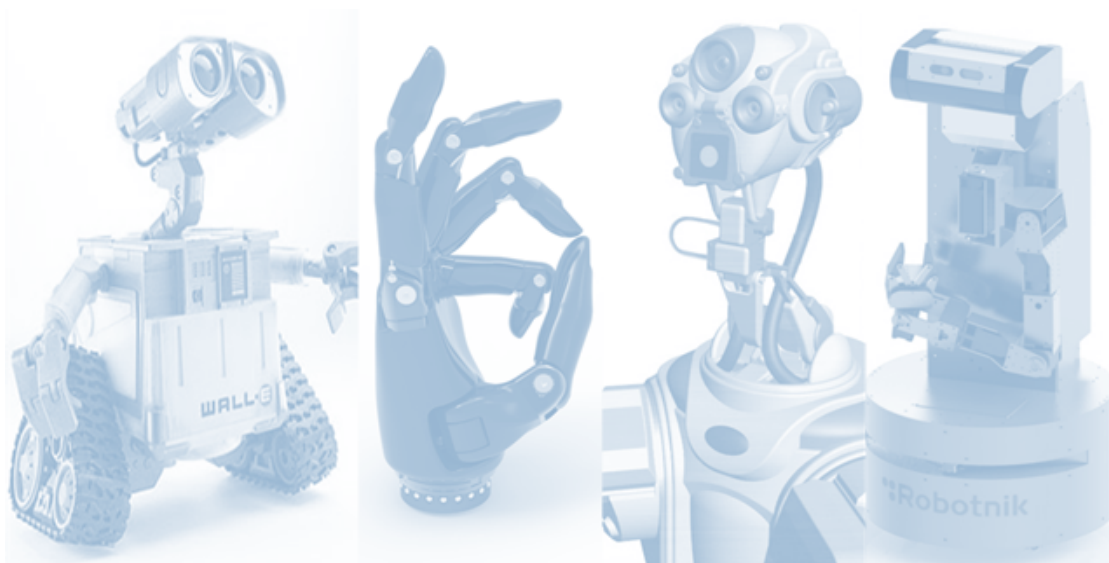




---

# INSTRUMENTAÇÃO

---

Parte Experimental

Larissa Driemeier, Marcilio Alves, Rafael T. Moura

VERSÃO  
Outubro 2018

ESCOLA  
Escola Politécnica da USP  
Engenharia Mecatrônica

# CONTENTS

---

# I

## ANÁLISE MODAL



# TEORIA SOBRE ANÁLISE MODAL DE PLACAS

---

*O mundo é tridimensional, dinâmico e não linear!*

## 1.1 OBJETIVO

Proceder a análise modal de uma placa quadrada utilizando os métodos:

**teórico** através de equações clássicas da Mecânica dos Sólidos;

**numérico** através da análise por elementos finitos, usando o software comercial Abaqus;

**experimental** excitando a placa em um largo espectro de frequências.

## 1.2 MOTIVAÇÃO

A análise modal é o estudo de propriedades dinâmicas de estruturas lineares. Essas propriedades dinâmicas incluem:

- frequências de ressonância,
- modos estruturais de vibração.

As propriedades dinâmicas dependem da massa, amortecimento e rigidez da estrutura, e determinam o comportamento da estrutura quando exposta a cargas dinâmicas operacionais. A análise modal, portanto, é uma etapa crucial em simulação dinâmica estrutural.

Um importante aspecto de projeto é evitar que um carregamento excite uma frequência de ressonância da estrutura, o que pode ocasionar um colapso. Na Figura ??, é possível observar o efeito do carregamento [vento] ao excitar a estrutura em uma de suas frequências

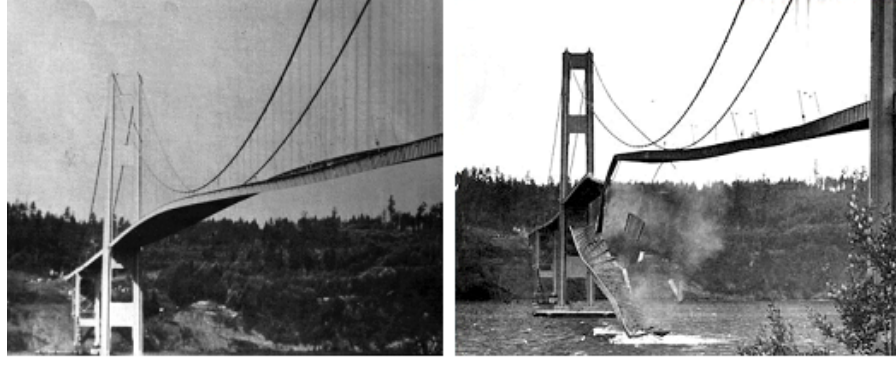


Figure 1.1: Ponte Tacoma Narrows. Oscilação de um modo de vibrar associado a uma frequência natural, e consequente colapso estrutural.

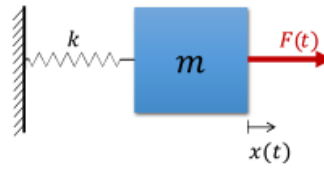


Figure 1.2: Figura 2. Sistema massa-mola (1 grau de liberdade) com força aplicada em função do tempo.

de ressonância e, em um outro momento, o efeito desse carregamento ao colapsar a estrutura.

Imaginando um sistema simples massa-mola de 1 grau de liberdade com força aplicada em função do tempo (Fig. ??), a equação de movimento pode ser escrita como

$$m\ddot{x} + kx = F(t) \quad (1.1)$$

Ou, no caso de vibração livre,

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (1.2)$$

Assumindo um deslocamento da forma  $x = \sin \omega t$ , é possível reescrever a equação anterior como

$$-m\omega^2 x + kx = 0 \quad kx = x m \omega^2 \quad (1.3)$$

Dessa forma, a obtenção das frequências de ressonância é direta,  $\omega^2 = k/m$  e o modo de vibrar é único, já que o sistema possui um único grau de liberdade.

Analogamente, a análise modal de estruturas mais complexas pode ser entendida como um problema de autovalor e autovetor, sendo  $m$  e  $k$  substituídos pelas matrizes de massa e rigidez,  $[M]$  e  $[K]$ , respectivamente, resultando em:

$$\{[K] - \omega^2[M]\}[x] = 0 \quad (1.4)$$

A solução não trivial desta equação fornece os autovalores  $\omega$  - as frequências de ressonância, e os vetores associados a  $\omega$  - os modos de vibrar.

Seria bastante repetitivo analisar o caso da teoria de viga, considerando que vocês estudaram, em Sistemas Dinâmicos II toda essa teoria! E ainda fizeram experimentos... Decididamente, está na hora de complicarmos um pouco mais com a Teoria de Placas!

### 1.3 CASO DAS PLACAS PLANAS RETANGULARES

A grosso modo falando, uma placa retangular pode ser entendida como uma viga que se estende em *duas* direções. Sob a ação de esforço externo lateral, e estando as arestas devidamente escoradas, apresenta deformação por flexão numa configuração deslocada para fora do próprio plano. Assim, à semelhança de uma viga, a placa tem deslocamentos laterais determinados pela flecha ( $v$ ), agora porém definida como uma função de duas variáveis ( $x, y$ ) que determinam a posição de um ponto no plano da placa (Figura ??). Analogamente, desenvolvem-se tensões de flexão e de cisalhamento agora, porém, em duas direções do plano. Neste âmbito, as hipóteses básicas do modelo matemático da Teoria de Placas são inteiramente análogas às da Teoria de Viga, inserindo-se, nisso, também a restrição de que os deslocamentos sejam pequenos. Isto se verifica, digamos, desde que a flecha máxima ( $v_{max}$ ) seja menor do que metade da espessura da placa ( $h$ ):  $v_{max}/h \leq 0.5$ .

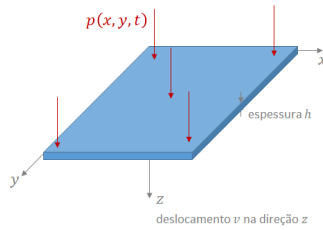


Figure 1.3: Placa.

A equação de movimento para placas finas é <sup>1</sup>,

$$\rho h \ddot{v}(x, y, t) + D \nabla^4 v(x, y, t) = p(x, y, t) \quad (1.5)$$

sendo  $\rho$  a densidade do material, e

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad [Nm] \quad (1.6)$$

valor este conhecido como a *Rigidez à Flexão* e que, como se vê, depende da espessura da placa  $h$  e das propriedades do material  $E$ , módulo de Elasticidade [ $N/m^2$ ] e  $\nu$ , coeficiente de Poisson. Além disso, o operador diferencial  $\nabla^4$  de uma função é definido como,

$$\nabla^4 f = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 f}{\partial^2 x \partial^2 y} \quad (1.7)$$

<sup>1</sup>Rao. S. S. Vibration of Continuous Systems (John Wiley & Sons, Inc., 2006).

Assim, para o equilíbrio em vibrações livres, necessário ao cálculo de modos e frequências naturais, finalmente temos:

$$\rho h \ddot{v}(x, y, t) + D \nabla^4 v(x, y, t) = 0 \quad (1.8)$$

Admitindo uma solução em forma de variáveis separadas:  $v(x, y, t) = \phi(x, y)T(t)$ , a equação ??, analogamente ao desenvolvimento do caso das vigas, acaba por fornecer:

$$\nabla^4 \phi(x, y) - \underbrace{\omega^2 \frac{\rho h}{D}}_{\beta^4} \phi(x, y) = 0 \quad (1.9)$$

onde  $\omega$  é a frequência circular de oscilação harmônica no tempo.

Infelizmente, resolver a equação diferencial ??, como parte de um problema de contorno relativo a vibrações livres de placas planas, é bem mais complexo do que o foi para as vigas, sendo que, via de regra, não é possível encontrar solução analítica exata. Como exceção, para a qual uma solução analítica é conhecida, temos o caso da placa retangular com todos os quatro lados simplesmente apoiados, cujos resultados são:

$$\begin{aligned} \omega_{ij} &= \pi^2 \left[ i^2 + j^2 (a/b)^2 \right] \sqrt{\frac{D}{\rho h a^4}} \\ \phi_{ij} &= \sin(i\pi x/a) \sin(j\pi y/b) \end{aligned} \quad (1.10)$$

onde  $\omega_{ij}$  e  $\phi_{ij}$  são, respectivamente, as frequências naturais [rad/s] e os modos naturais,  $a$  é o comprimento da placa na direção  $x$ ,  $b$  na direção  $y$ ,  $i$  número de meias ondas, ou lóbulos, na direção  $x$ ,  $j$  na direção  $y$ . A mais baixa frequência natural corresponde ao modo menos deformado e ocorre para um único lóbulo em cada uma das direções ( $i = 1; j = 1$ ). A partir daí, as frequências vão se sucedendo em ordem crescente, para mais de um lóbulo em pelo menos uma das direções. Para  $a/b = 1,5$ , por exemplo, as frequências ficam crescentemente ordenadas na seguinte sequência do par  $(i, j)$ :  $(1, 1), (2, 1), (1, 2), (3, 1), (2, 2), (3, 2)$ , etc...

Para outras condições de contorno não existe solução tão *fácil* como essa e, a título de informação, a Figura ?? apresenta os casos mais interessantes para os propósitos deste experimento, para as três primeiras frequências.

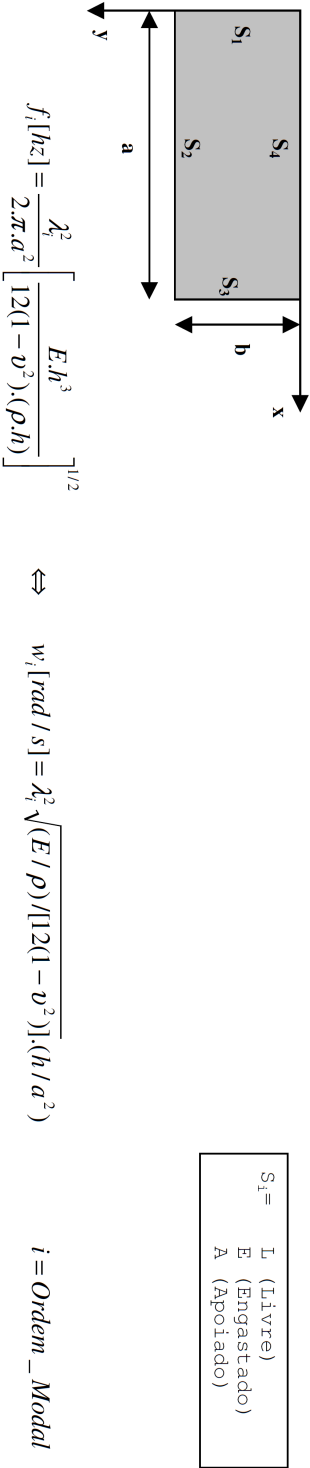
#### 1.4 CHLADNI PLATES

Placas Chladni são placas finas que vibram na direção perpendicular ao seu plano. O nome é estranho, mas é uma homenagem a Ernst Chladni (lê-se kläd'nêz), cientista e músico alemão do século 18, pioneiro no campo da acústica, a ciência do som.

Na época, Chladni usou um arco de violoncelo para excitar a borda de um metal fino ou placa de madeira coberta de areia (Fig. ??a) e mostrou que era possível exibir visualmente o movimento do som. A areia concentrou-se em áreas onde a placa não estava vibrando. Através deste trabalho, Chladni concluiu que o som se propaga em forma de ondas. Ele foi o primeiro cientista a demonstrar claramente essa conexão. Hoje,



| VALORES DE $\lambda_i^2$                                                                                   |       |           |       |         |       |       |       |           |       |       |       |         |       |       |  |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|-----------|-------|---------|-------|-------|-------|-----------|-------|-------|-------|---------|-------|-------|--|
| C O N D I Ç Õ E S   D E   C O N T O R N O : S <sub>1</sub> -S <sub>2</sub> -S <sub>3</sub> -S <sub>4</sub> |       |           |       |         |       |       |       |           |       |       |       |         |       |       |  |
| L-L-L-L                                                                                                    |       |           |       | E-L-L-L |       |       |       | A-L-A-L   |       |       |       | E-E-E-E |       |       |  |
| MODOS                                                                                                      | $i =$ | 1         | 2     | 3       | 1     | 2     | 3     | 1         | 2     | 3     | 1     | 2       | 3     |       |  |
| (a/b)                                                                                                      | 0,4   | 3,463     | 5,288 | 9,622   | 3,511 | 4,786 | 8,115 | 9,760     | 11,04 | 15,06 | 23,65 | 27,82   | 35,45 |       |  |
|                                                                                                            | 2/3   | 8,946     | 9,602 | 20,74   | 3,502 | 6,406 | 14,54 | 9,698     | 12,98 | 22,95 | 27,01 | 41,72   | 66,14 |       |  |
|                                                                                                            | 1,0   | 13,49     | 19,79 | 24,43   | 3,492 | 8,525 | 21,43 | 9,631     | 16,14 | 36,73 | 35,99 | 73,41   | 108,3 |       |  |
|                                                                                                            | 1,5   | 20,13     | 21,60 | 46,65   | 3,477 | 11,68 | 21,62 | 9,558     | 21,62 | 38,72 | 60,77 | 93,86   | 148,6 |       |  |
|                                                                                                            | 2,5   | 21,64     | 33,05 | 60,14   | 3,456 | 17,99 | 21,56 | 9,484     | 33,62 | 38,36 | 147,8 | 173,9   | 221,5 |       |  |
| $v = 0,3$                                                                                                  |       | $v = 0,3$ |       |         |       |       |       | $v = 0,3$ |       |       |       |         |       | $V v$ |  |



podemos usar um oscilador (shaker) com amplificador (Fig. ??b). Dessa forma, temos uma grande vantagem, podemos variar facilmente e de forma controlada a frequência de excitação, proporcionando assim uma visão completa da experimentação.

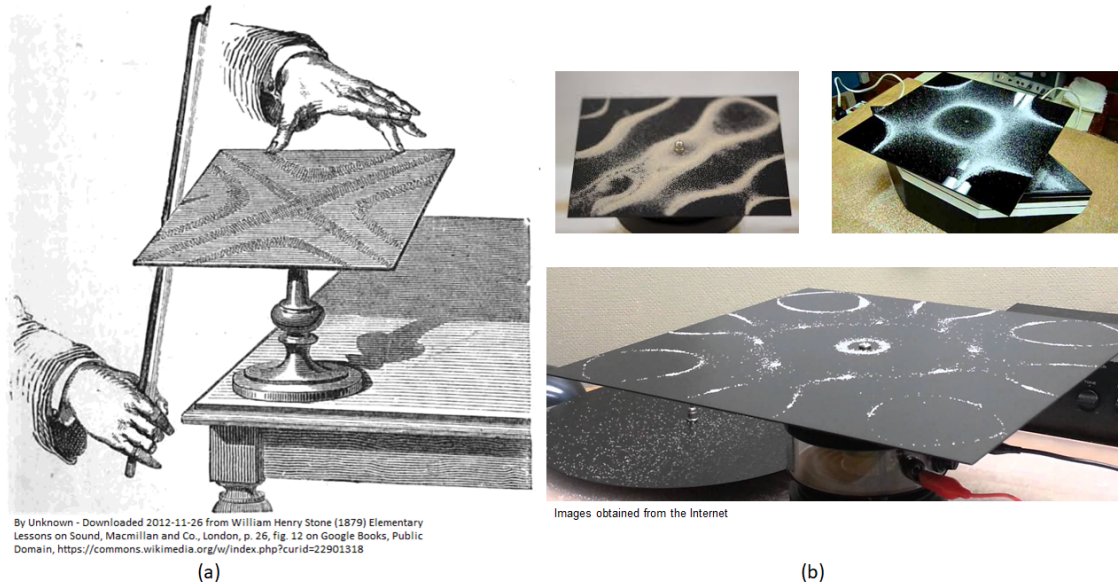


Figure 1.5: Experimento de Chladni.

O objetivo do experimento, geralmente, é estudar as condições de ressonância das partes de madeira de instrumentos de cordas, como, por exemplo, violinos e guitarras e também de bateria, címbalos e sinos.

As Figs. ??-??<sup>2</sup> mostram a variedade de padrões de ondas estacionárias que podem surgir a partir da ressonância de uma placa quadrada fixa em seu ponto médio e polvilhada com areia (por Chladni, em 1787) ou com gelo seco (Waller, em 1961).

<sup>2</sup> A Fig. ?? é extraída de Waller M. D. (1961) *Chladni Figures, A Study in Symmetry*. London, G. Bell & Sons.

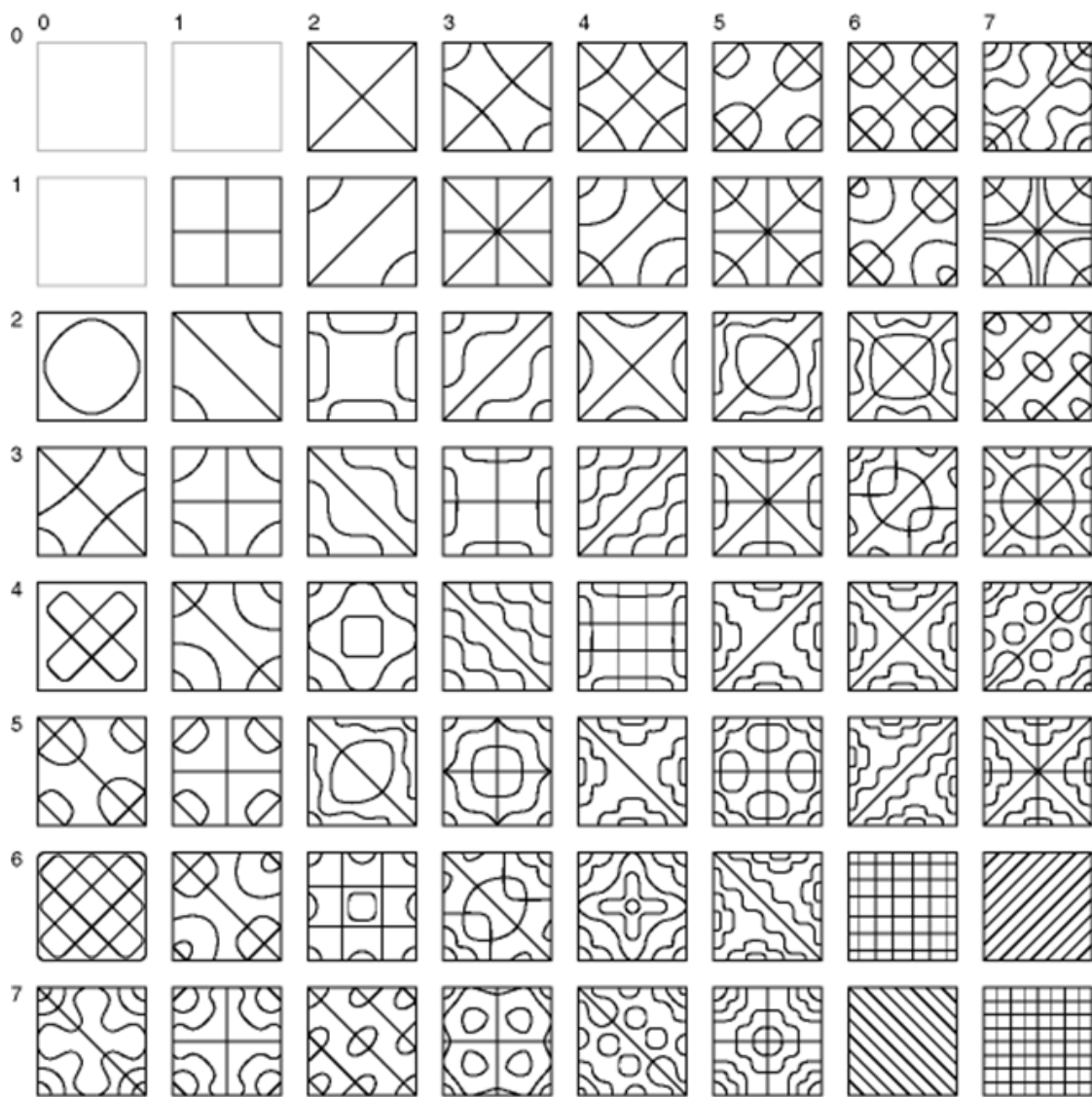


Figure 1.6: Figuras de Chladni para valores do par  $i, j$  apresentado na teoria.

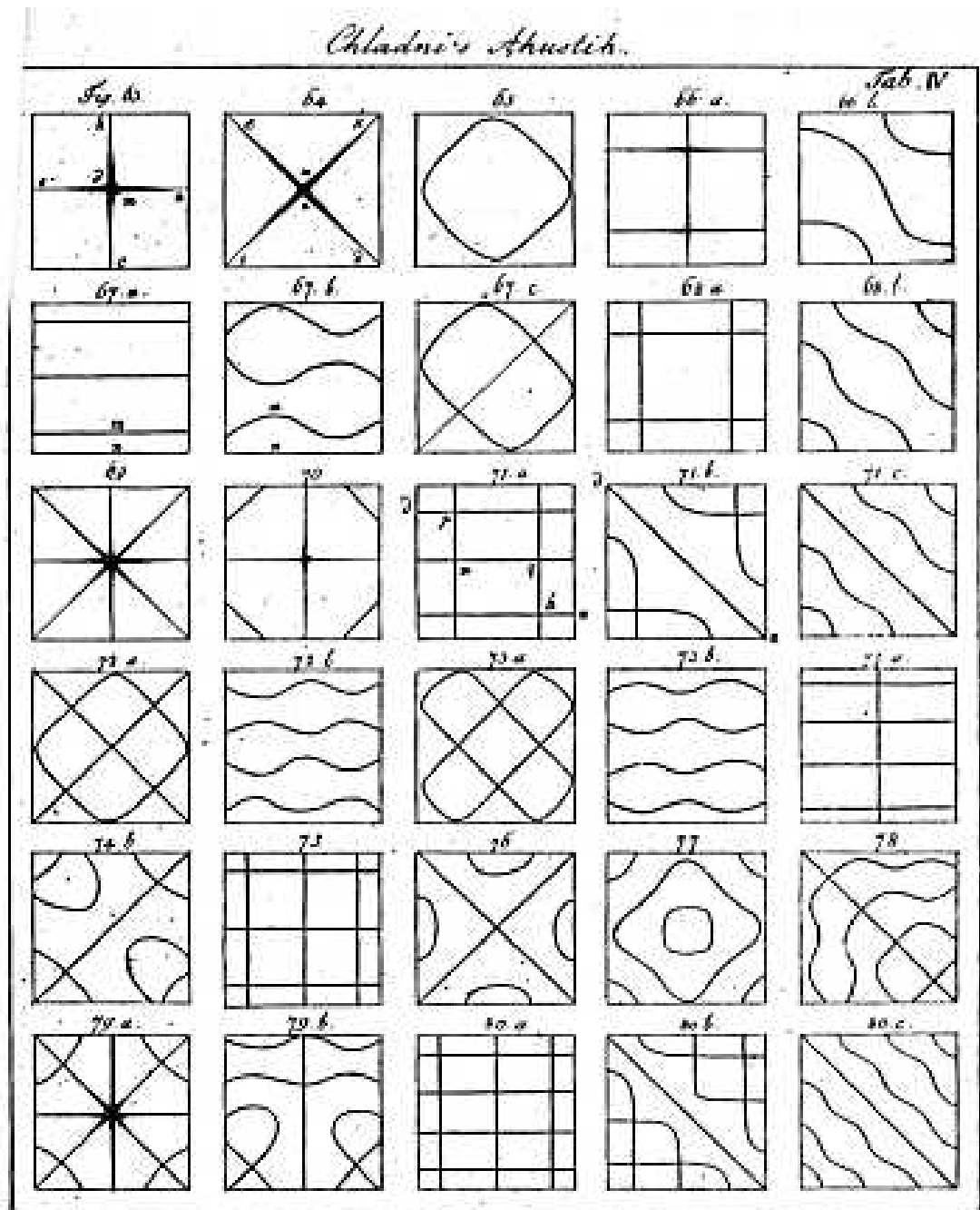


Figure 1.7: Figuras de Chladni originais de seu trabalho.

# ANÁLISE NUMÉRICA

---

*Finite Element Analysis makes a good engineer great, and a bad engineer dangerous!*

*Robert D. Cook, Professor of Mechanical Engineering  
University of Wisconsin, Madison*

Nesta etapa você irá modelar a placa usando o software comercial Abaqus. A seguir está o tutorial feito, propositalmente, para uma placa qualquer. Você deve adaptar dimensões, material, condições de contorno para o caso do seu experimento.

O PDF está disponível no Moodle.



## ENSAIO EXPERIMENTAL

---

*Hands-on!*

### 3.1 MATERIAL A SER UTILIZADO

Familiarize-se com toda a cadeia de medição e com todos os equipamentos à mesa - verifique a montagem do conjunto conforme a Fig. ??.

O osciloscópio deve gerar uma onda senoidal, que irá passar pelo amplificador, shaker e fazer a placa vibrar. A Fig. ?? mostra o gerador de funções e alguns dos comandos que você deve conhecer para usá-lo. Mantenha a amplitude em  $1\text{ mV}_{pp}$  - amplitudes

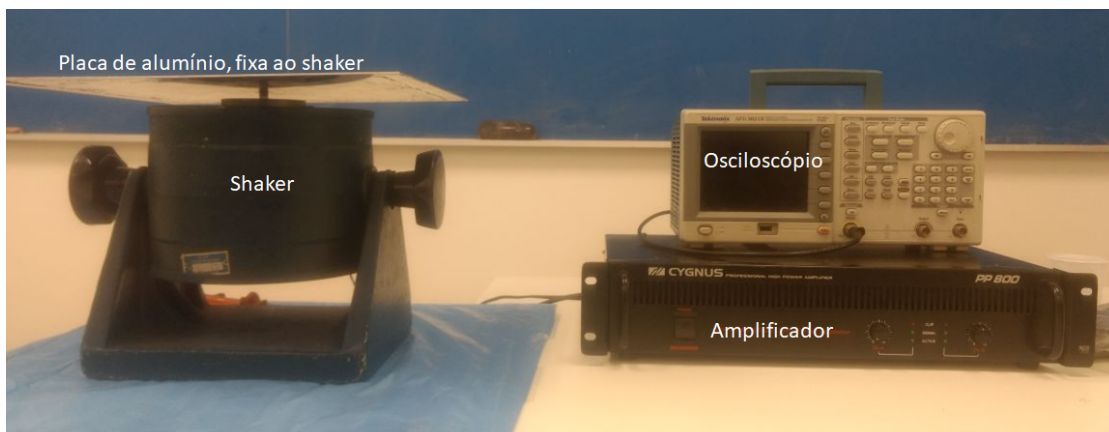


Figure 3.1: Bancada experimental para a análise modal da placa quadrada.



Figure 3.2: Gerador de funções. Você irá utilizar a onda senoidal.

mais altas podem saturar o amplificador. À medida que a frequência cresce você deve aumentar progressivamente essa amplitude, para conseguir ver os modos. Porém, não ultrapasse  $3 V_{pp}$ .

O gerador de funções está ligado ao canal B do amplificador.

### 3.2 ETAPAS DO ENSAIO EXPERIMENTAL COM PLACAS

Devemos aqui realizar um conjunto de experimentos com uma placa quadrada. Inicialmente, veja o vídeo: <https://youtu.be/wvJAgUBF4w>.

Depois sigam os passos definidos abaixo,

1. Começando com a vibração a uma frequência baixa (aproximadamente 10 Hz), aumentem lentamente a frequência até obterem uma primeira ressonância. Verifiquem o aumento da amplitude de vibração e o som. Para analisar o modo de vibrar relacionado àquela frequência passem a mão, de leve, na placa, e tentem encontrar as linhas de nós (amplitude nula ou regiões onde vocês não sentem a placa vibrar). Vocês irão procurar mais uma frequência, apenas no ouvido e no toque, para *sentirem* o experimento.
2. Joguem purpurina sobre a placa (pouca...). Quando as Placas de Chladni alcançam uma condição de ressonância, são criadas *ondas estacionárias*, de forma análoga ao que ocorre em uma corda vibratória, ou à viga que vocês estudaram em Sistemas



Dinâmicos II - exceto que agora estamos em duas dimensões. Na ressonância, os anti-nós estarão oscilando perpendicularmente à placa, energizando a purpurina. A purpurina, obviamente, se moverá para um nível de energia mais baixo - para um nó. Será aí que a purpurina permanecerá, criando as linhas que veremos. Estas são as zonas de menor energia (não vibratórias);

3. Façam um ajuste fino no osciloscópio para obter a frequência exata de ressonância. Juguem purpurina com o saleiro, de modo a desenhar o provável modo de vibrar. Verifiquem e tentem esboçar o primeiro modo de vibrar. Fotografem o experimento;
4. Importante: ajustem a amplitude de vibração conforme necessário para conseguir a migração de purpurina - vocês devem conseguir ouvir o som. Alta amplitude causa um movimento excessivo da purpurina (e modos difíceis de verificar);
5. Aumentem a frequência, na busca de ressonâncias mais altas. Repitam o procedimento para, pelo menos, cinco (quantos vocês conseguem?) valores experimentais.
6. Façam o tutorial para achar os modos numéricos de vibrar da placa, e ache os valores teóricos.
7. Provavelmente vocês não encontraram experimentalmente todas as frequências encontradas na simulação numérica. E os modos teóricos também não devem estar coincidindo com os experimentais. Agora vocês devem tirar conclusões sobre tudo isso! O que está certo? Porque tantas discrepâncias?



# RELATÓRIO

---

*Unless you can communicate effectively, the knowledge and skills you acquire are of little use to others. You have to be able to collect information, organize it, and present it in a logical and concise form.*

<https://uwaterloo.ca/science/importance-reports>

Ao final da aula o grupo colocar no Moodle, na área reservada a esse experimento e no nome de um dos integrantes do grupo, um arquivo zipado contendo as questões teóricas e os anexos pedidos neste capítulo. O nome do arquivo ZIP deve ser *PlacasChladni-XX-YY*, onde XX é o número do grupo e YY vale 01 para turma de segunda e 02 para turma de quinta.

## 4.1 QUESTÕES

As seguintes questões devem ser discutidas e apresentadas no relatório. Sejam objetivos!

1. Quais são as condições de contorno da placa no experimento? Porquê?
2. Quais as características geométricas (dimensões e espessura) e do material (características elásticas como Módulo de Young e coeficiente de Poisson) da placa?
3. Quais as frequências de ressonância teóricas, numéricas e experimentais encontradas? Incluam os cálculos das frequências teóricas.
4. Comparem os modos de vibrar numéricos, teóricos e experimentais. Coloquem fotos comparativas.
5. Muitos dos padrões que vocês observaram são difíceis de explicar... Discutam os resultados.
6. Sugiram modificações do modelo que aproximariam mais a resposta numérica e experimental.

## 4.2 DOCUMENTOS ANEXADOS

Os seguintes documentos devem ser anexados ao seu relatório:

1. Inclua o arquivo CAE da análise modal no Abaqus.