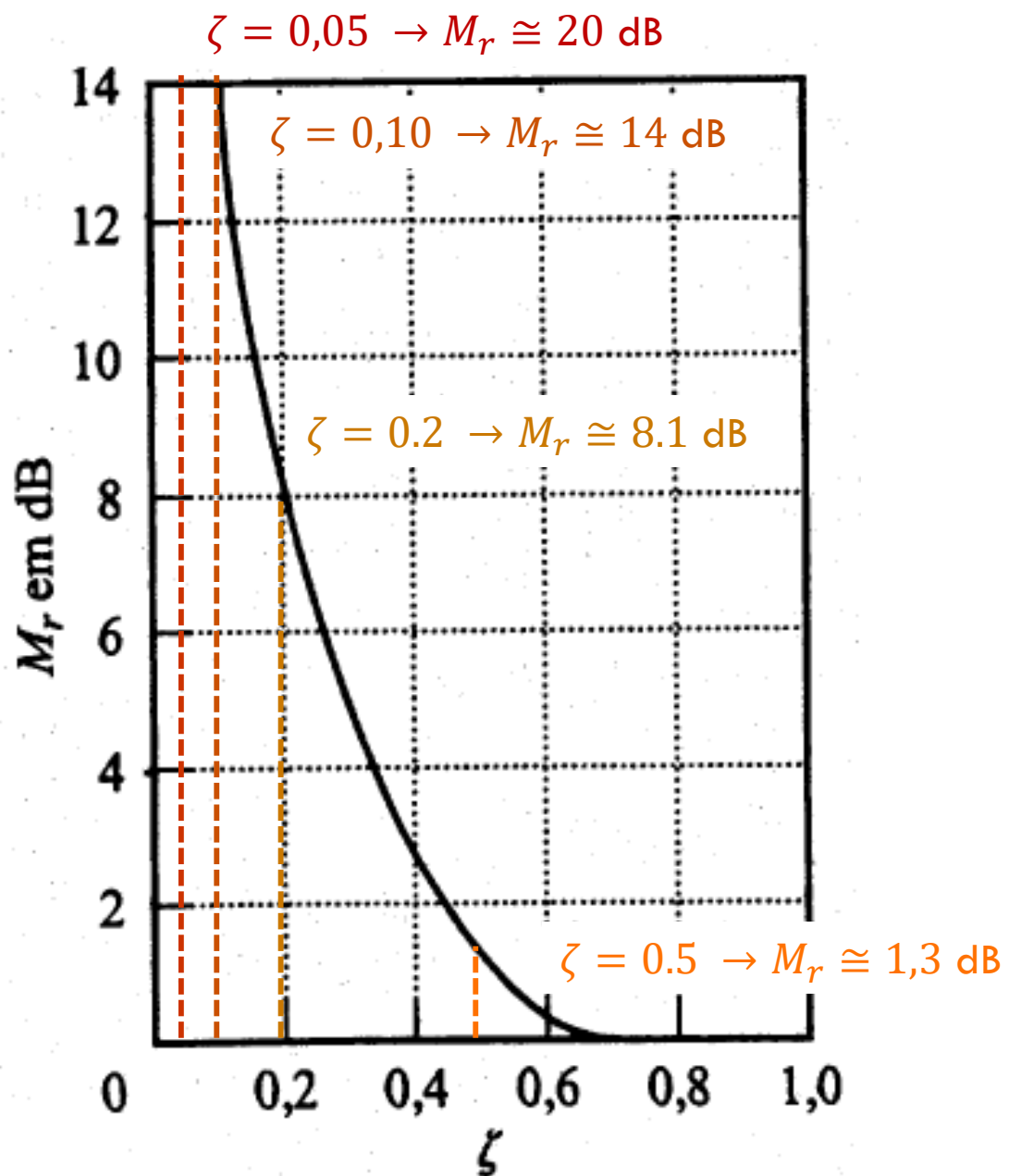
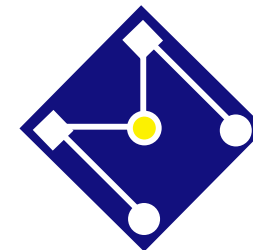
$$|G(j\omega_r)|_{dB} = -20 \log [2\zeta\sqrt{(1-\zeta^2)}]$$

ζ	$ G(j\omega_n) $	ω_r / ω_n	$ G(j\omega_r) _{dB}$
0.02	+28 dB	~ 1	+28 dB
0.05	+20 dB	0.997	+20 dB
0.1	+14 dB	0.990	+14 dB
0.2	+8 dB	0.959	+8.1 dB
0.4	+1.9 dB	0.825	+2.7 dB
0.5	0 dB	0.707	+1.3 dB
0.707	-3 dB	0	0 dB
1	-6 dB	—	—

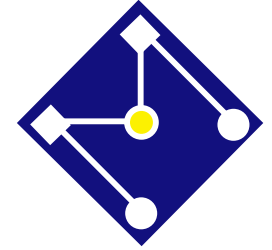
A medida que o valor de ζ diminui, as curvas de $|G(j\omega)|_{dB}$ vão ficando mais altas.

Para $\zeta > \sqrt{2}/2$ surgem picos, que vão se tornando cada vez mais altos a medida que $\zeta \rightarrow 0$.

Esses picos ocorrem nas chamadas frequências de ressonância $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$



$$|G(j\omega_r)|_{dB} = -20 \log 2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}$$



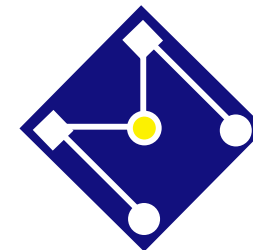
FASE DO FATOR PÓLO QUADRÁTICO

$$G(j\omega) = \frac{1}{\left[1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^n}$$

- A fase para o fator pólo quadrático é:

$$\angle G(j\omega) = \angle \left(\frac{1}{1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2} \right)^n = -\angle \left(1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 \right)^n$$

$$\angle G(j\omega) = -n \operatorname{atan} \left[\frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right] = -n \operatorname{atan} \left[\frac{2\zeta \omega_n \omega}{\omega_n^2 - \omega^2} \right]$$



$$\angle G(j\omega) = -\text{atan} \left[\frac{2\zeta \omega_n \omega}{\omega_n^2 - \omega^2} \right]$$

Para baixas frequências, $\omega \ll \omega_n$

$$\angle G(j\omega) = -\text{atan} 0 = 0^\circ$$

Para $\omega = \omega_n$

$$\angle G(j\omega) = -\text{atan} \infty = -90^\circ$$

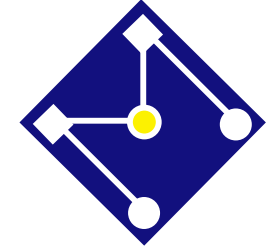
Em $\omega \gg \omega_n$

$$\angle G(j\omega) = -\text{atan} 0 = -180^\circ$$

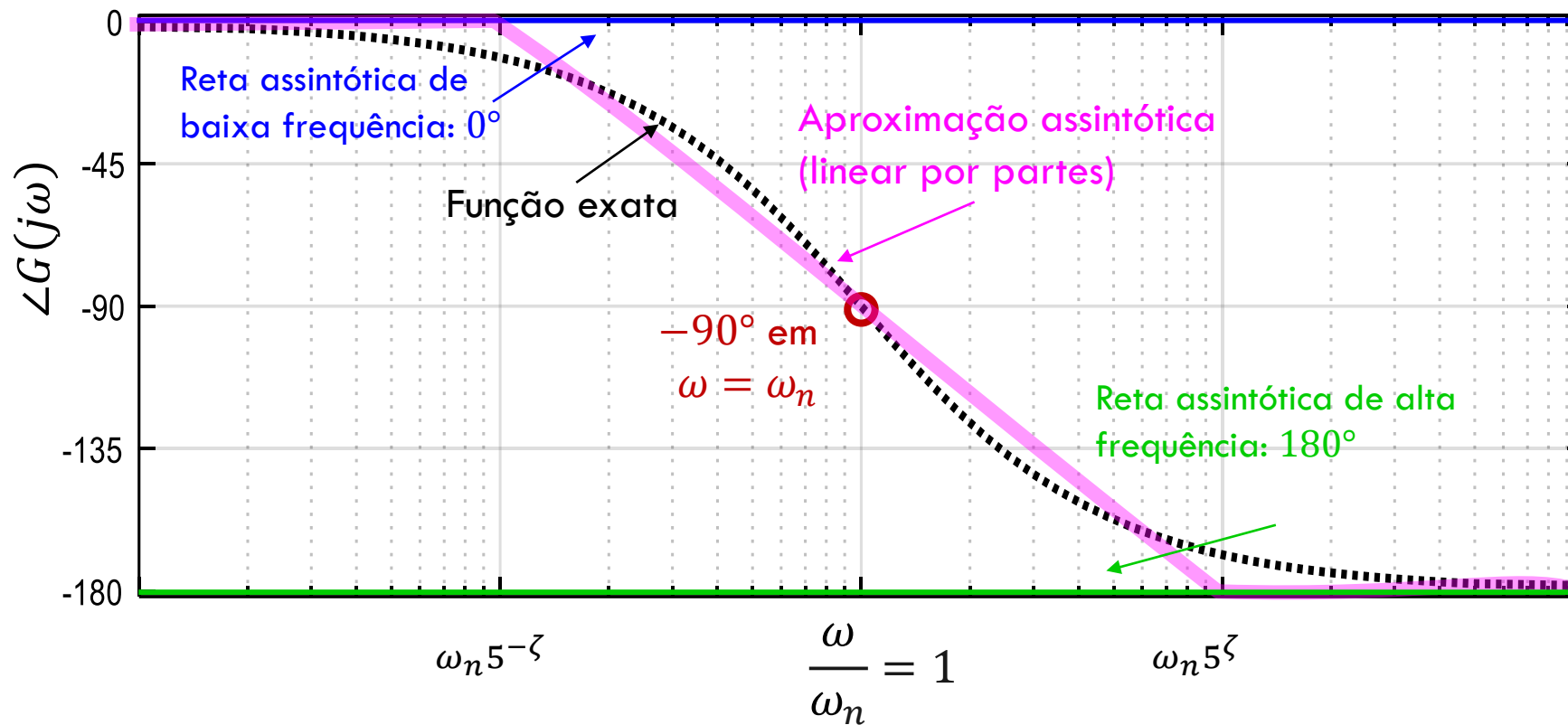
O diagrama de Bode de fase se torna mais íngreme (com declive mais acentuado) a medida que $\zeta \rightarrow 0$

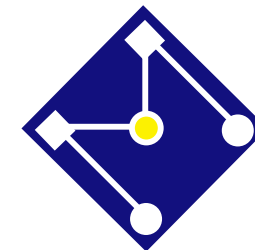
$$\omega_n 5^{-\zeta} < \omega < \omega_n 5^{\zeta}$$

$$\angle G(j\omega) = -\text{atan} \left[\frac{2\zeta \omega_n \omega}{\omega_n^2 - \omega^2} \right]$$

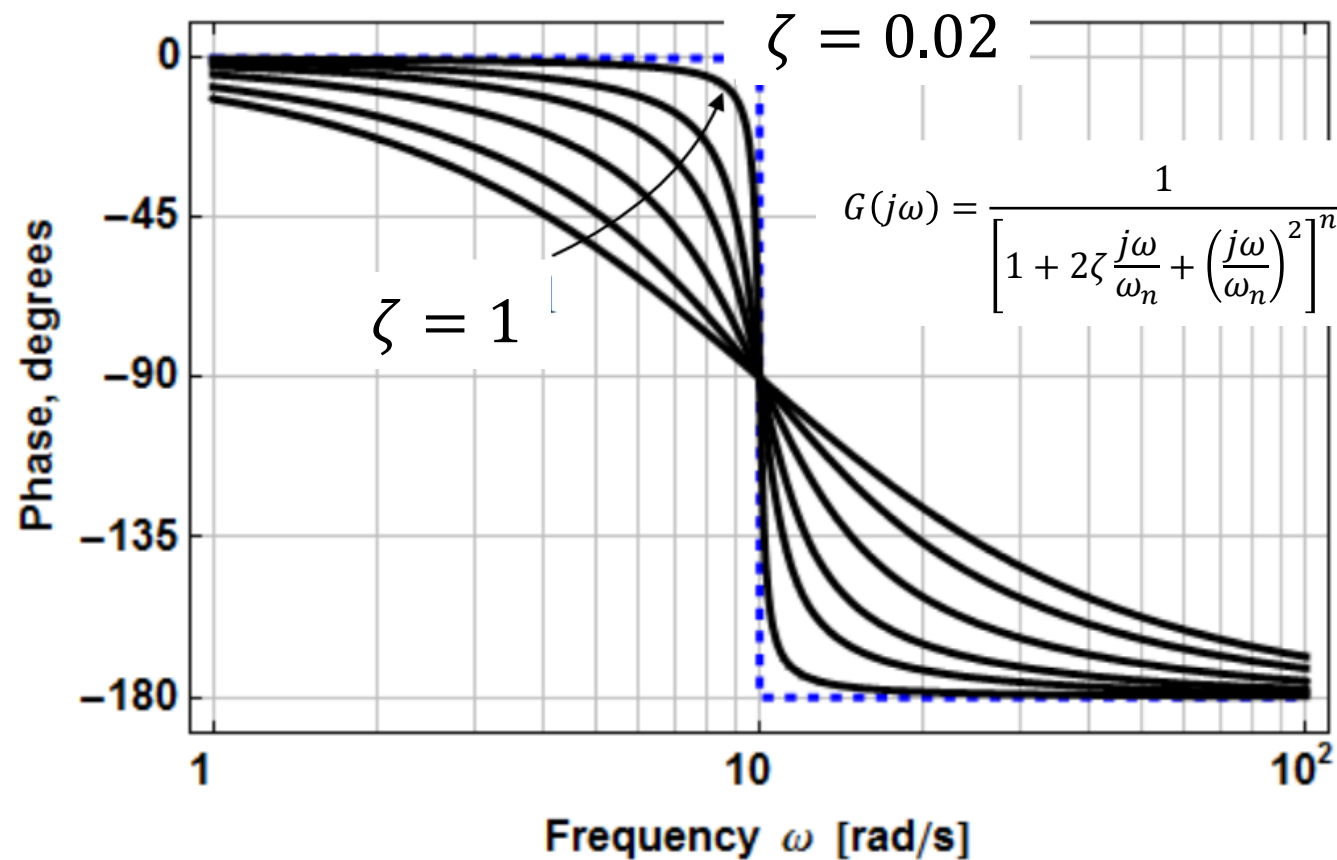


Angle of Complex Conjugate Poles

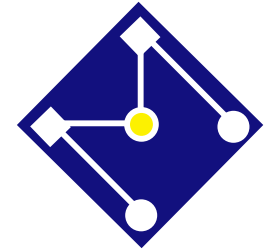




$$\angle G(j\omega) = -\text{atan} \left[\frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2} \right]$$

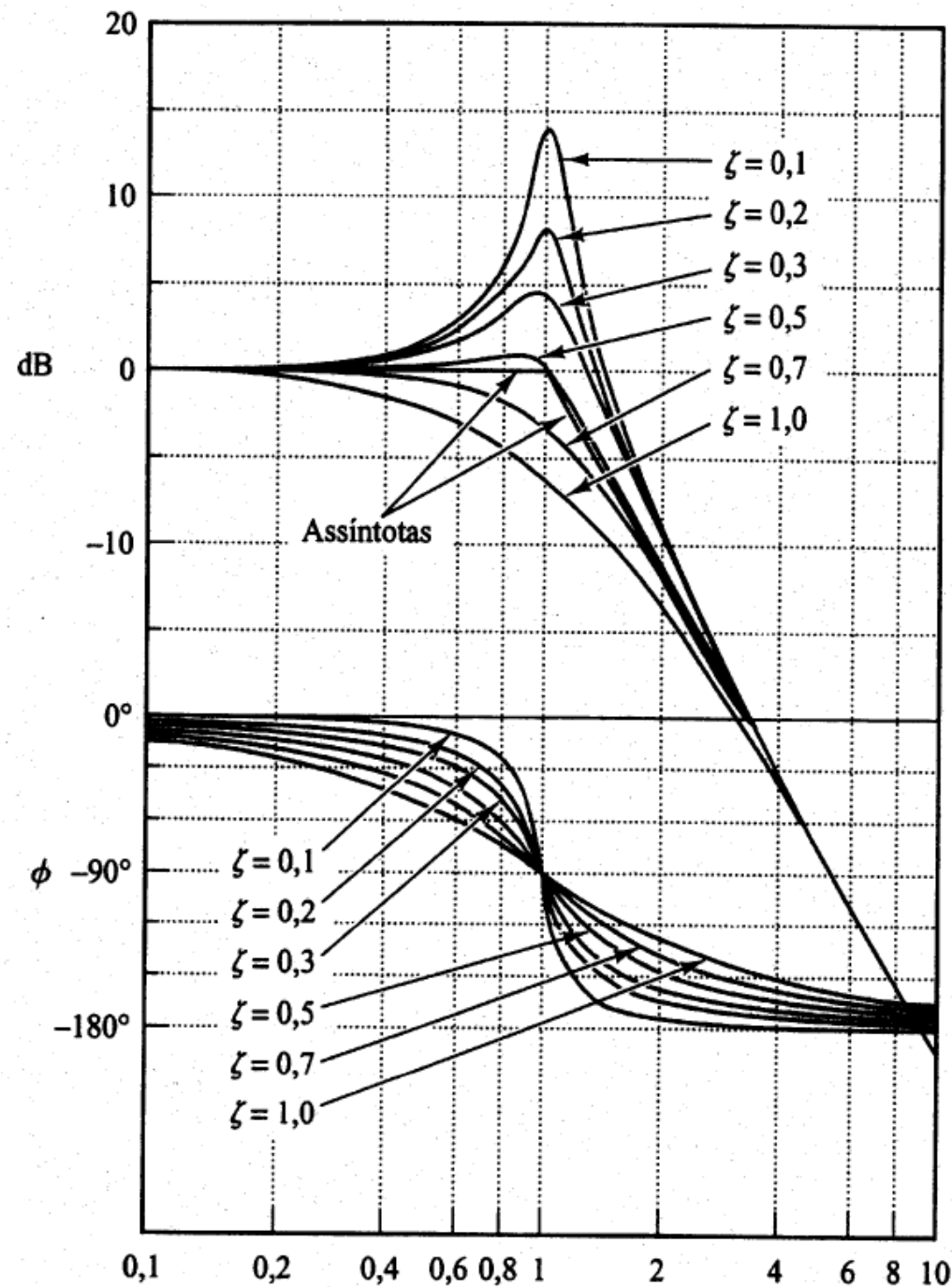
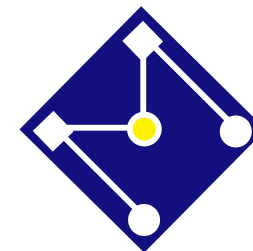


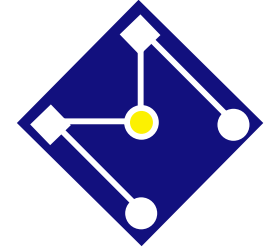
ζ	$0.1\omega_n$	$0.2\omega_n$	$0.5\omega_n$
0.02	-0.2°	-0.5°	-1.5°
0.05	-0.6°	-1.2°	-3.8°
0.1	-1.2°	-2.4°	-7.6°
0.2	-2.3°	-4.8°	-15°
0.3	-3.5°	-7.1°	-22°
0.4	-4.6°	-9.5°	-28°
0.5	-5.8°	-12°	-34°
0.707	-8.1°	-16°	-43°
1	-11.4°	-23°	-53°



IMPORTANTE VERIFICAR QUE...

- As aproximações assintóticas para as curvas de resposta em frequência não são precisas para um fator com baixos valores de ζ .
- O módulo e a fase do fator quadrático dependem tanto da frequência de canto ω_n como do coeficiente de amortecimento ζ .
- Raízes complexas estão associadas a $0 \leq \zeta \leq 1$. Para $\zeta > 1$ as raízes são reais e, portanto, correspondem a pólos ou zeros reais que já consideramos.

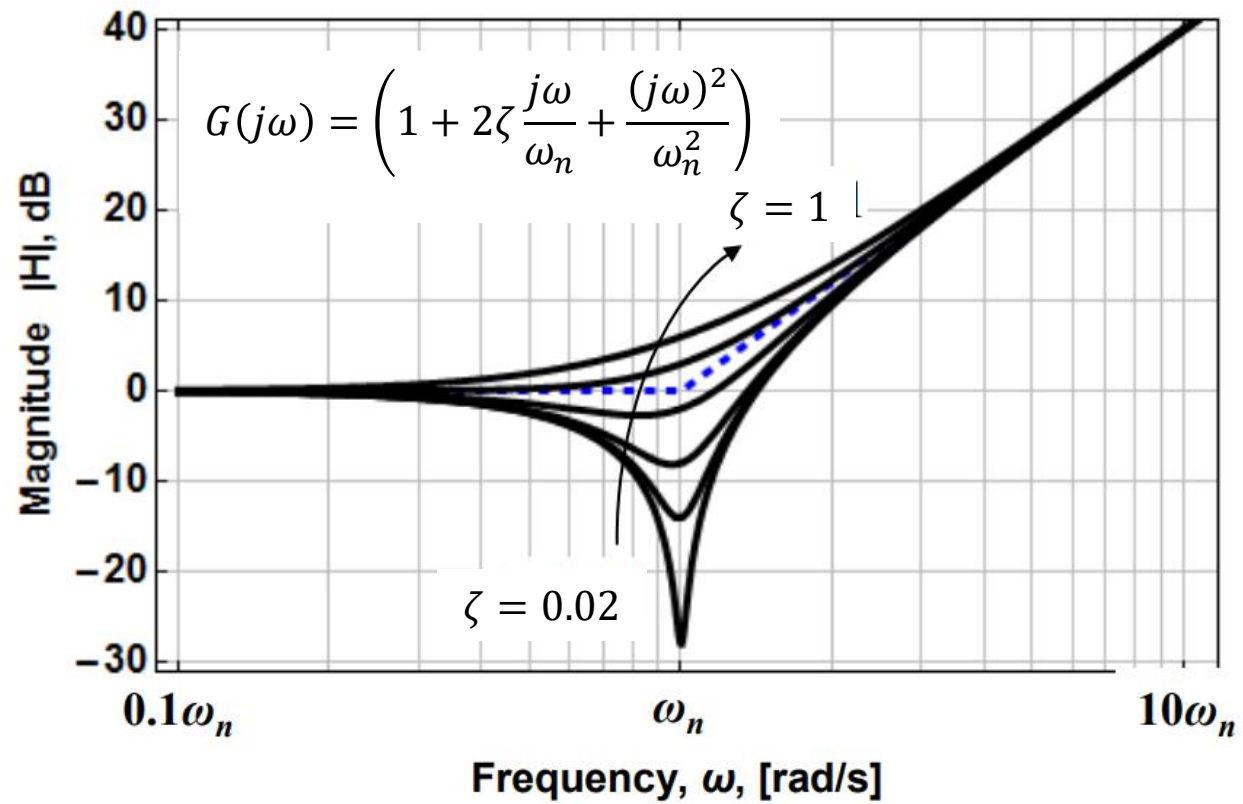
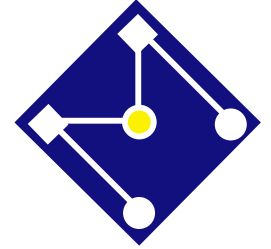


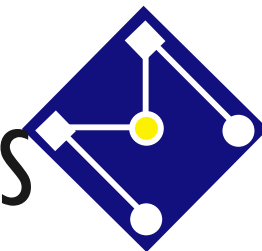


FATOR ZERO QUADRÁTICO

$$G(j\omega) = \left[1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^n$$

- Curvas de módulo e fase para zeros quadráticos podem ser obtidas invertendo-se o sinal das curvas de módulo e fase dos fatores pólos quadráticos.
- As principais diferenças são que os picos de ressonância são para baixo em vez de para cima e as curvas de fase vão de 0° a 180° em vez de de 0° a -180°





PROCEDIMENTOS GERAL PARA A CONSTRUÇÃO DO DIAGRAMA DE BODE PARA POLOS/ZEROS COMPLEXOS

- Reescreva a função de transferência como produto de fatores básicos;
- Extraia a frequência de canto ω_n e o fator de amortecimento ζ ;
- Trace as curvas assintóticas com módulo em dB. Se as raízes complexas estão no numerador, a inclinação aumenta em 40dB/década depois da frequência de canto. Se as raízes complexas estiverem no denominador, a inclinação diminui em 40 dB/década. Corrija com o valor de pico e sua localização;
- Trace as curvas assintóticas do ângulo de fase.

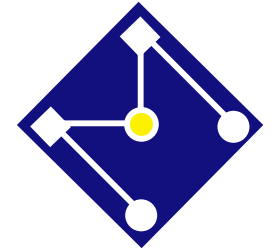
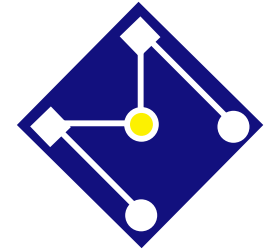


DIAGRAMA DE BODE PASSO A PASSO

- Vamos desenhar passo a passo o Diagrama de Bode para seguinte função de transferência,

$$H(s) = 30 \frac{s + 10}{s^2 + 3s + 50}$$



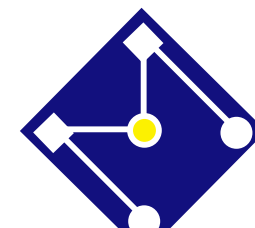
PASSOS 1 E 2

1. Reescreva a função de transferência na forma adequada.

$$H(s) = 6 \frac{\frac{s}{10} + 1}{\frac{s^2}{50} + \frac{3}{50}s + 1}$$

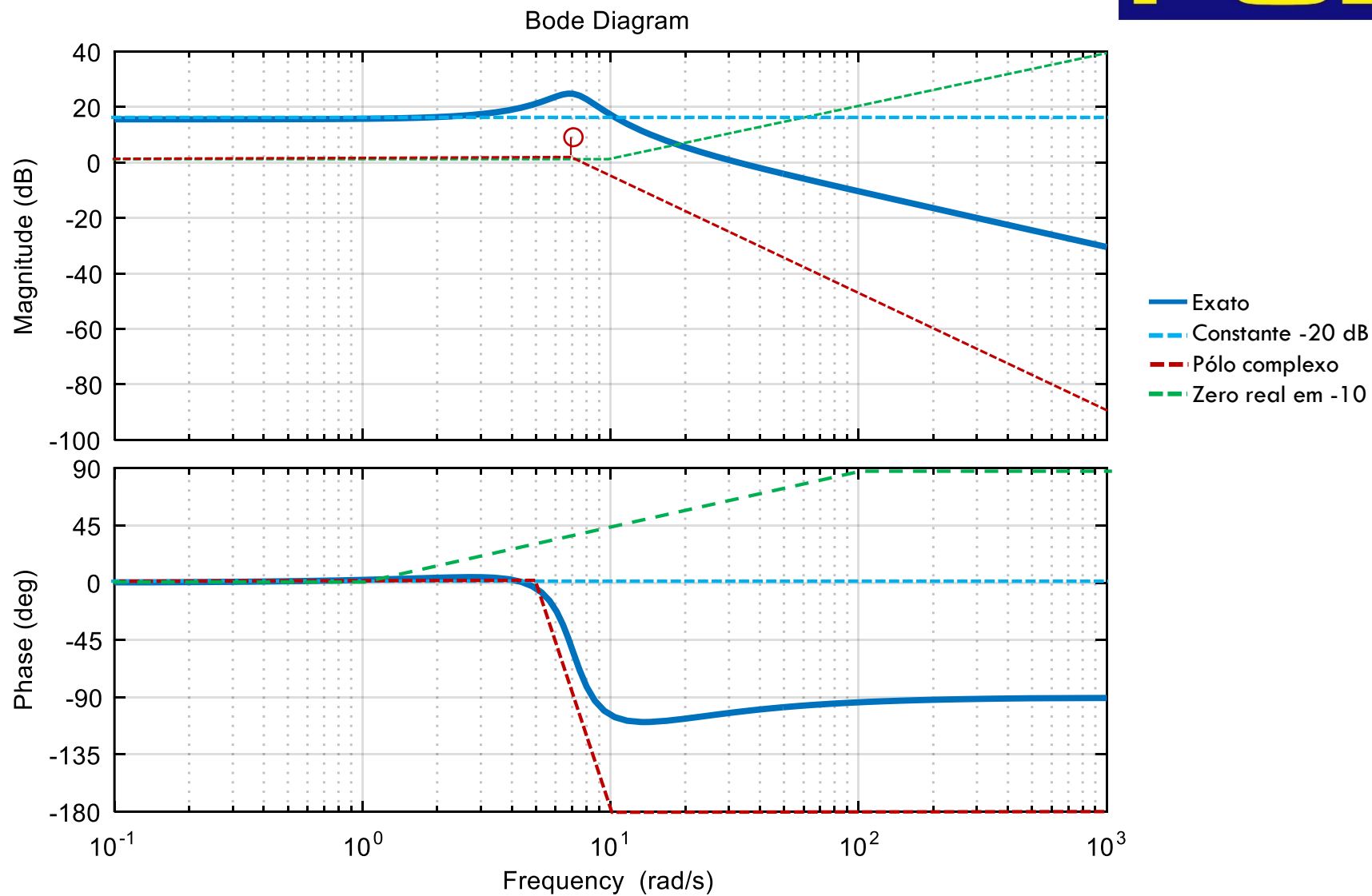
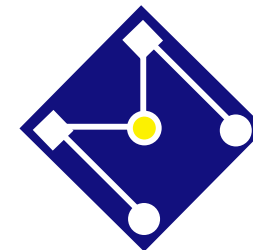
2. Separe a função de transferência em seus fatores básicos.

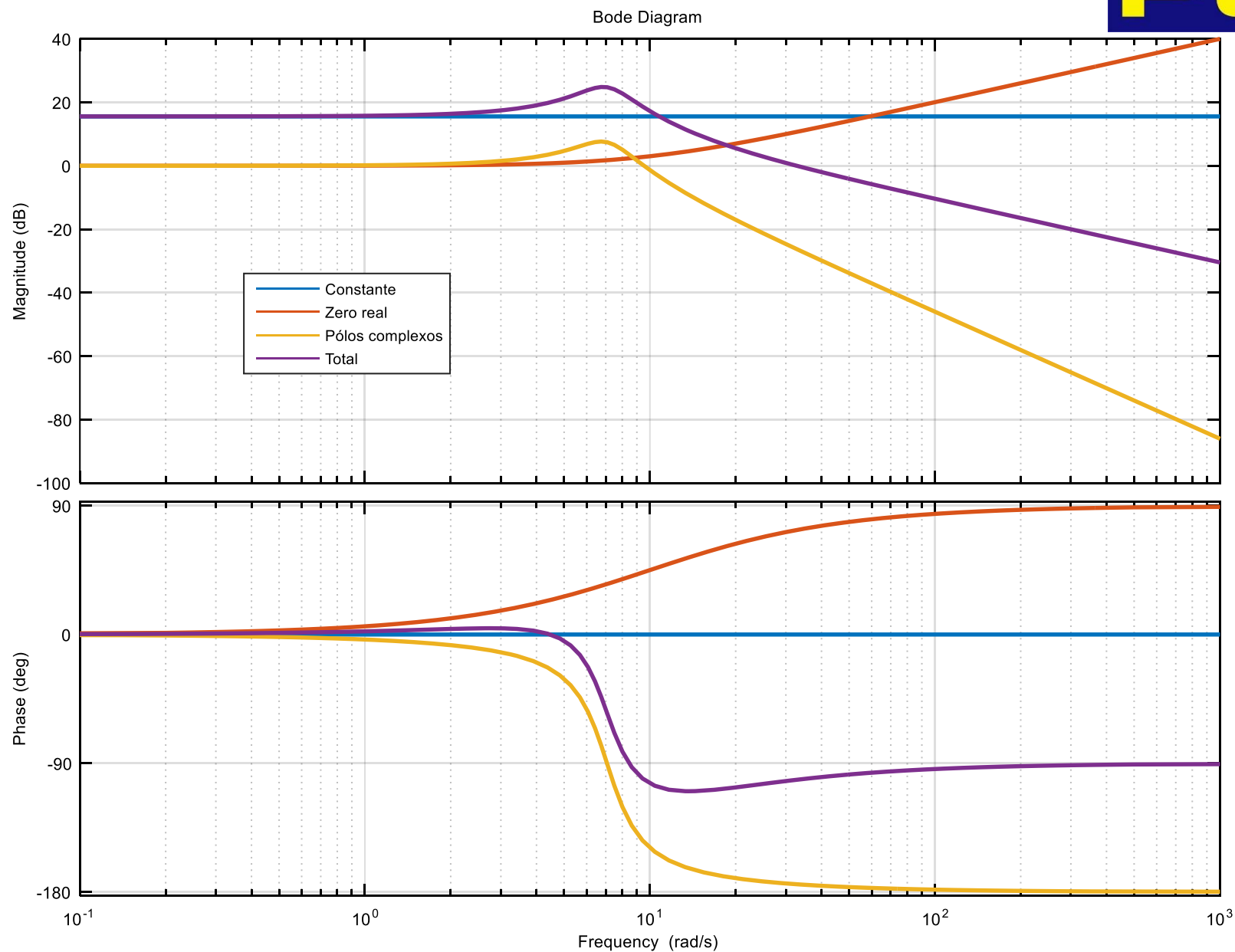
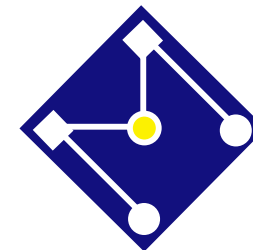
- uma constante 6,
- um zero real $\frac{s}{10} + 1$ em $s = -10$, constante de tempo $\tau = 1/10$
- um par de pólos complexos conjugados de $\frac{s^2}{50} + \frac{3}{50}s + 1$ em $s = -1.5 \pm j6.9$. $\omega_n = 7,07$ e $\zeta = 0,21$.

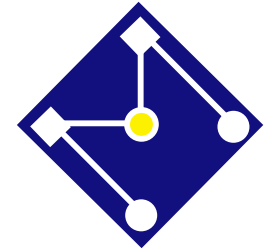


PASSO 3

Fator básico	Parâmetros	Módulo	Fase
Constante	$K = 6$	$ K _{dB} = 20 \log 6 = 15,56 \text{ dB}$	$\angle K = 0^\circ$
Zero real	$\tau = \frac{1}{10}$	Baixas frequências: assintótica em 0dB Altas frequências: assintótica em +20dB/década Conexão das assintóticas em $\omega_c = 10 \text{ rad/s}$	Baixas frequências: assintótica em 0° Altas frequências: assintótica em $+90^\circ$ Conexão linear das assintóticas de $\omega = 1 \text{ rad/s}$ até $\omega = 100 \text{ rad/s}$
Pólos complexos conjugados	$\omega_n = 7,07$ $\zeta = 0,21$	Baixas frequências: assintótica em 0dB Altas frequências: assintótica em -40dB/década Conexão das assintóticas em $\omega_n = 7,07$ Desenho do pico em $\omega_r = 7,07\sqrt{1 - 2 * 0,21^2} = 6.75$, com amplitude $G(\omega) _{dB} = -20 \log 0,42\sqrt{1 - 0,21^2} = 7,7 \text{ dB}$	Baixas frequências: assintótica em 0° Altas frequências: assintótica em -180° Conexão linear das assintóticas de $\omega = 7,07 \times 5^{-0.21} = 5,04 \text{ rad/s}$ até $\omega = 7,07 \times 5^{0.21} = 9,91 \text{ rad/s}$



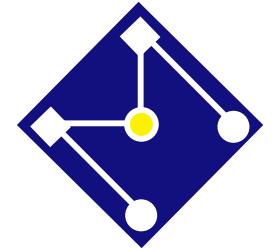




EXEMPLO

- Desenhe o diagrama de Bode para função de transferência abaixo (Ogata, ex. 7.3)

$$G(j\omega) = \frac{10(j\omega + 3)}{(j\omega)(j\omega + 2)[(j\omega)^2 + j\omega + 2]}$$



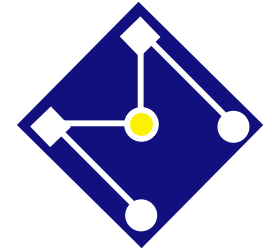
PASSOS 1 E 2

1. Reescreva a função de transferência na forma adequada.

$$G(j\omega) = \frac{7,5 \left(\frac{j\omega}{3} + 1 \right)}{(j\omega) \left(\frac{j\omega}{2} + 1 \right) \left(\frac{(j\omega)^2}{2} + \frac{j\omega}{2} + 1 \right)}$$

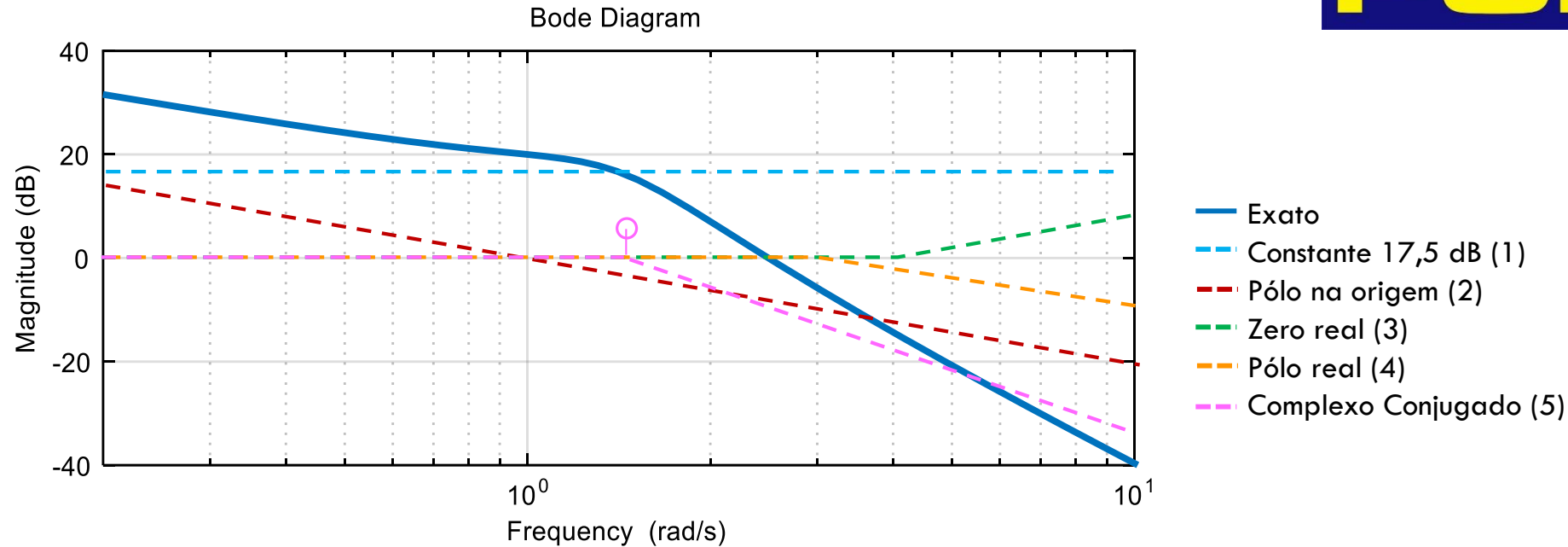
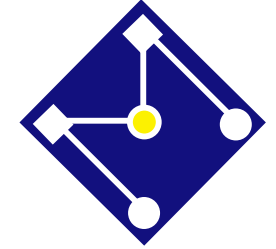
2. Separe a função de transferência em seus fatores básicos.

- Constante $K = 7,5$
- Pólo na origem $(j\omega)^{-1}$
- Zero real $\left(\frac{j\omega}{3} + 1 \right)$ Pólo real $\left(\frac{j\omega}{2} + 1 \right)^{-1}$
- Par de pólos complexos conjugados $\left[1 + \frac{j\omega}{2} + \frac{(j\omega)^2}{2} \right]^{-1}$



PASSO 3

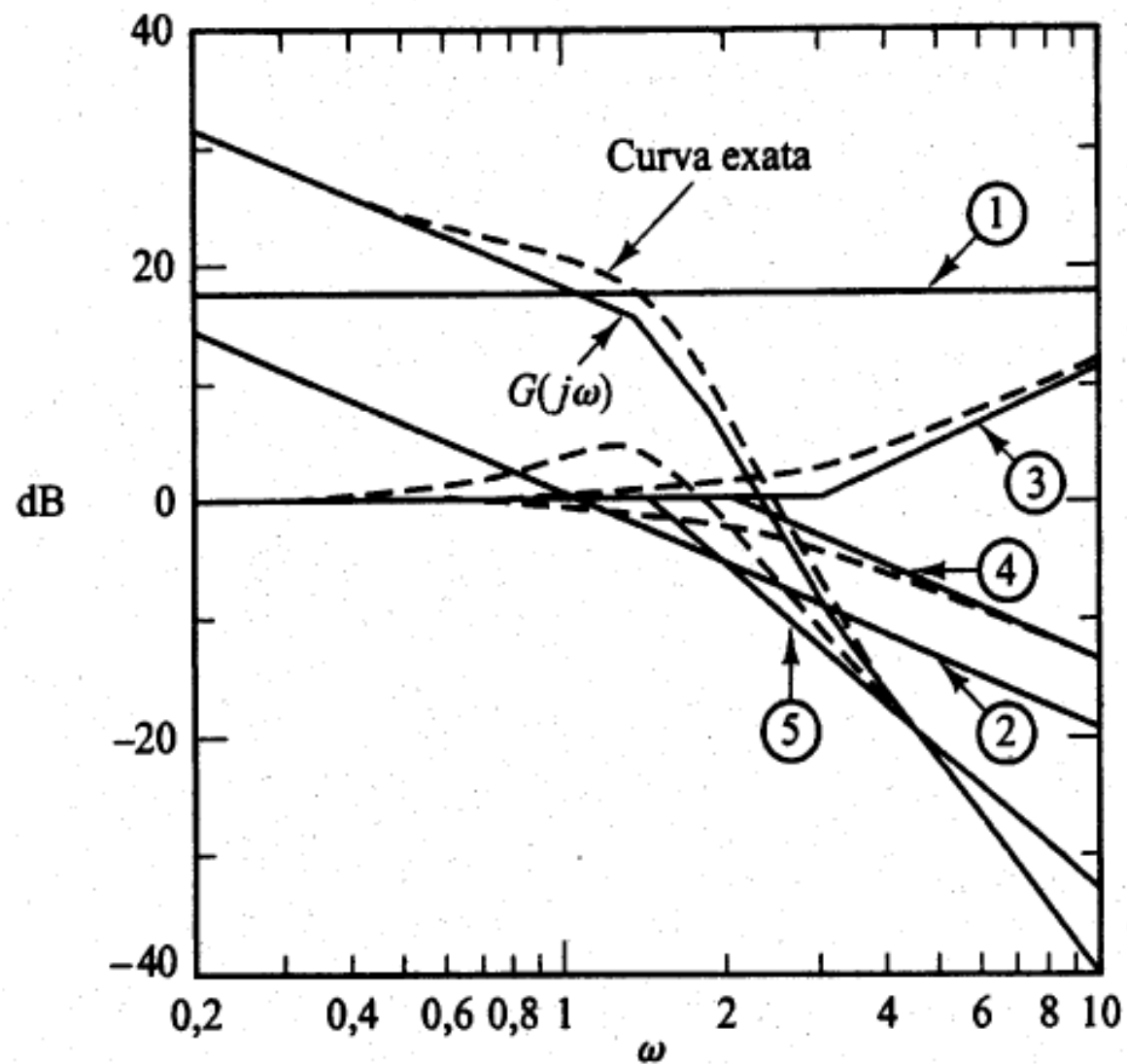
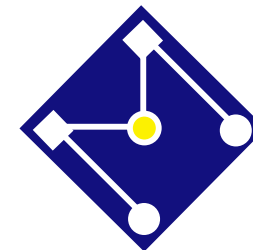
Fator básico	Frequência de canto	Amortecimento
$\left(\frac{j\omega}{3} + 1\right)$	3	
$\left(\frac{j\omega}{2} + 1\right)^{-1}$	2	
$\left[1 + \frac{j\omega}{2} + \frac{(j\omega)^2}{2}\right]^{-1}$	$\sqrt{2}$	0,3536

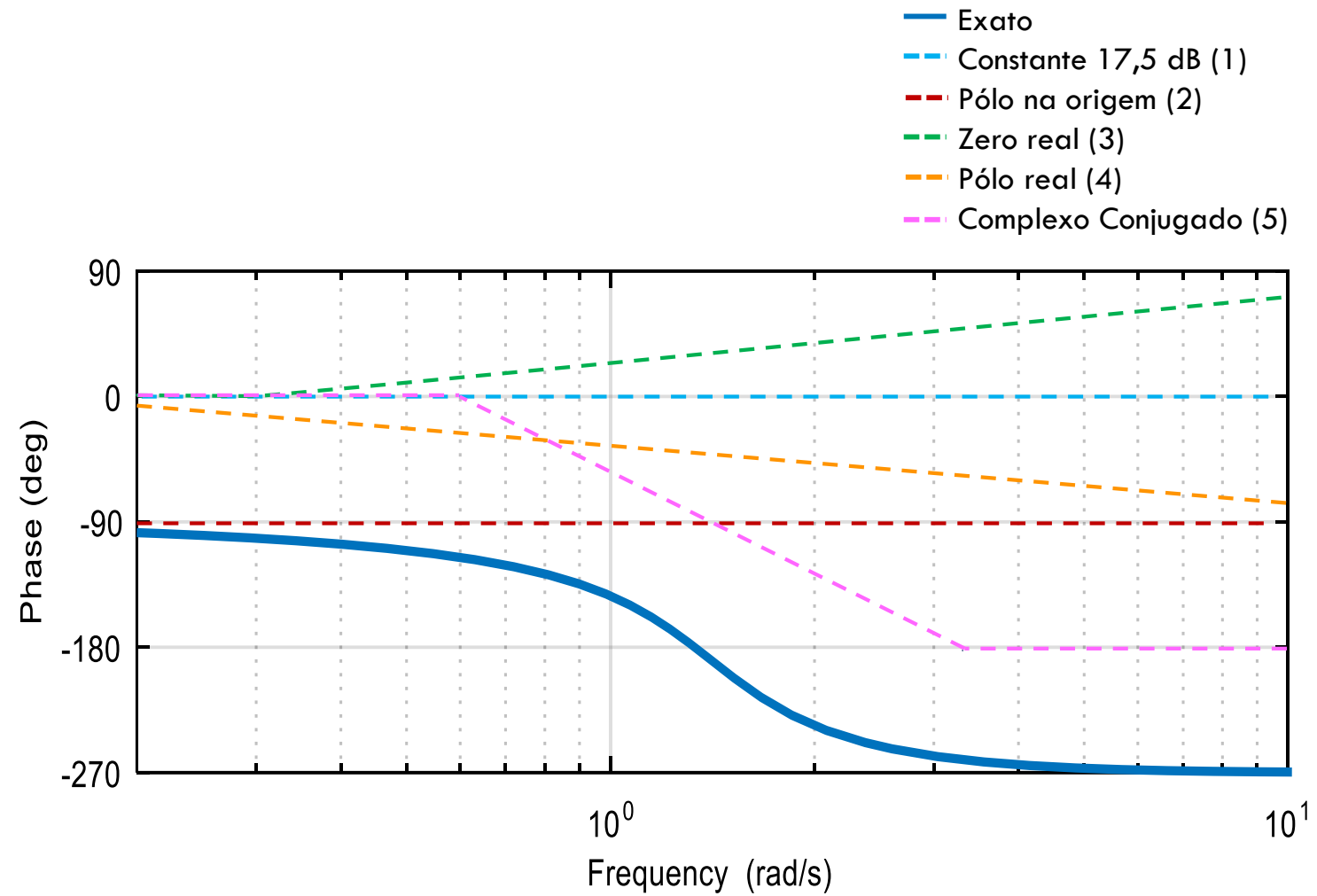
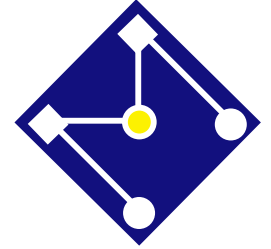


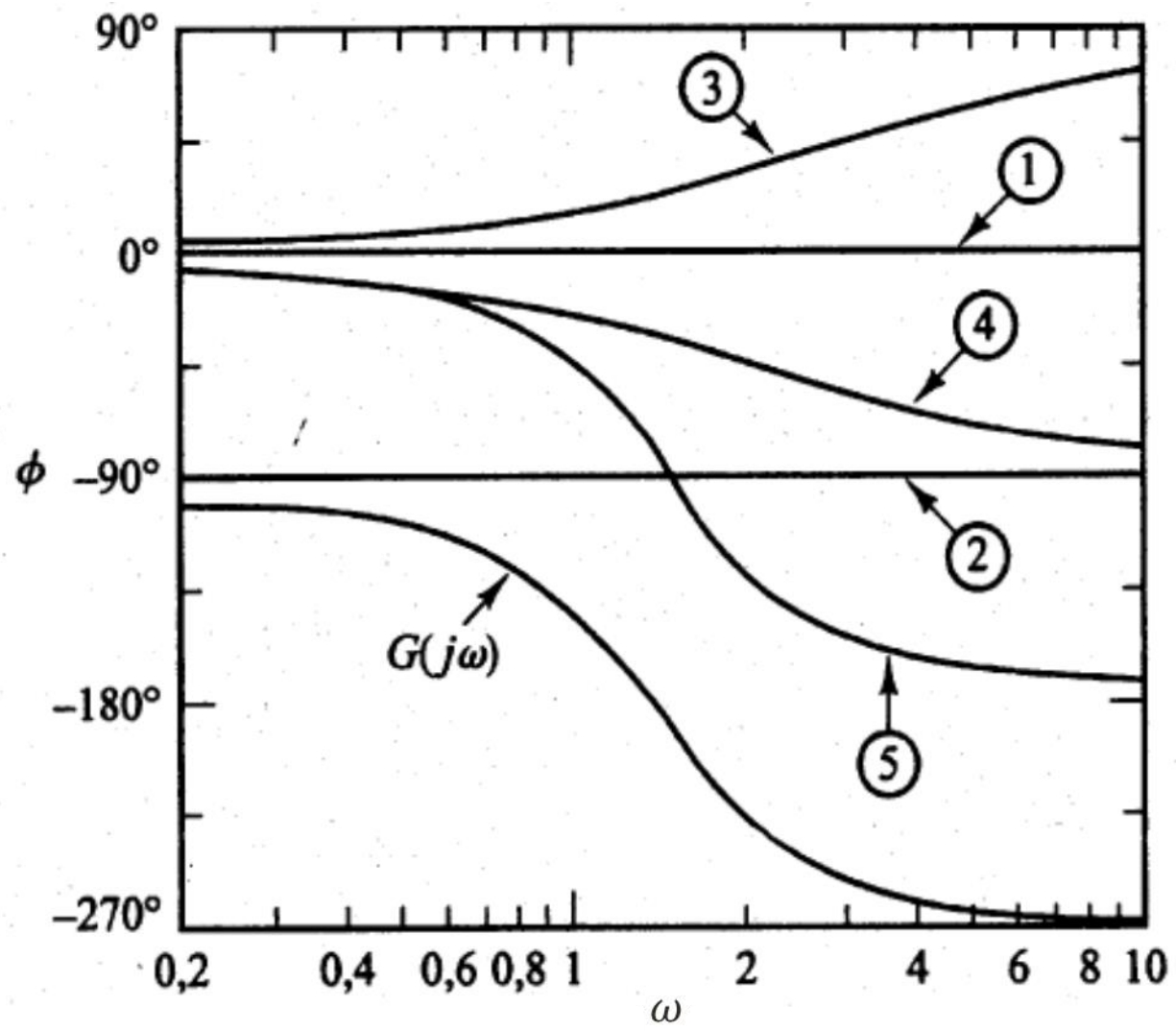
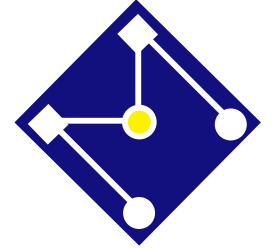
A inclinação da curva é acumulativa:

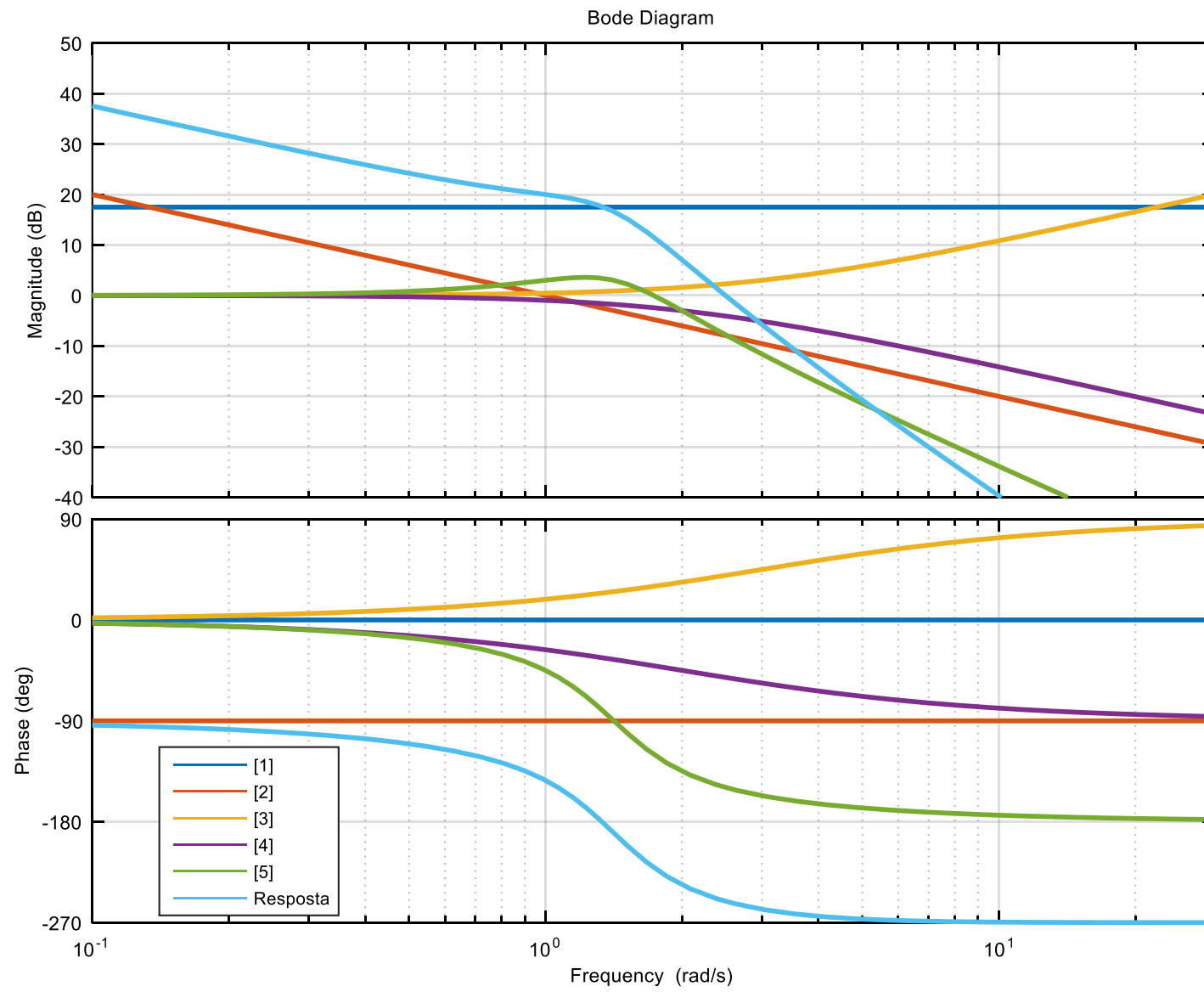
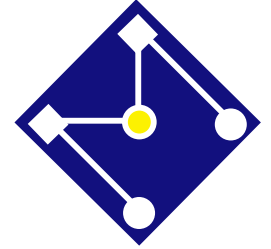
- Abaixo de $\omega_c = \sqrt{2}$, o gráfico tem uma inclinação de -20 dB/década
- Na primeira frequência de canto $\omega_c = \sqrt{2}$, a inclinação de -60 dB/década
- Na segunda frequência de canto $\omega_c = 2$, a inclinação de -80 dB/década
- Na terceira frequência de canto $\omega_c = 3$, a inclinação de -60 dB/década

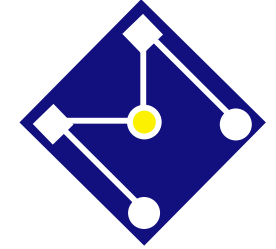
Uma vez que a curva aproximada tenha sido desenhada, a curva real pode ser obtida adicionando-se as correções a cada frequência de canto e às frequências uma oitava abaixo e acima das frequências de canto.











```
% Bode plot
% Funcao Transferencia:  $G(jw) = 10(jw+3)/\{(jw)(jw+2)[(jw)^2+jw+2]\}$ 
clear all; close all; clc

opts = bodeoptions;
opts.YLim = {[-40,50];[-270,90]};
opts.YLimMode = {'manual';'manual'};
opts.Xlim = {[0.1,30]};
opts.XLimMode = {'manual'};
opts.Grid='on'

figure;
    % [1] constante
    H=tf([7.5],[1])
    bode(H,opts)
    hold on

    %
    % [2] polo na origem
    H=tf([1],[1 0]);
    bode(H,opts)
    hold on

    %
    % [3] zero real tau=1/3
    H=tf([1/3 1],[1]);
    bode(H,opts)
    hold on

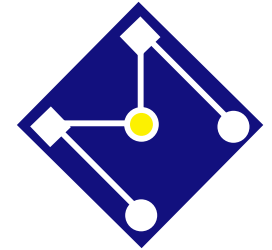
    % [4] polo real tau=1/2
    H=tf([1],[1/2 1]);
    bode(H,opts)
    hold on

    % [5] polos complexos conjugados wn=7.07 e
    zeta=0.3536
    H=tf([1],[1/2 1/2 1]);
    bode(H,opts)
    hold on

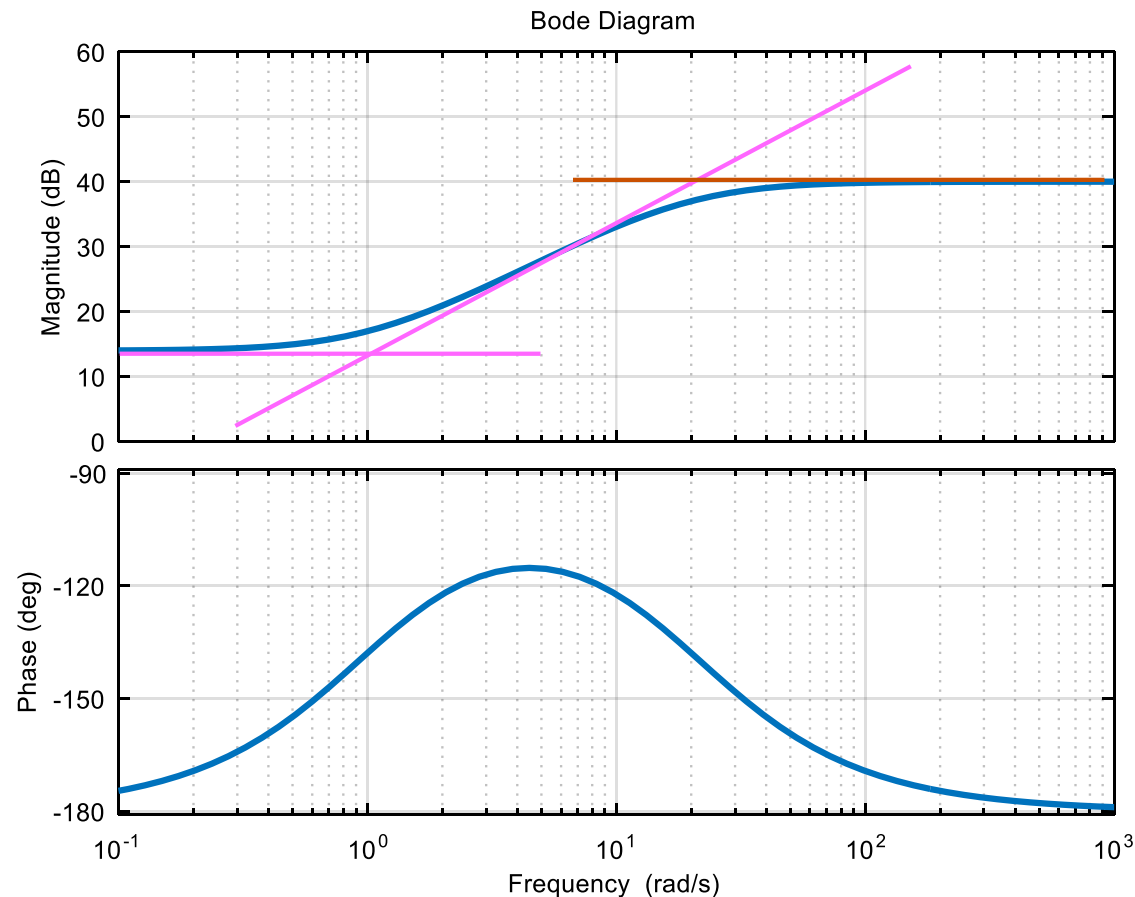
    % total
    H=tf([1],[1/50 3/50 1]);
    bode(H,opts)
    hold on

legend('[1]','[2]','[3]','[4]','[5]','Resposta')

h = findobj(gcf,'type','line');
set(h,'linewidth',2);
```



VAMOS FAZER O EXERCÍCIO INVERSO



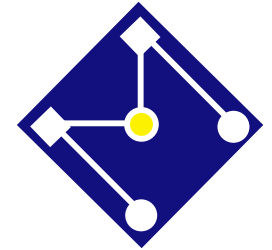
$$\begin{cases} |K|_{dB} = 14 \text{ dB} \\ \angle K = -180^\circ \end{cases} \rightarrow K = -5$$

1 zero em $s = -1$

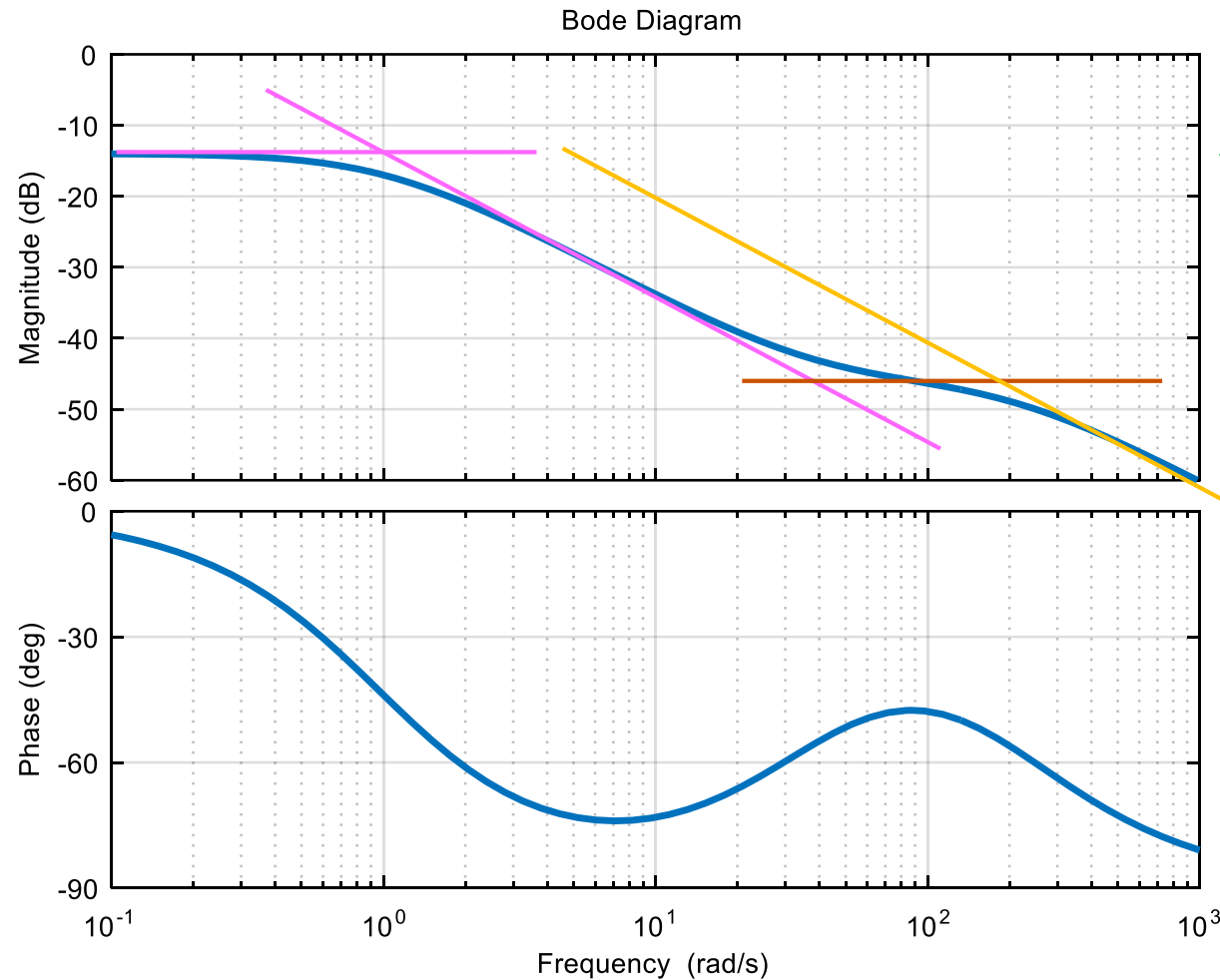
1 pólo em $s = -20$

$$G(s) = -5 \frac{s+1}{1} \frac{20}{s+20}$$

$$G(s) = -100 \frac{s+1}{s+20}$$



OUTRO UM POUCO PIOR...



$$\begin{cases} |K|_{dB} = -14 \text{ dB} \\ \angle K = 0^\circ \end{cases} \rightarrow K = 0,2$$

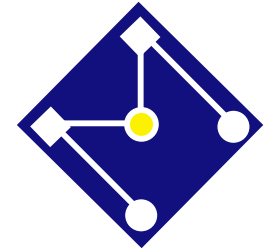
1 pólo em $s = -1$

1 zero em $s = -40$

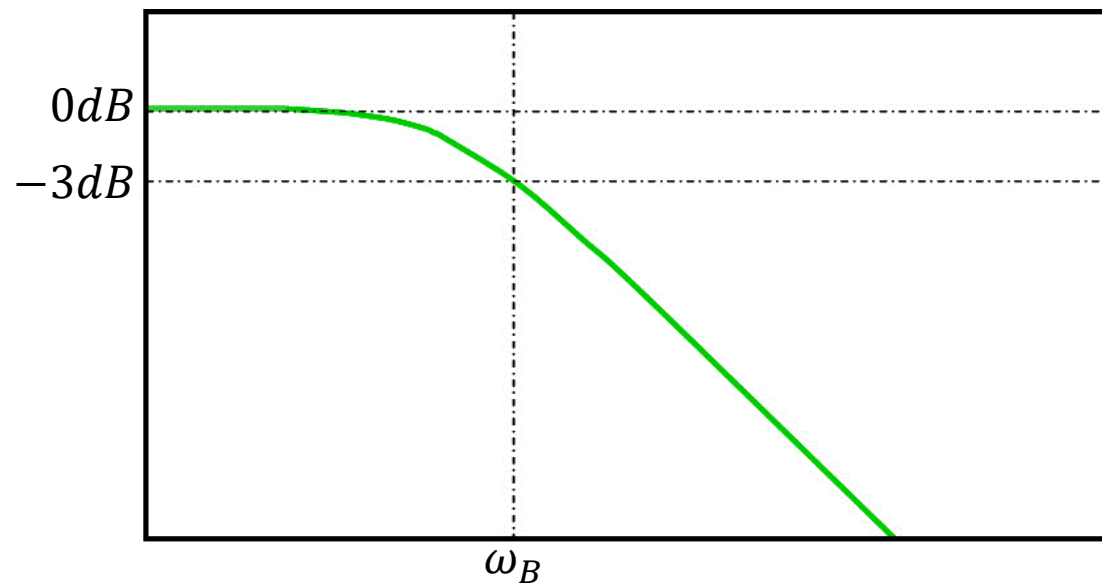
1 pólo em $s = -200$

$$G(s) = 0,2 \frac{1}{s+1} \frac{s+40}{40} \frac{200}{s+200}$$

$$G(s) = \frac{s+40}{(s+1)(s+200)}$$

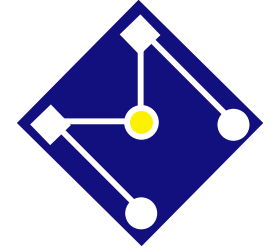


LARGURA DE BANDA E FREQUÊNCIA DE CORTE



A frequência de corte (ou de canto ou de largura de banda) ω_B é definida como aquela a partir da qual o ganho cai abaixo de 3dB com relação ao ganho de baixas frequências.

- A região de frequências $0 \leq \omega \leq \omega_B$ é denominada **largura de banda** (ou largura de faixa, ou ainda, banda passante).

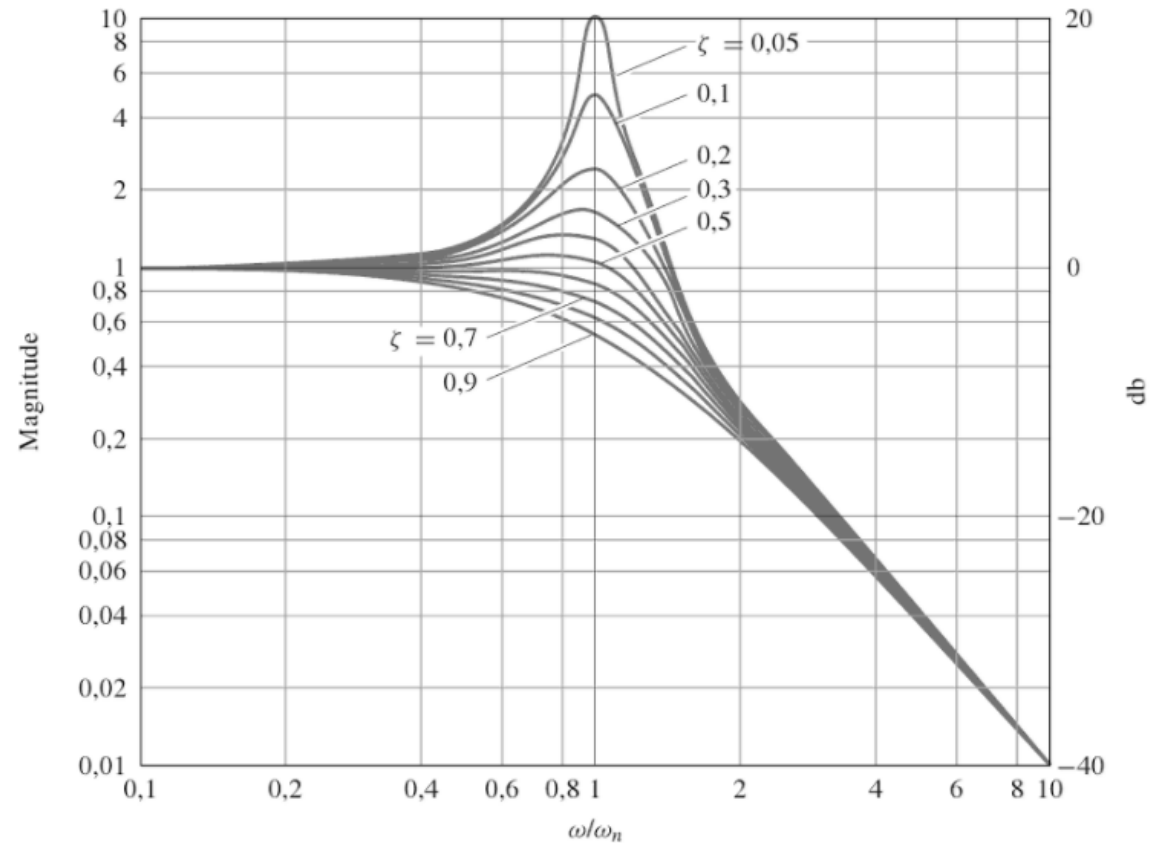


LARGURA DE BANDA

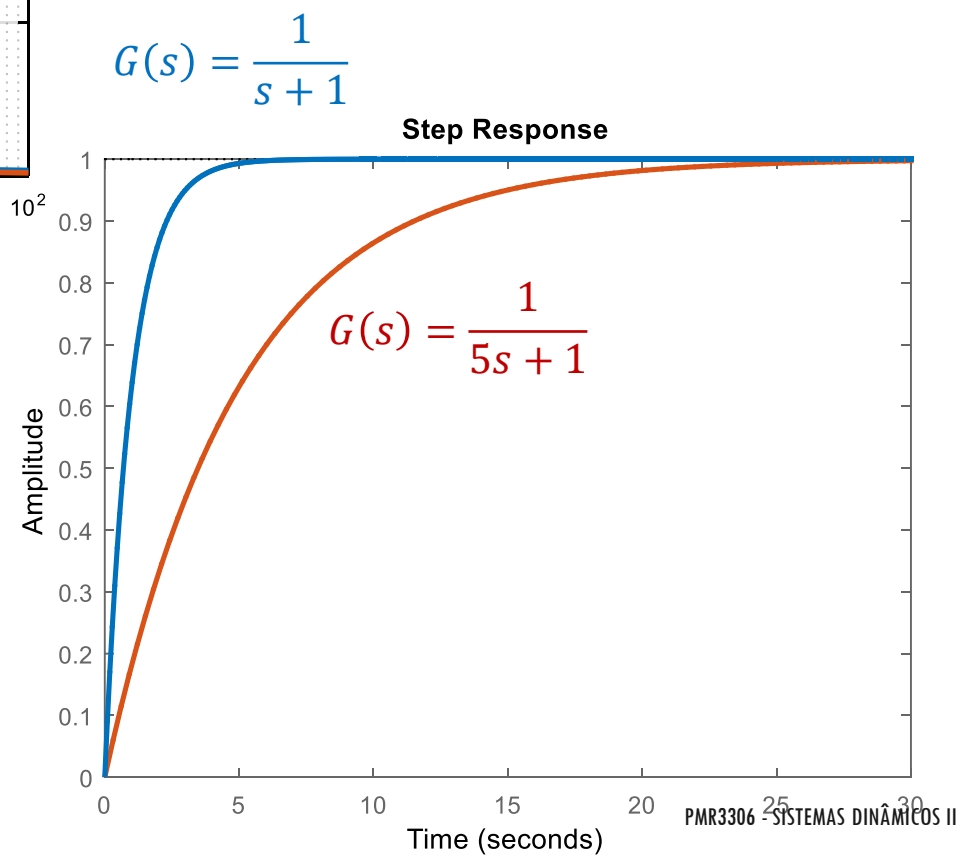
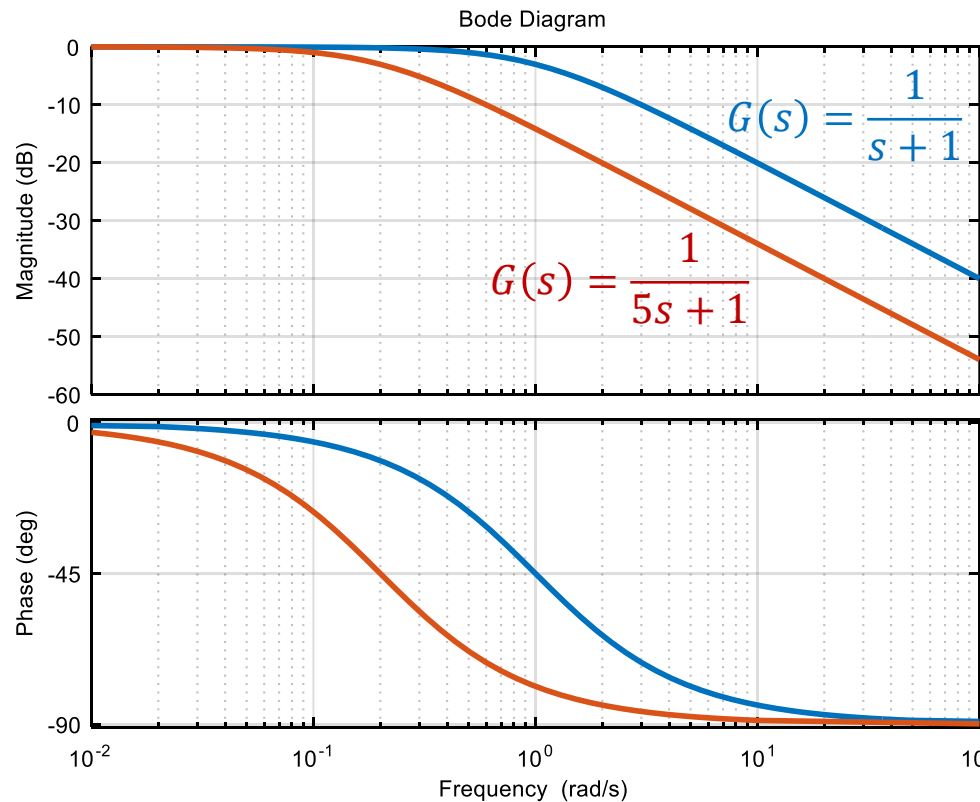
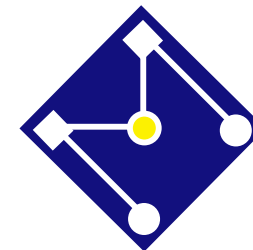
A **largura de banda** indica como um sistema vai seguir um sinal senoidal. É, portanto, uma boa medida do intervalo de fidelidade da resposta do sistema.

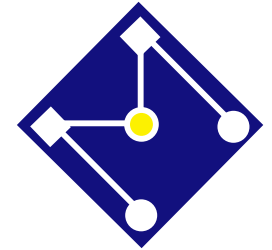
Outra característica importante é que ela é proporcional à velocidade de resposta:

- **Largura de banda** grande corresponde a um pequeno tempo de subida.
- A **largura de banda** decresce com o aumento de ζ .



$$\omega_B = \omega_n \sqrt{(1 - 2\zeta^2) + \sqrt{\zeta^4 - 4\zeta^4 + 2}}$$

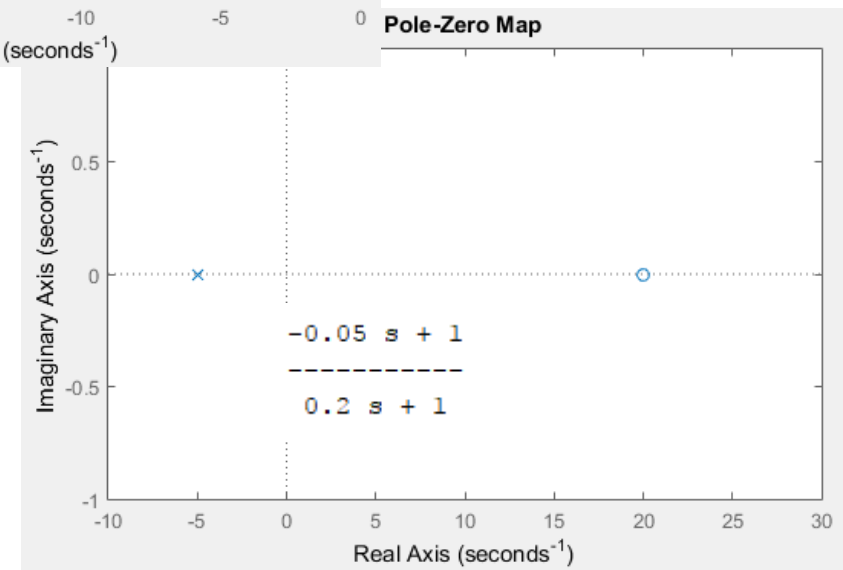
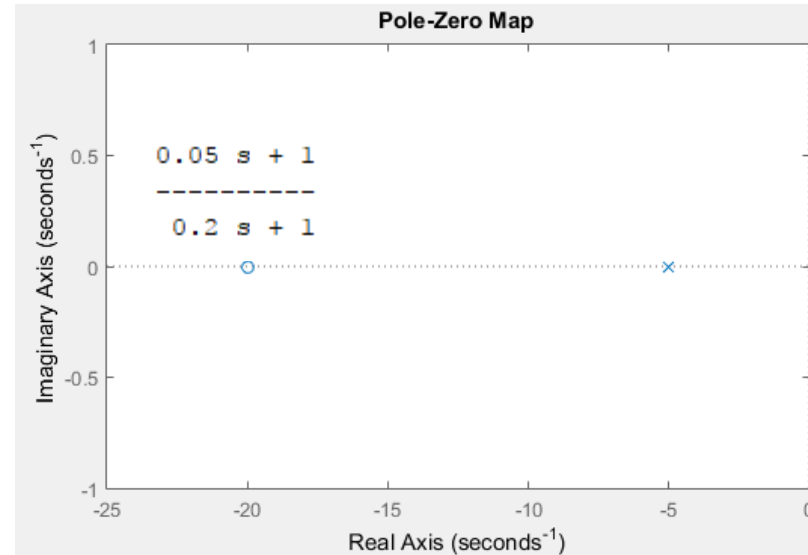


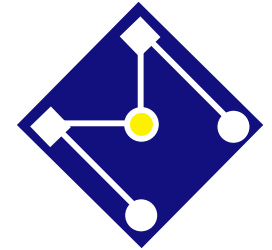


SISTEMAS DE FASE MINIMA E DE FASE NÃO MÍNIMA

- Os sistemas que não possuem polos nem zeros no semiplano direito do plano s são chamados **de sistemas de fase mínima**.
- Se uma função de transferência zeros no semiplano direito, esse é um **sistema de fase não mínima**.

Segundo alguns autores, sistema de fase não-mínima não é caracterizado apenas por zeros no semi-plano direito, mas também por polos instáveis...



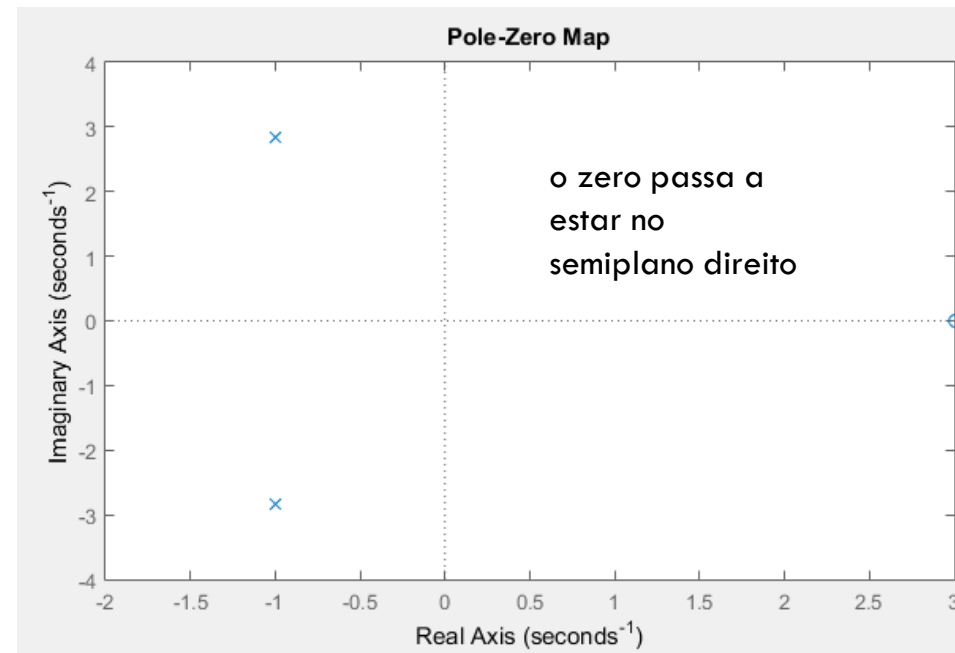


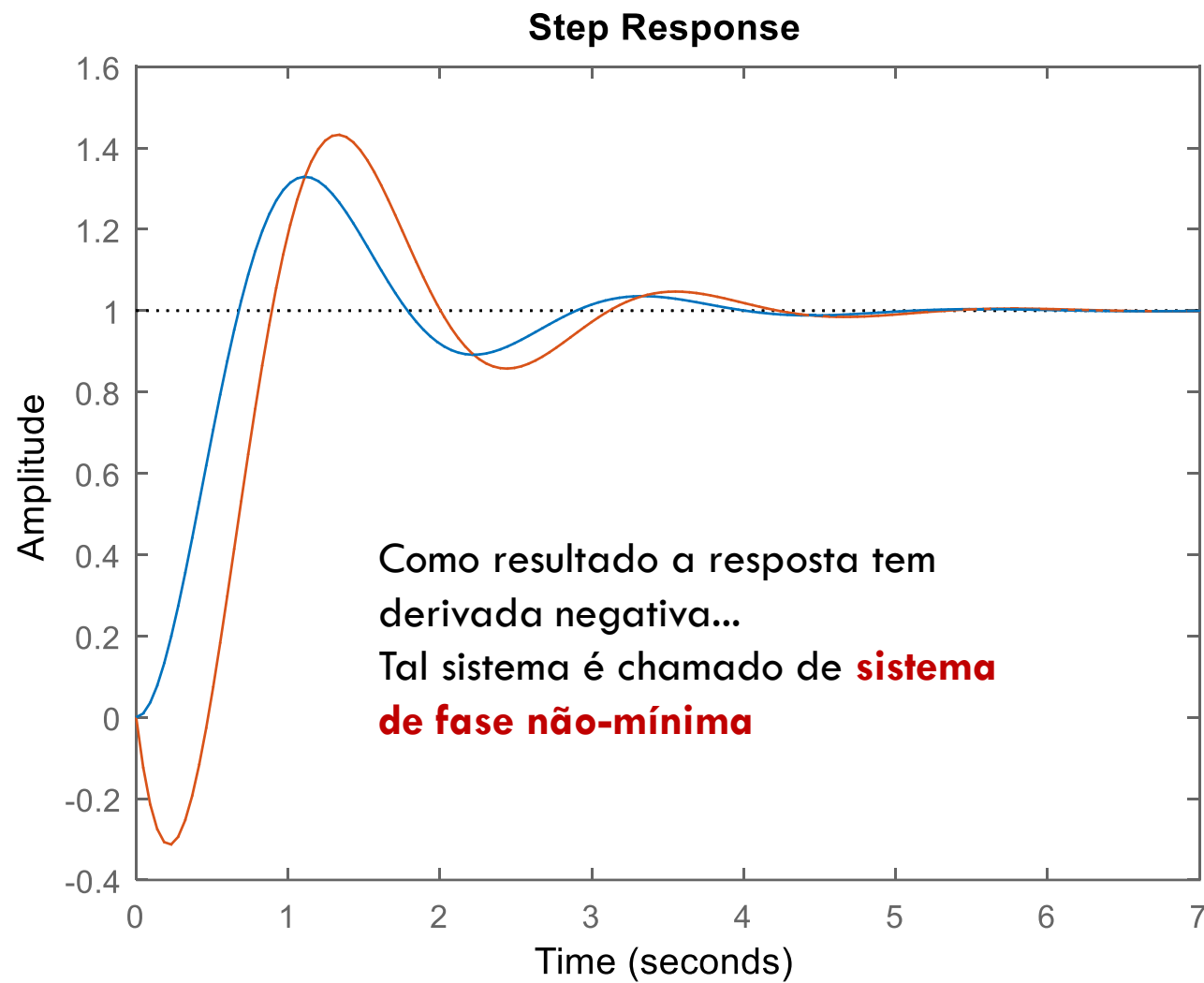
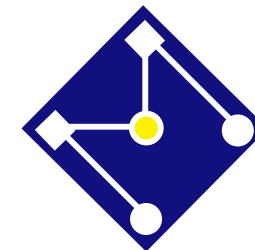
SISTEMA DE FASE NÃO-MÍNIMA

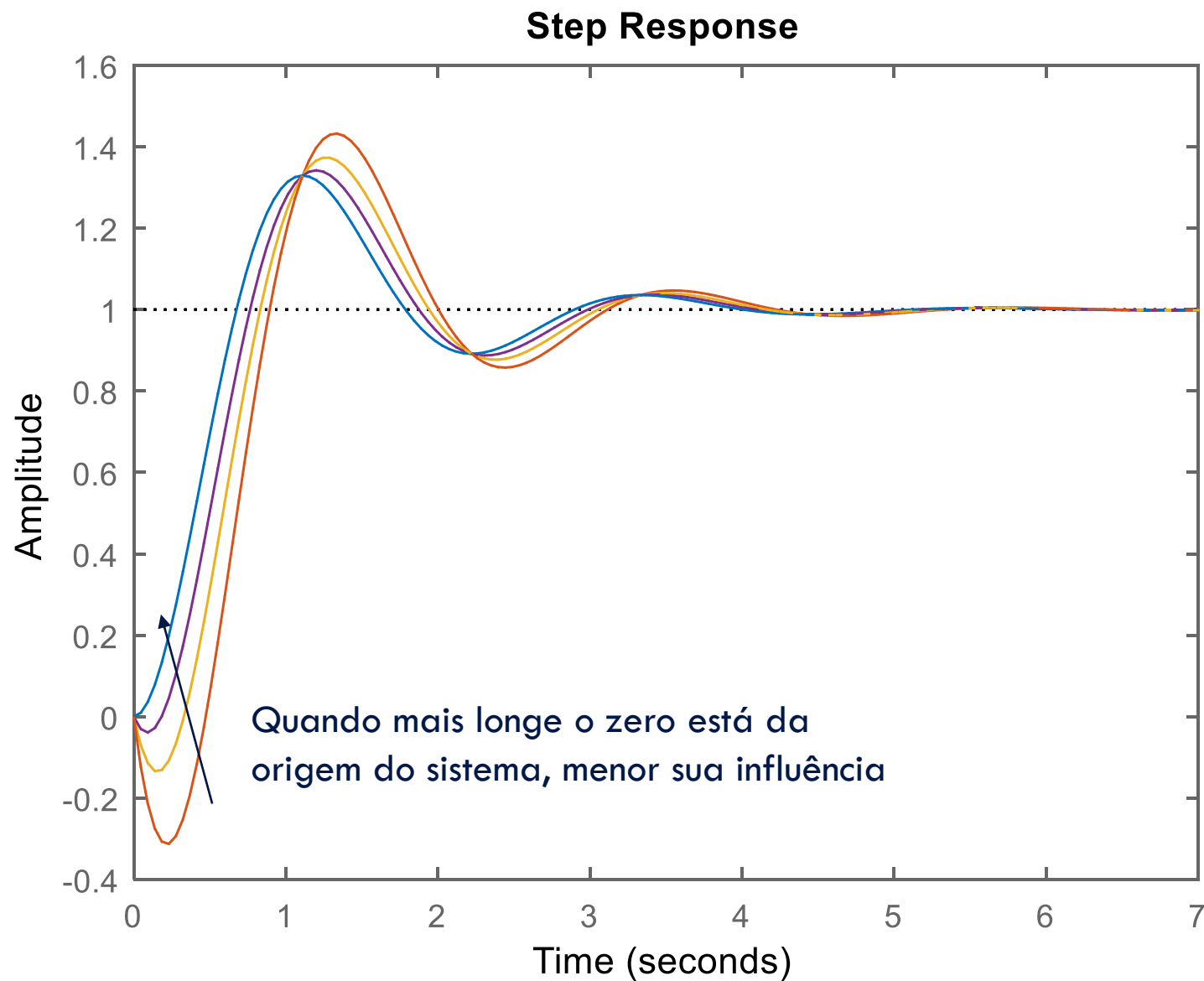
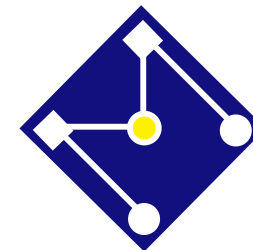
- O que acontece, por exemplo, se o sistema possui um zero negativo?

```
num=[-1 3]*9/3;
den=[1 2 9];
sys=tf(num,den)
printsys(num,den)
[z,p,k]=tf2zp(num,den)
ltiview('pzmap',sys);
```

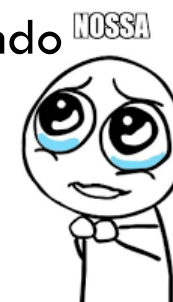
$$\frac{-3s + 9}{s^2 + 2s + 9}$$

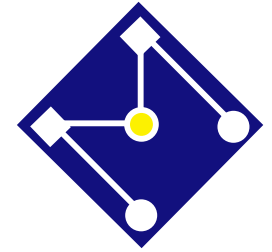






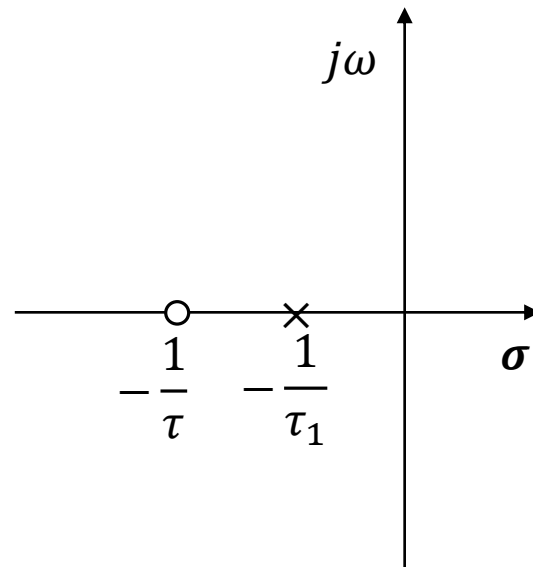
Se um carro é um **sistema de fase não-mínima**, ele vai primeiro virar um pouco para a esquerda quando receber o comando para virar à direita



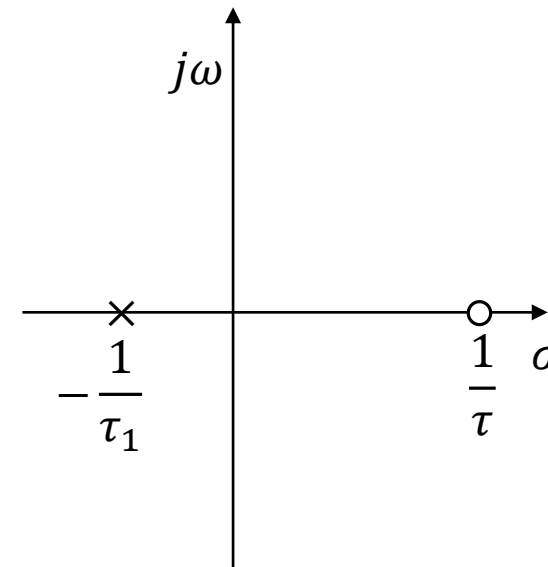


SISTEMAS DE FASE MÍNIMA E NÃO MÍNIMA

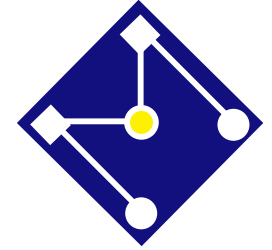
$$G_1(j\omega) = \frac{1 + j\omega\tau}{1 + j\omega\tau_1} \quad G_2(j\omega) = \frac{1 - j\omega\tau}{1 + j\omega\tau_1} \quad 0 < \tau < \tau_1$$



$$G_1(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \tau_1 s}$$



$$G_2(s) = \frac{1 - \tau s}{1 + \tau_1 s}$$



SISTEMAS DE FASE MÍNIMA E NÃO MÍNIMA

$$G_1(j\omega) = \frac{1 + j\omega\tau}{1 + j\omega\tau_1}$$

$$G_2(j\omega) = \frac{1 - j\omega\tau}{1 + j\omega\tau_1}$$

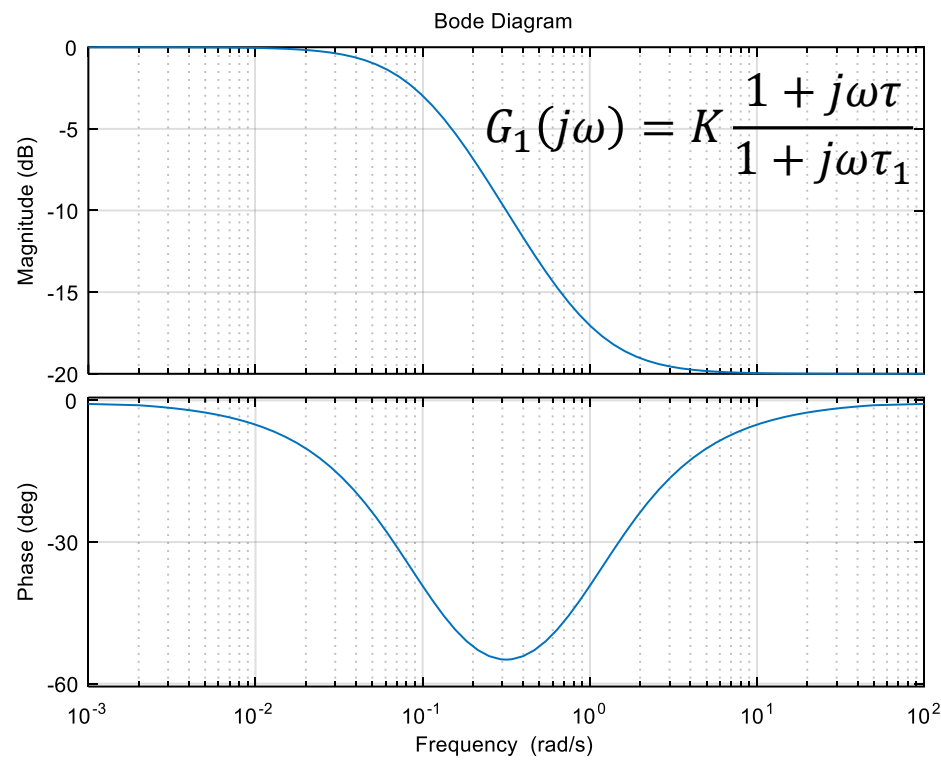
Os dois sistemas
diferem entre si
pelo fator:

$$G(j\omega) = \frac{G_2(j\omega)}{G_1(j\omega)} = \frac{1 - j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{|G_2(j\omega)|}{|G_1(j\omega)|} = 1$$

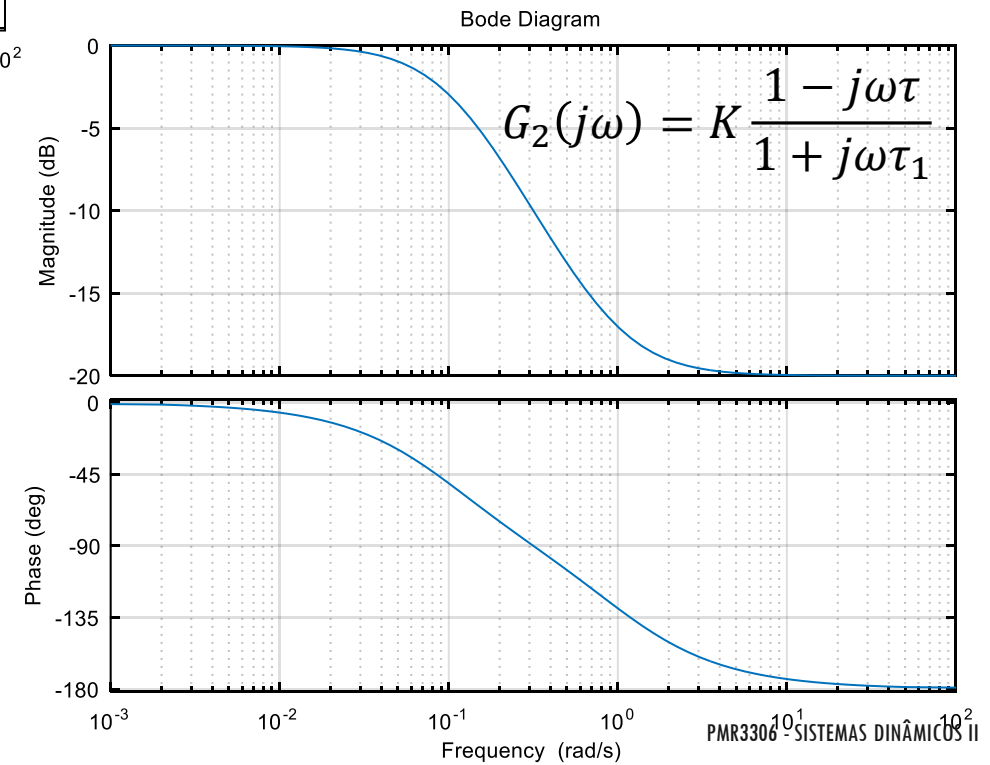
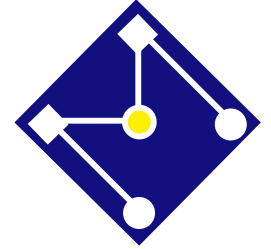
$$\begin{aligned}\angle G(j\omega) &= -\text{atan } \omega\tau + \text{atan}(-\omega\tau) \\ &= -2 \text{atan } \omega\tau\end{aligned}$$

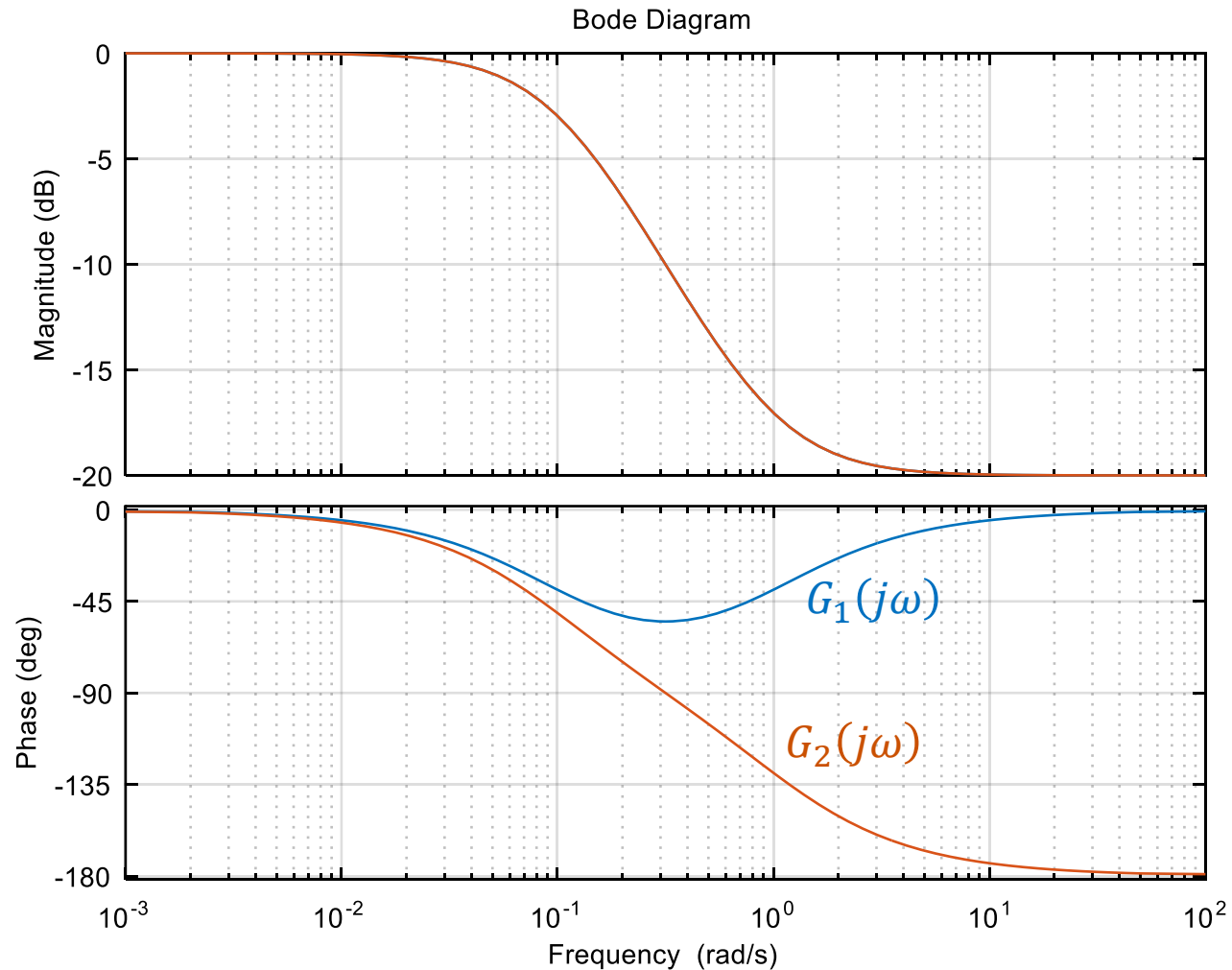
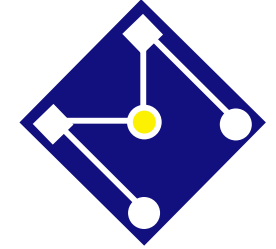
O modulo é sempre unidade. O ângulo de fase, no entanto, varia de 0° a 180°, à medida que ω varia de 0 a infinito.



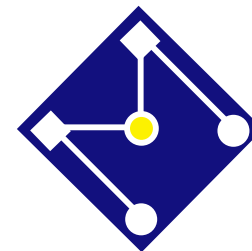
$$\tau_1 = 10$$

$$\tau = 1$$





Os valores dos ângulos de fase são menores para o sistema de fase mínima $G_1(j\omega)$ para todas as frequências

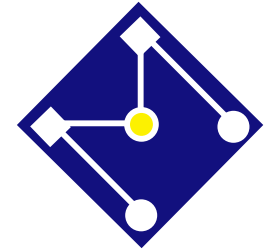


SISTEMAS DE FASE MÍNIMA E NÃO MÍNIMA

Para sistemas de fase mínima, as características de módulo e de ângulo de fase estão relacionadas univocamente.

Se a curva de módulo de um sistema for especificada para toda a gama de valores de frequência de zero a infinito, a curva de ângulo de fase será determinada de forma única e vice-versa

Isto não ocorre para sistemas de fase não-mínima.



SISTEMAS DE FASE MÍNIMA E NÃO MÍNIMA

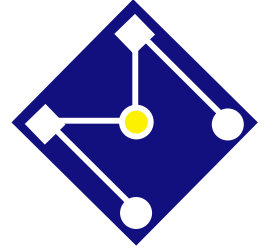
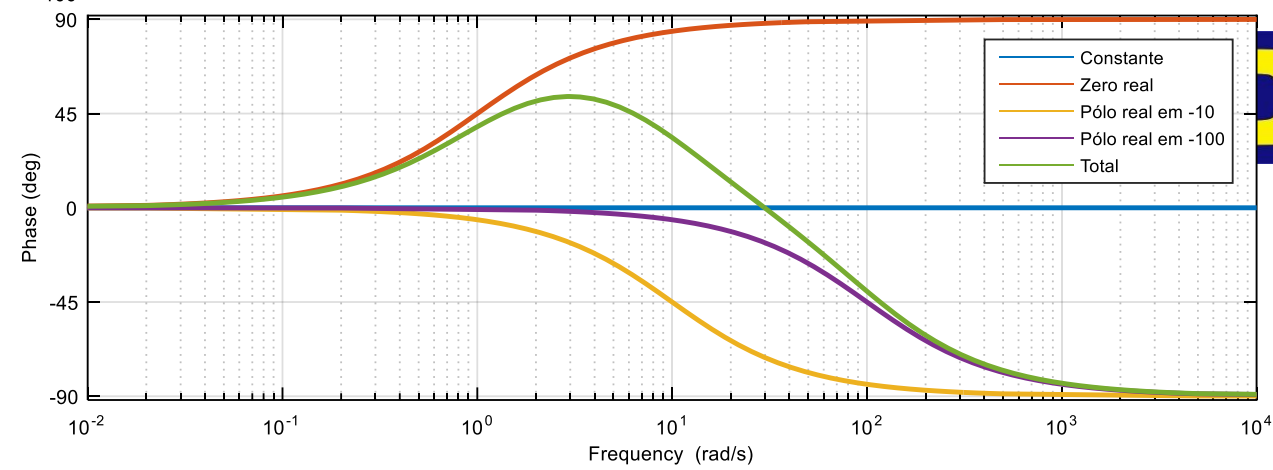
Para sistemas de fase mínima:

O ângulo de fase em $\omega \rightarrow \infty$ tende a $-90^0(p - q)$, onde p e q são os graus dos polinômios do numerador e do denominador da função de transferência, respectivamente.

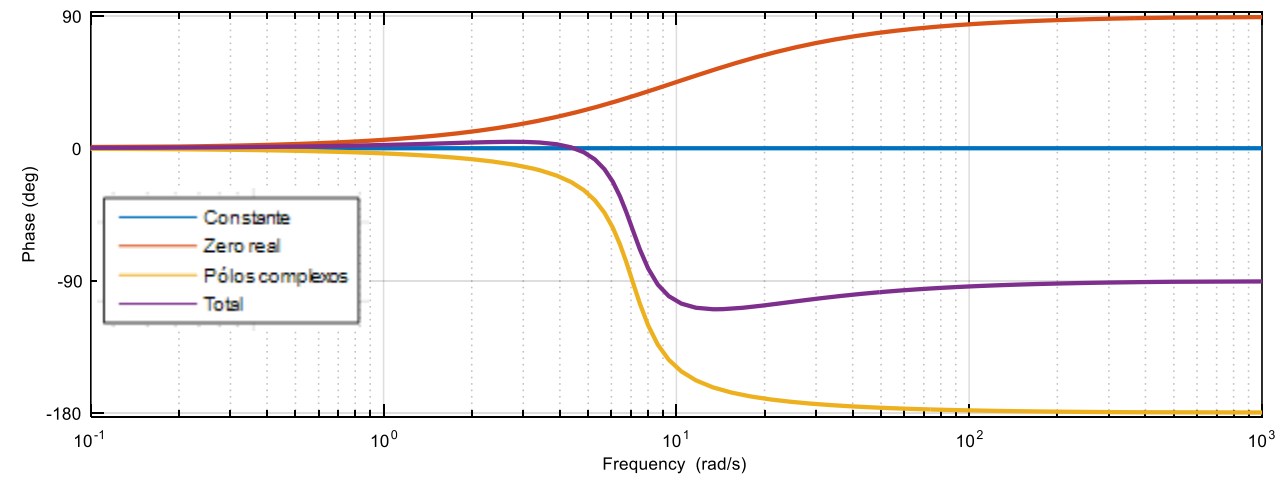
Em qualquer dos dois sistemas:

A inclinação da curva de módulo em dB em $\omega \rightarrow \infty$ tende a $-20^0(p - q)/\text{década}$.

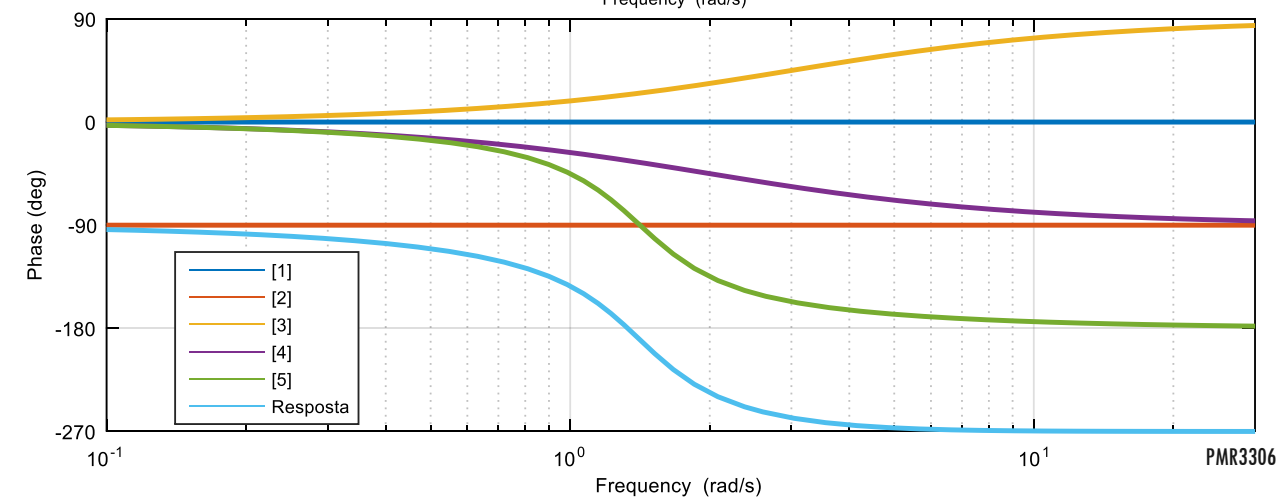
- $H(s) = 100 \frac{s+1}{s^2+110s+1000}$

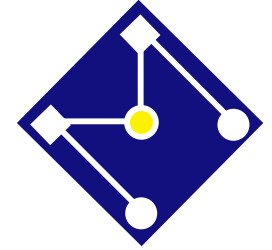


- $H(s) = 30 \frac{s+10}{s^2+3s+50}$



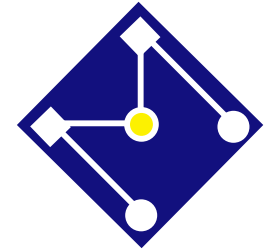
- $G(j\omega) = \frac{10(j\omega+3)}{(j\omega)(j\omega+2)[(j\omega)^2+j\omega+2]}$





RETARDO NO TRANSPORTE

- Tem comportamento de fase não-mínima e apresenta atraso excessivo, sem atenuação nas altas frequências.
- Esses retardos de transporte normalmente ocorrem nos sistemas térmicos, hidráulicos e pneumáticos.



RETARDO NO TRANSPORTE

$$G(j\omega) = e^{-j\omega T}$$

O módulo é sempre igual à unidade,

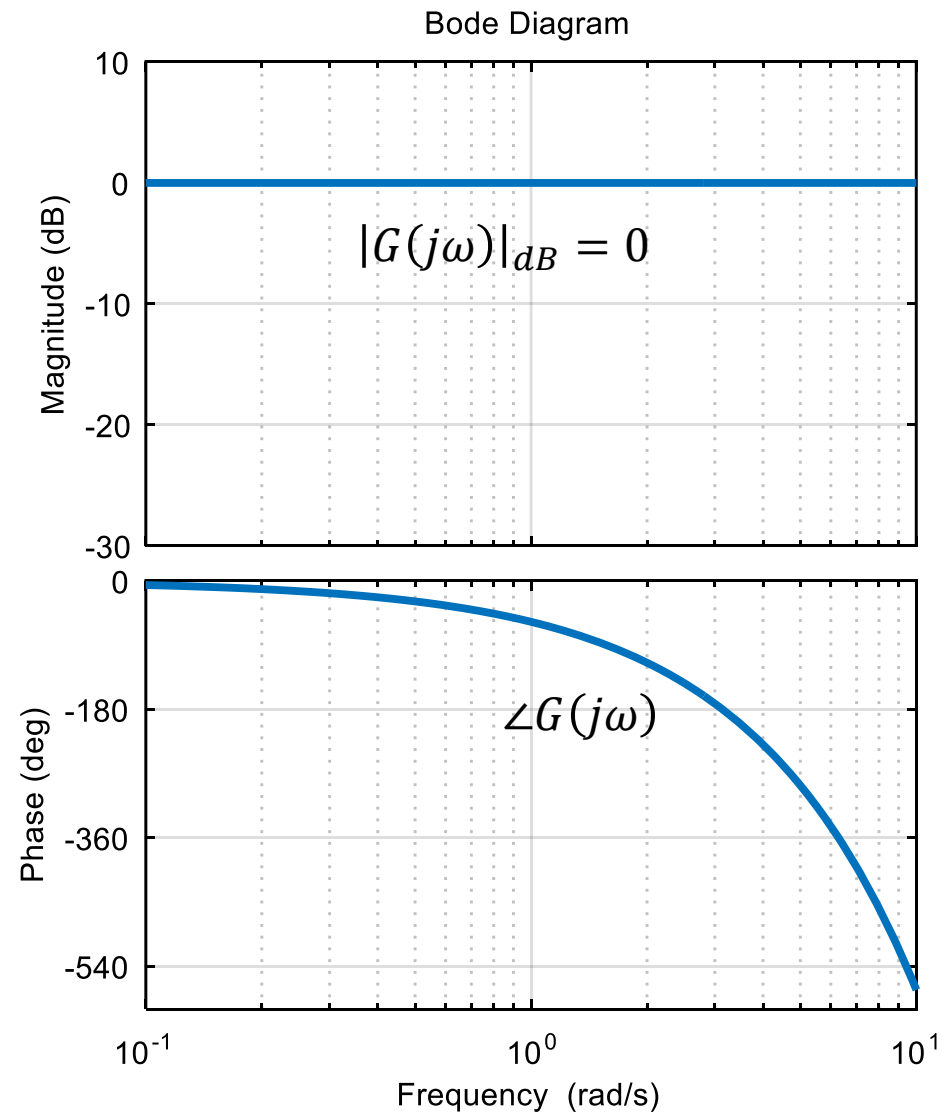
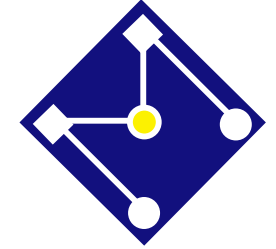
$$|G(j\omega)| = |\cos \omega T - j \sin \omega T| = 1$$

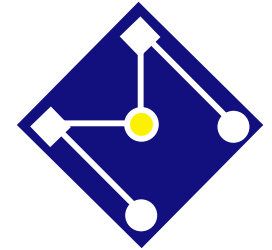
Portanto, o módulo em dB do retardo de transporte $e^{-j\omega T}$ é $|G(j\omega)|_{dB} = 0$ dB.

O ângulo de fase é

$$\angle G(j\omega) = -\omega T \text{ (radianos)}$$

$$\angle G(j\omega) = -\frac{180}{\pi} \omega T \text{ (graus)}$$

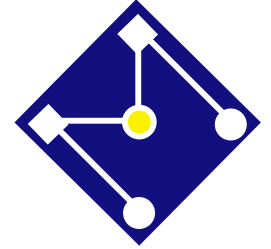




EXEMPLO

Construa o diagrama de Bode da seguinte função de transferência

$$G(j\omega) = \frac{e^{-j\omega L}}{1 + j\omega T}$$



O módulo em dB

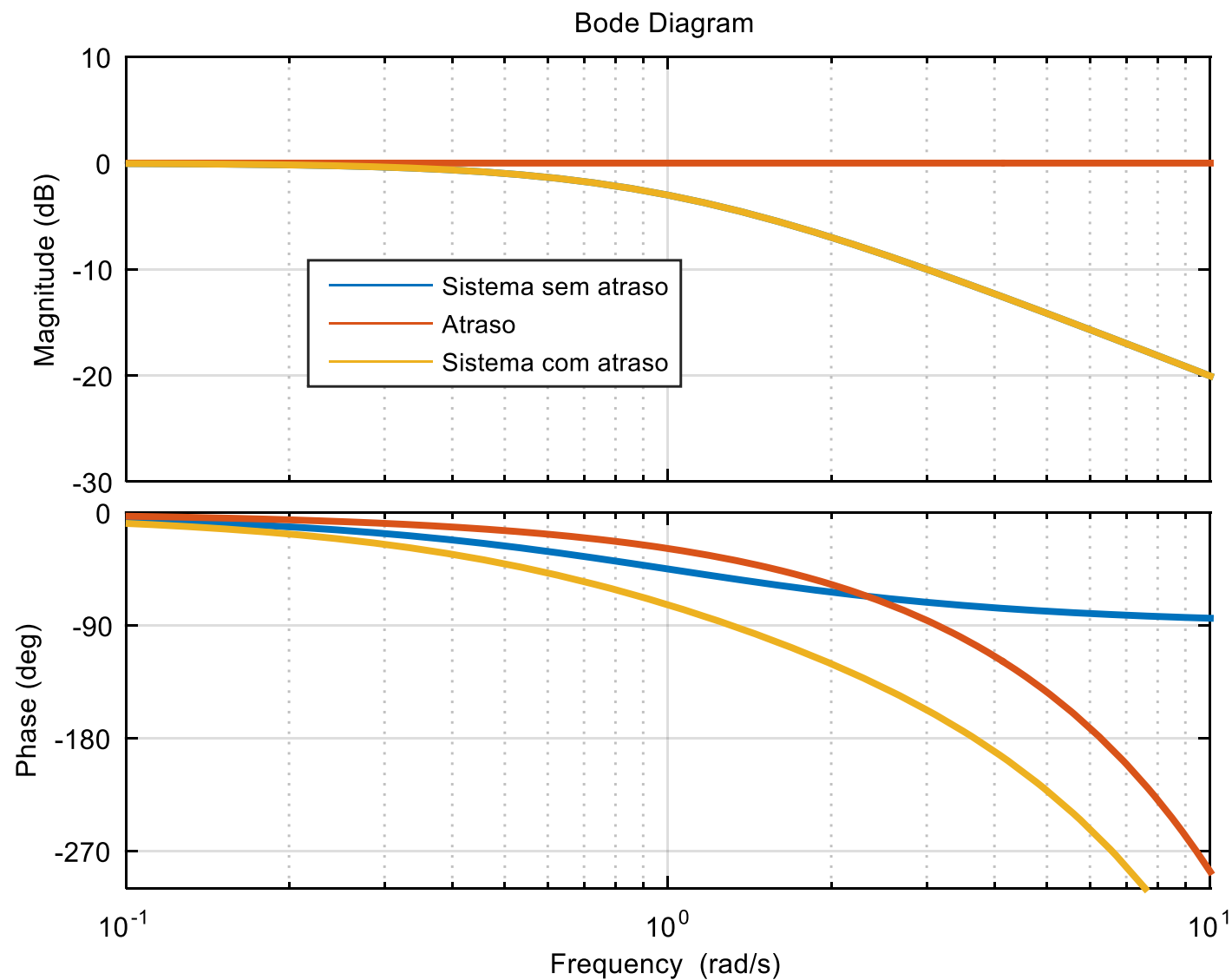
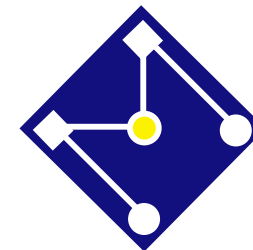
$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log|e^{-j\omega L}| - 20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right|$$

$$= 0 - 20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right|$$

O ângulo de fase é

$$\angle G(j\omega) = -\omega L - \text{atan } \omega T$$

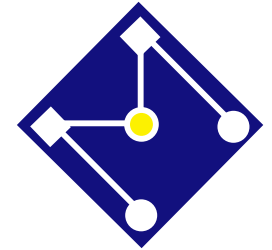
Portanto, basta combinar o efeito do retardo,
ie, um decréscimo em fase...



$$G(j\omega) = \frac{e^{-j\omega L}}{1 + j\omega T}$$

$$L = 0,5$$

$$T = 1$$



COMO FAZER NO MATLAB?

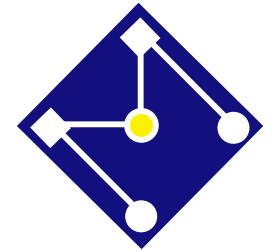
```
close all; clear all; clc

opts = bodeoptions;
opts.PhaseMatching='on'
opts.YLim = {[ -30,10];[ -300,0]};
opts.YLimMode = {'manual';'manual'};
opts.Xlim = {[0.1,10]};
opts.XLimMode = {'manual'};

opts.Grid='on'
sys1=tf(1,[1 1])           % sys1 = 1/(1s + 1) - sem retardo
sys3=tf(1,1,'iodelay',0.5) % retardo de 0.5s
sys2=tf(1,[1 1],'iodelay',0.5) % sys2 = exp(-0.5s) * h - "h" com retardo
bode(sys1,opts); hold on
bode(sys3,opts); hold on
bode(sys2,opts); hold on

legend('Sistema sem atraso','Atraso','Sistema com atraso')

h = findobj(gcf,'type','line');
set(h,'linewidth',2);
```



CONSTRUÇÃO DO DIAGRAMA DE BODE COM O MATLAB

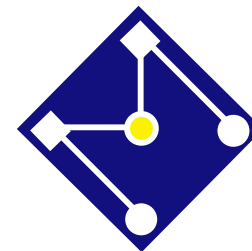
- Os comandos bode utilizados com
- maior frequência são,

```
bode(num,den)  
bode(num,den,w)  
bode(A,B,C,D)  
bode(A,B,C,D,w)  
bode(sys)
```

- Quando for executado
 - com argumentos do
 - lado esquerdo, como

```
[mag,phase,w] = bode(num,den)  
[mag,phase,w] = bode(num,den,w)  
[mag,phase,w] = bode(A,B,C,D)  
[mag,phase,w] = bode(A,B,C,D,w)  
[mag,phase,w] = bode(A,B,C,D,iu,w)  
[mag,phase,w] = bode(sys)
```

Resposta em frequência do sistema.
O módulo pode ser convertido para
decibéis por nossa conhecida fórmula,
 $magdB = 20 \log_{10}(mag)$



CONSTRUÇÃO DO DIAGRAMA DE BODE COM O MATLAB

- Para especificar faixa de frequência,

- `logspaced(d1, d2)`

Gera um vetor de 50 pontos igualmente espaçados em uma escala logarítmica entre as décadas 10^{d1} e 10^{d2}

Ex.: 50 pontos entre 0,1 e 100 rad/s:

`w=logspaced(-1, 2)`

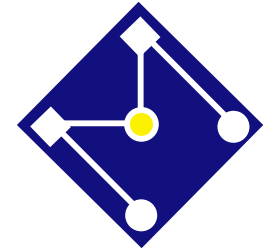
- ou

- `logspaced(d1, d2, n)`

Gera um vetor de n pontos igualmente espaçados em uma escala logarítmica entre as décadas 10^{d1} e 10^{d2}

Ex.: 200 pontos entre 1 e 1000 rad/s:

`w=logspaced(0, 3, 200)`

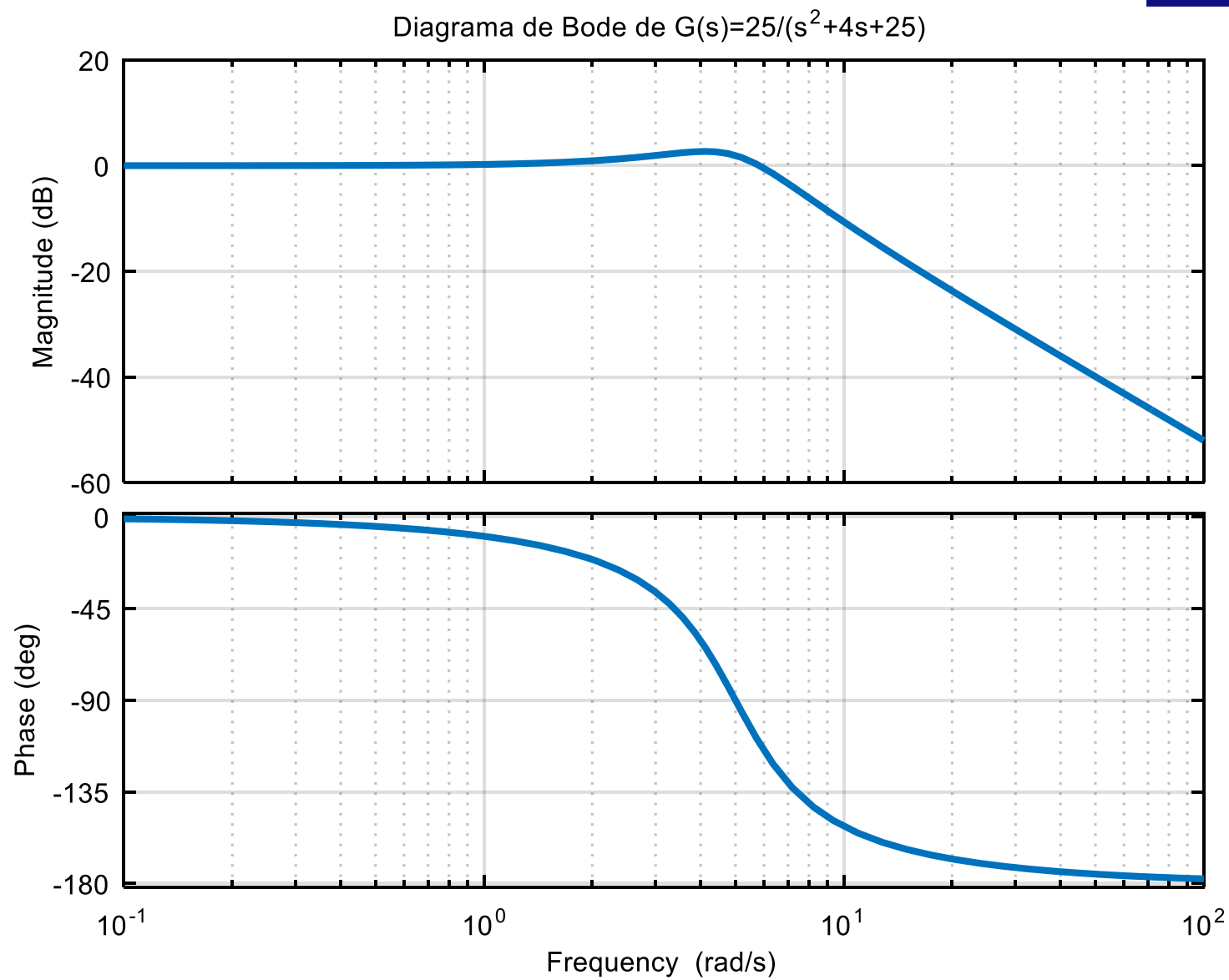
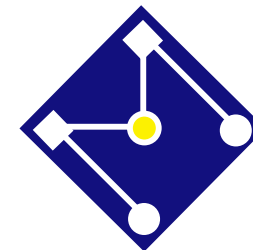


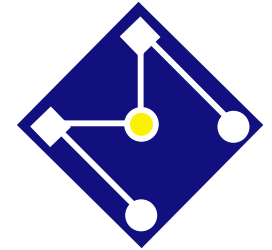
EXEMPLO

Construa o diagrama de Bode para a função de transferência,

$$G(s) = \frac{25}{s^2 + 4s + 25}$$

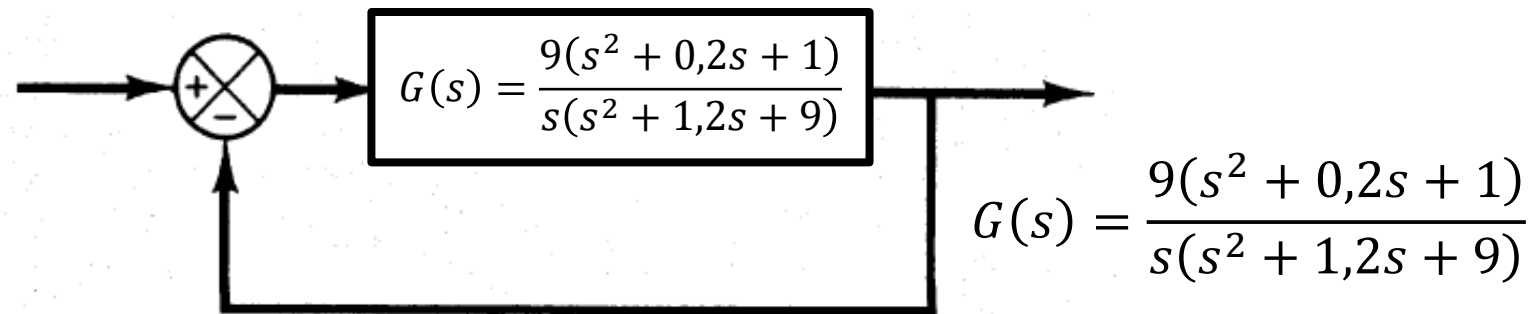
```
opts = bodeoptions;  
opts.PhaseMatching='on'  
opts.Grid='on'  
  
num=[0 0 25]; % ou num=[25]  
den=[1 4 25];  
bode(num,den,opts)  
title('Diagrama de Bode de G(s)=25/(s^2+4s+25)')
```



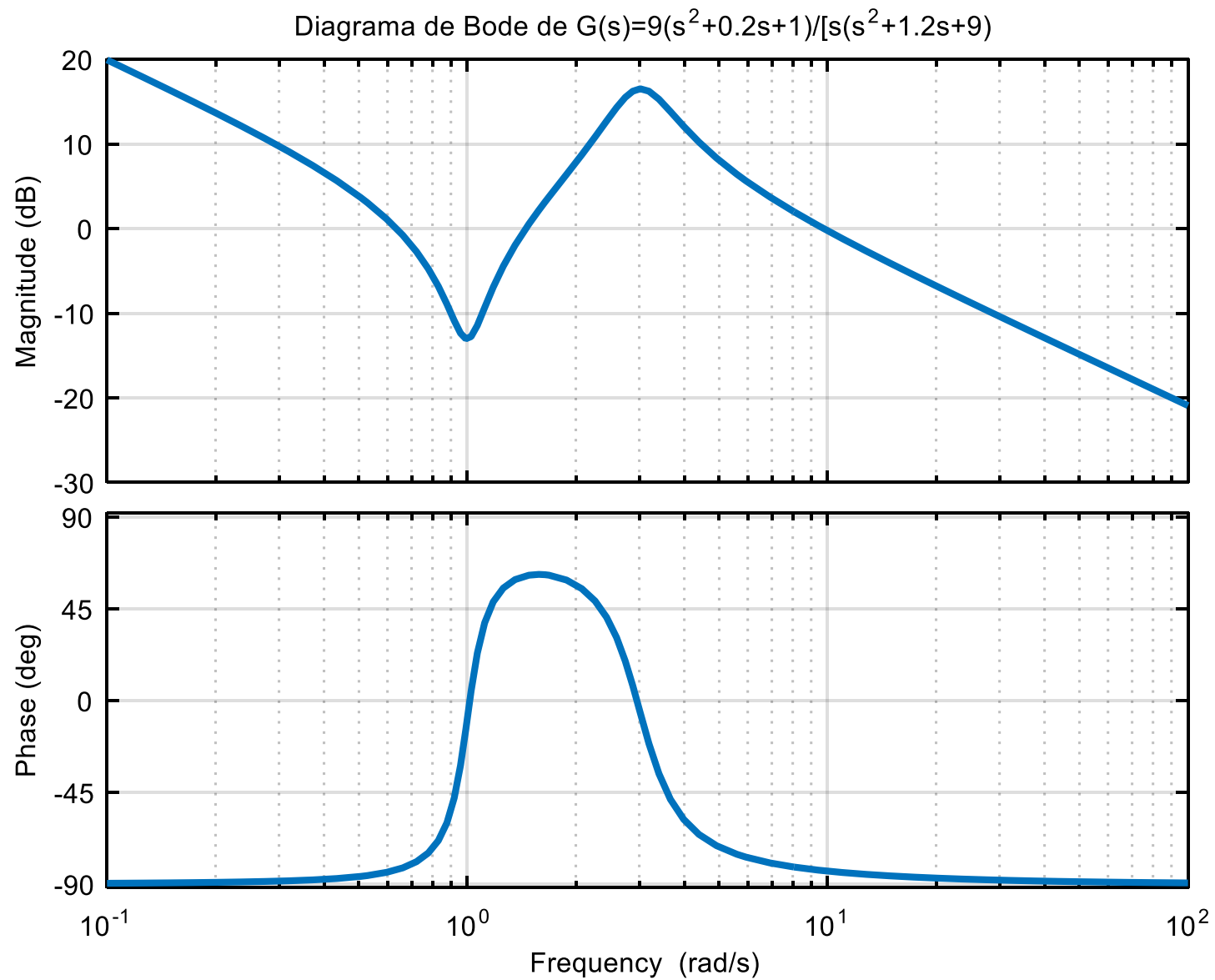
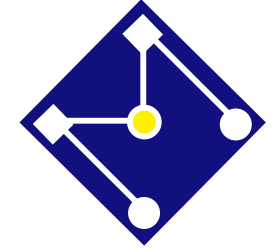


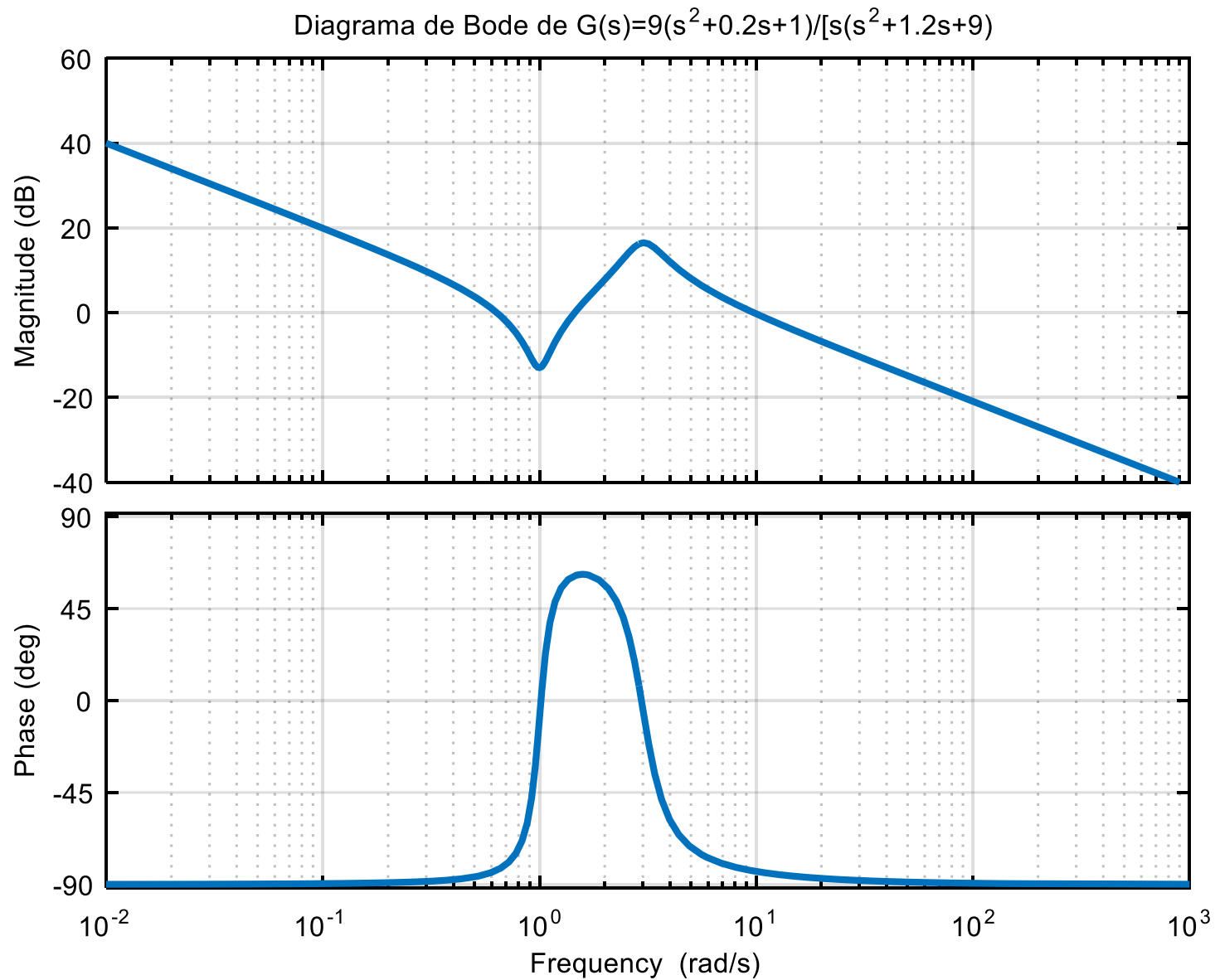
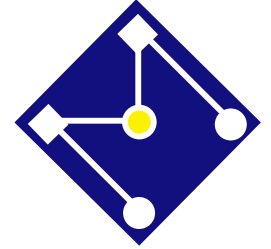
EXEMPLO

- Trace o diagrama de Bode da função de transferência de malha aberta, $G(s)$,

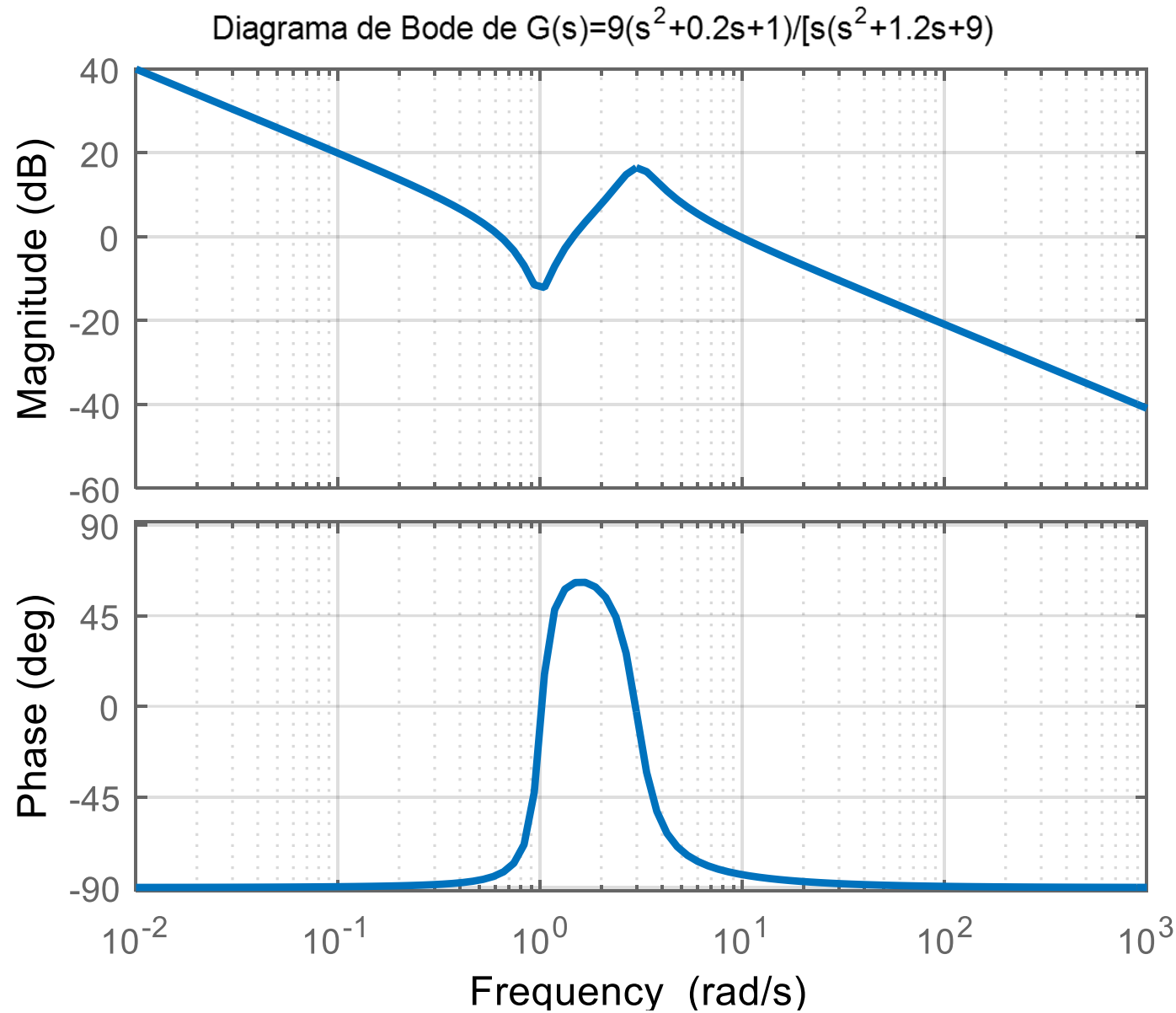
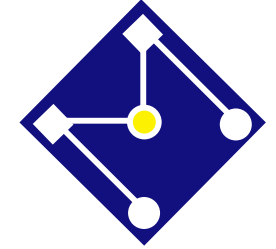


```
num=[9 1.8 9]
den=[1 1.2 9 0]
bode(num,den)
title('Diagrama de Bode de G(s)=9(s^2+0.2s+1)/[s(s^2+1.2s+9)]')
```

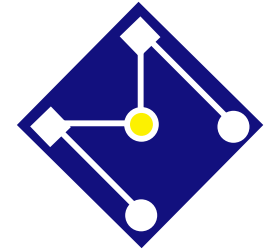




```
opts.Xlim = {[0.01,100]};
opts.XLimMode = {'manual'};
bode(num,den,opts)
```



```
w=logspace(-2,3,100);
bode(num,den,w)
```



SITES ONDE VOCÊ PODE ESTUDAR...

- <https://www.youtube.com/watch?v=CSAp9ooQRT0>
- <https://www.youtube.com/watch?v=E6R2XUEyRy0>
- <https://www.youtube.com/watch?v=4d4WJdU61Js>
- <https://www.mathworks.com/videos/understanding-bode-plots-simple-systems-3-of-4-76213.html>
- <https://www.mathworks.com/videos/understanding-bode-plots-complex-systems-4-of-4-76214.html>

•

FIM

Acabaram as aulas de
Diagrama de Bode