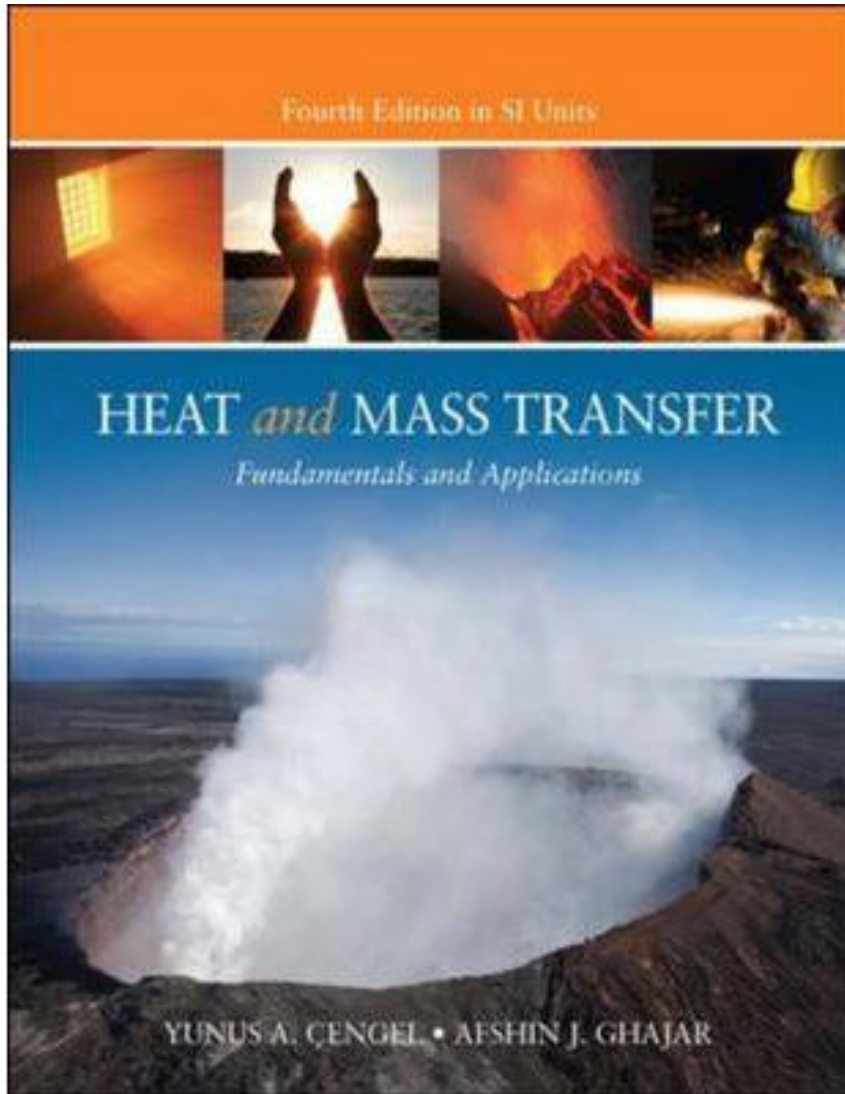


**MAP 2320 – MÉTODOS NUMÉRICOS EM EQUAÇÕES
DIFERENCIAIS II**

2º Semestre - 2019

Prof. Dr. Luis Carlos de Castro Santos

lsantos@ime.usp.br



Heat and Mass Transfer (SI Unit)

By (author) [Yunus A. Cengel](#) , By
(author) [Afshin J. Ghajar](#)

- The rate of heat conduction through a medium in a specified direction (say, in the x -direction) is expressed by **Fourier's law of heat conduction** for one-dimensional heat conduction as:

$$\dot{Q}_{\text{cond}} = -kA \frac{dT}{dx} \quad (\text{W})$$

Heat is conducted in the direction of decreasing temperature, and thus the temperature gradient is negative when heat is conducted in the positive x -direction.

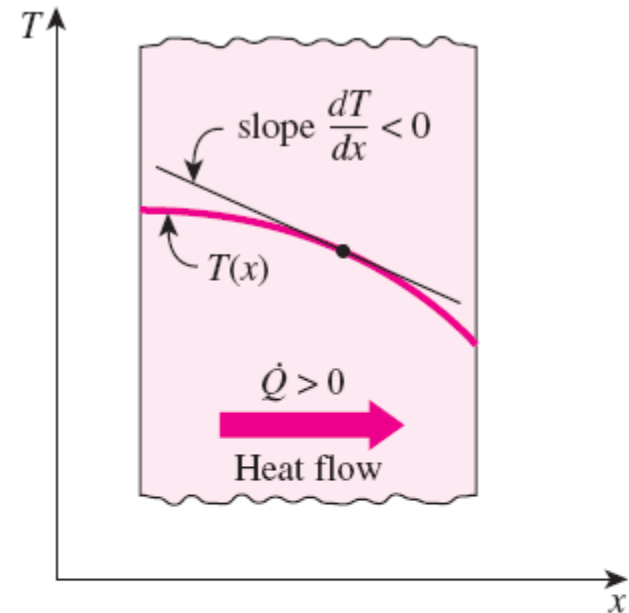


FIGURE 2–7

The temperature gradient dT/dx is simply the slope of the temperature curve on a T - x diagram.

- The heat flux vector at a point P on the surface of the figure must be perpendicular to the surface, and it must point in the direction of decreasing temperature
- If $\mathbf{n}$ is the normal of the isothermal surface at point P , the rate of heat conduction at that point can be expressed by **Fourier's law** as

$$\dot{Q}_n = -kA \frac{\partial T}{\partial n} \quad (\text{W})$$

$$\vec{\dot{Q}}_n = \dot{Q}_x \vec{i} + \dot{Q}_y \vec{j} + \dot{Q}_z \vec{k}$$

$$\dot{Q}_x = -kA_x \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \dot{Q}_y = -kA_y \frac{\partial T}{\partial y},$$

$$\dot{Q}_z = -kA_z \frac{\partial T}{\partial z}$$

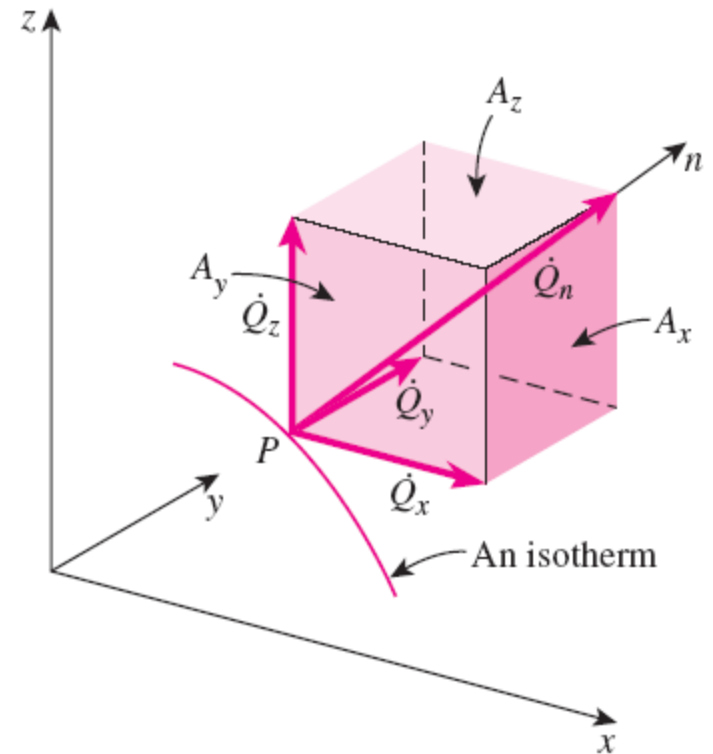


FIGURE 2–8

The heat transfer vector is always normal to an isothermal surface and can be resolved into its components like any other vector.

Rectangular Coordinates

$$\left(\begin{array}{c} \text{Rate of heat} \\ \text{conduction at} \\ x, y, \text{ and } z \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{Rate of heat} \\ \text{conduction} \\ \text{at } x + \Delta x, \\ y + \Delta y, \text{ and } z + \Delta z \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Rate of heat} \\ \text{generation} \\ \text{inside the} \\ \text{element} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Rate of change} \\ \text{of the energy} \\ \text{content of} \\ \text{the element} \end{array} \right)$$

or

$$\dot{Q}_x + \dot{Q}_y + \dot{Q}_z - \dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_{y+\Delta y} - \dot{Q}_{z+\Delta z} + \dot{E}_{\text{gen, element}} = \frac{\Delta E_{\text{element}}}{\Delta t} \quad (2-36)$$

Noting that the volume of the element is $V_{\text{element}} = \Delta x \Delta y \Delta z$, the change in the energy content of the element and the rate of heat generation within the element can be expressed as

$$\Delta E_{\text{element}} = E_{t+\Delta t} - E_t = mc(T_{t+\Delta t} - T_t) = \rho c \Delta x \Delta y \Delta z (T_{t+\Delta t} - T_t)$$

$$\dot{E}_{\text{gen, element}} = \dot{e}_{\text{gen}} V_{\text{element}} = \dot{e}_{\text{gen}} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Substituting into Eq. 2-36, we get

$$\dot{Q}_x + \dot{Q}_y + \dot{Q}_z - \dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_{y+\Delta y} - \dot{Q}_{z+\Delta z} + \dot{e}_{\text{gen}} \Delta x \Delta y \Delta z = \rho c \Delta x \Delta y \Delta z \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t}$$

Dividing by $\Delta x \Delta y \Delta z$ gives

$$-\frac{1}{\Delta y \Delta z} \frac{\dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_x}{\Delta x} - \frac{1}{\Delta x \Delta z} \frac{\dot{Q}_{y+\Delta y} - \dot{Q}_y}{\Delta y} - \frac{1}{\Delta x \Delta y} \frac{\dot{Q}_{z+\Delta z} - \dot{Q}_z}{\Delta z} + \dot{e}_{\text{gen}} = \rho c \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t} \quad (2-37)$$

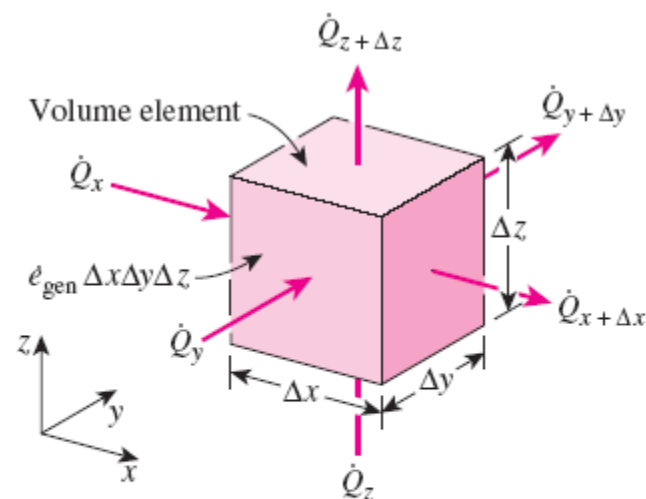


FIGURE 2-20

Three-dimensional heat conduction through a rectangular volume element.

Noting that the heat transfer areas of the element for heat conduction in the x , y , and z directions are $A_x = \Delta y \Delta z$, $A_y = \Delta x \Delta z$, and $A_z = \Delta x \Delta y$, respectively, and taking the limit as Δx , Δy , Δz and $\Delta t \rightarrow 0$ yields

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{e}_{\text{gen}} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2-38)$$

since, from the definition of the derivative and Fourier's law of heat conduction,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y \Delta z} \frac{\dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_x}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta y \Delta z} \frac{\partial \dot{Q}_x}{\partial x} = \frac{1}{\Delta y \Delta z} \frac{\partial}{\partial x} \left(-k \Delta y \Delta z \frac{\partial T}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x \Delta z} \frac{\dot{Q}_{y+\Delta y} - \dot{Q}_y}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta x \Delta z} \frac{\partial \dot{Q}_y}{\partial y} = \frac{1}{\Delta x \Delta z} \frac{\partial}{\partial y} \left(-k \Delta x \Delta z \frac{\partial T}{\partial y} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right)$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x \Delta y} \frac{\dot{Q}_{z+\Delta z} - \dot{Q}_z}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \frac{\partial \dot{Q}_z}{\partial z} = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \frac{\partial}{\partial z} \left(-k \Delta x \Delta y \frac{\partial T}{\partial z} \right) = -\frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

Eq. 2-38 is the general heat conduction equation in rectangular coordinates. In the case of constant thermal conductivity, it reduces to

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{e}_{\text{gen}}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2-39)$$

where the property $\alpha = k/\rho c$ is again the *thermal diffusivity* of the material. Eq. 2-39 is known as the **Fourier-Biot equation**, and it reduces to these forms under specified conditions:

(1) *Steady-state:*
(called the **Poisson equation**)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{e}_{\text{gen}}}{k} = 0$$

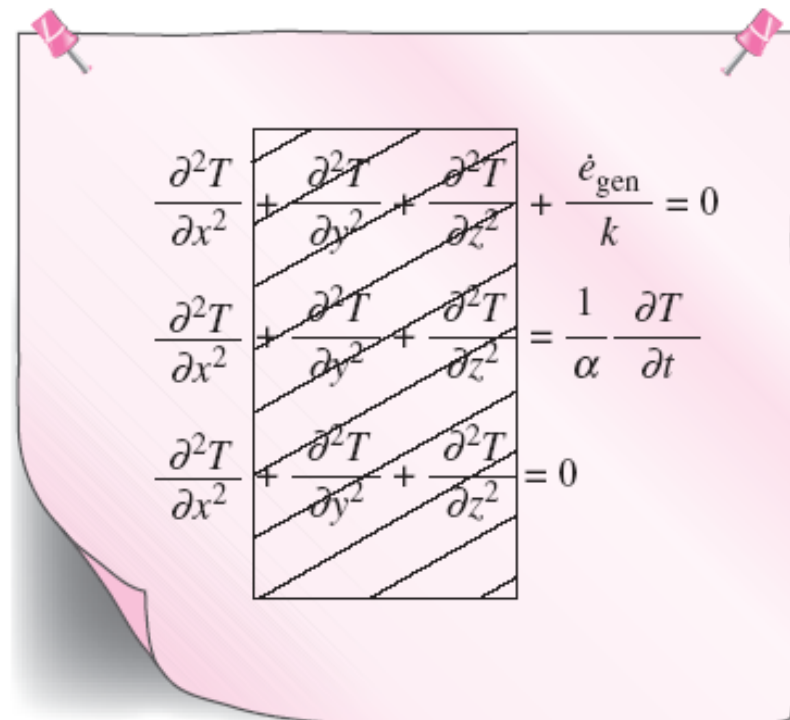
(2) *Transient, no heat generation:*
(called the **diffusion equation**)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

(3) *Steady-state, no heat generation:*
(called the **Laplace equation**)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

The three-dimensional heat conduction equations reduce to the one-dimensional ones when the temperature varies in one dimension only.



Cylindrical Coordinates

Relations between the coordinates of a point in rectangular and cylindrical coordinate systems:

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi, \quad \text{and} \quad z = z$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial T}{\partial \phi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{e}_{\text{gen}} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

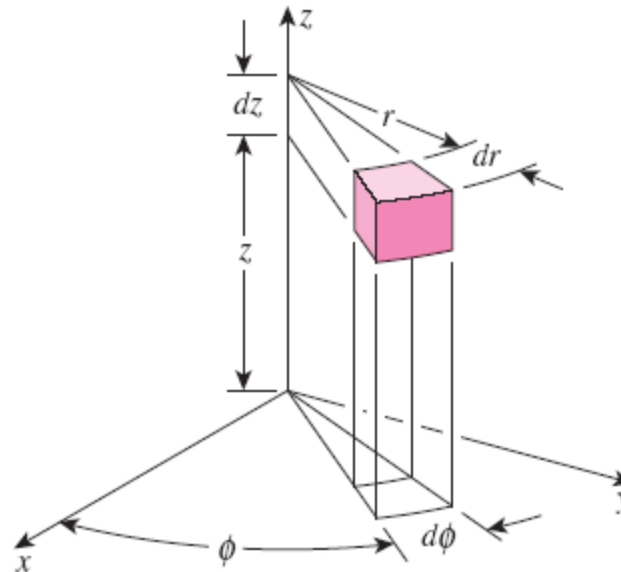


FIGURE 2-22

A differential volume element in cylindrical coordinates.

Spherical Coordinates

Relations between the coordinates of a point in rectangular and spherical coordinate systems:

$$x = r \cos \phi \sin \theta, \quad y = r \sin \phi \sin \theta, \quad \text{and} \quad z = r \cos \theta$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \dot{e}_{\text{gen}} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

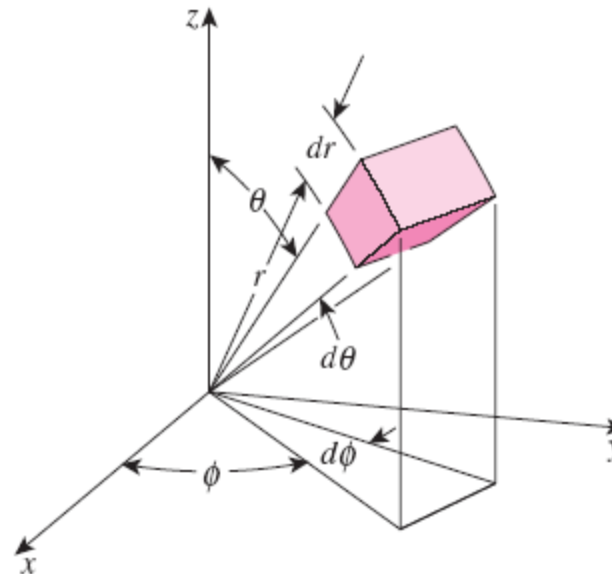


FIGURE 2-23

A differential volume element in spherical coordinates.

Boundary Conditions

- Specified Temperature Boundary Condition
- Specified Heat Flux Boundary Condition
- Convection Boundary Condition
- Radiation Boundary Condition
- Interface Boundary Conditions
- Generalized Boundary Conditions

Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução (Versão Preliminar)

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
<http://www.mat.ufmg.br/~regi>

Julho 2011

5	Equação de Laplace Bidimensional	420
5.1	Equação de Laplace num Retângulo	420
5.1.1	Apenas $k(y)$ não Nula	421
5.1.2	Apenas $h(y)$ não Nula	428
5.1.3	Caso Geral	434
	Exercícios	437
5.2	Equação de Laplace numa Faixa Semi-infinita	440
	Exercícios	448
5.3	Equação de Laplace em Regiões Circulares	449
	Exercícios	457
5.4	Respostas dos Exercícios	467

Equação de Laplace Bidimensional

5.1 Equação de Laplace num Retângulo

Pode-se mostrar que o potencial elétrico, $u(x, y)$, numa região em que há ausência de cargas elétricas satisfaz a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

chamada **equação de Laplace**. Também as soluções estacionárias da equação do calor em uma placa,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

assim como as soluções estacionárias da equação de uma membrana elástica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

satisfazem a equação de Laplace.

O problema de encontrar a solução da equação de Laplace numa região sendo conhecidos os seus valores na fronteira da região é chamado **problema de Dirichlet**.

Vamos considerar, agora, o seguinte problema de Dirichlet em um retângulo

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x, 0) = f(x), \quad u(x, b) = g(x), \quad 0 < x < a \\ u(0, y) = h(y), \quad u(a, y) = k(y), \quad 0 < y < b \end{array} \right.$$

A solução deste problema é a soma das soluções dos problemas com apenas uma das funções $f(x)$, $g(x)$, $h(y)$ e $k(y)$ não nulas (verifique!).

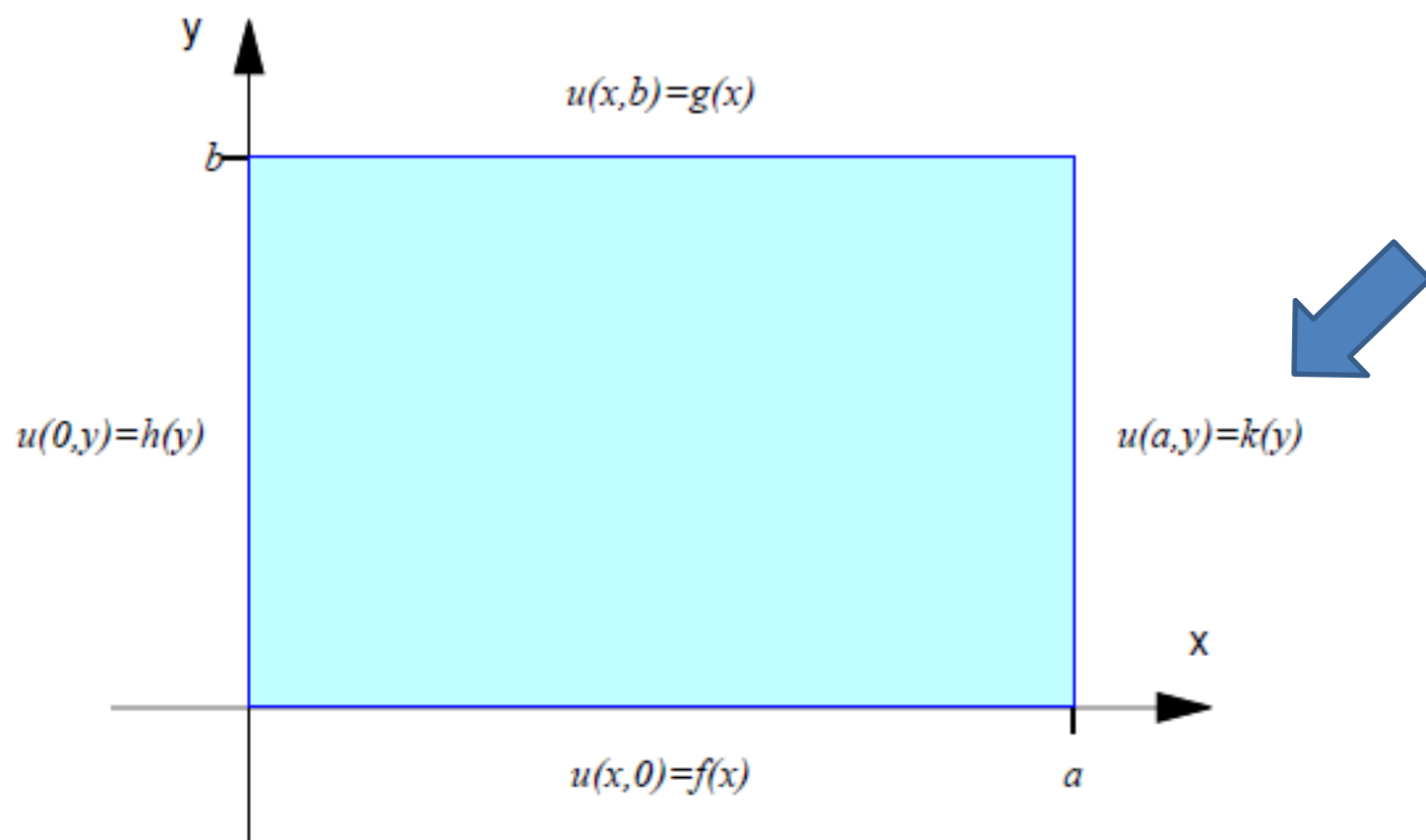


Figura 5.1 – Retângulo onde é resolvido o problema de Dirichlet

5.1.1 Apenas $k(y)$ não Nula

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \\ u(x, 0) = 0, u(x, b) = 0, 0 < x < a \\ u(0, y) = 0, u(a, y) = k(y), 0 < y < b \end{cases}$$

Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de y , ou seja,

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$X''(x)Y(y) = -X(x)Y''(y).$$

Dividindo-se por $X(x)Y(y)$ obtemos

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}.$$

O primeiro membro depende apenas de x , enquanto o segundo depende apenas de y . Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, & X(0) = 0 \\ Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, & Y(0) = 0, Y(b) = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

$$(5.2)$$

As condições $Y(0) = Y(b) = 0$ decorrem do fato de que

$$0 = u(x, 0) = X(x)Y(0) \text{ e } 0 = u(x, b) = X(x)Y(b).$$

A condição $X(0) = 0$, decorre do fato de que

$$0 = u(0, y) = X(0)Y(y).$$

Além disso

$$u(a, y) = X(a)Y(y) = k(y)$$



Second Order Linear Homogeneous Differential Equations with Constant Coefficients

MAP2320

Given a second order linear equation with constant coefficients

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad a \neq 0.$$

Solve its characteristic equation $ar^2 + br + c = 0$. The general solution depends on the type of roots obtained (use the quadratic formula to find the roots if you are unable to factor the polynomial!):

1. When $b^2 - 4ac > 0$, there are two distinct real roots r_1, r_2 .

$$y = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}.$$

2. When $b^2 - 4ac < 0$, there are two complex conjugate roots $r = \lambda \pm \mu i$.
Then

$$y = C_1 e^{\lambda t} \cos \mu t + C_2 e^{\lambda t} \sin \mu t.$$

3. When $b^2 - 4ac = 0$, there is one repeated real root r . Then

$$y = C_1 e^{rt} + C_2 t e^{rt}.$$



A equação (5.2) com as condições de fronteira foi resolvida no problema do calor em uma barra com condições homogêneas - equação (3.1) na página 278 - e tem solução não identicamente nula somente se

$$\lambda = \frac{n^2 \pi^2}{b^2}, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

e neste caso a solução é da forma

$$Y(y) = c_1 \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Substituindo-se $\lambda = \frac{n^2 \pi^2}{b^2}$ na equação (5.1) obtemos

$$X''(x) - \frac{n^2 \pi^2}{b^2} X(x) = 0,$$

que com a condição $X(0) = 0$ tem solução (verifique!)

$$X(x) = c_2 (e^{\frac{n\pi}{b}x} - e^{-\frac{n\pi}{b}x}) = \tilde{c}_2 \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{b}$$

Logo o problema formado pela equação de Laplace e as condições de fronteira $u(x, 0) = u(x, b) = 0$, para $0 < x < a$ e $u(0, y) = 0$, para $0 < y < b$, tem soluções fundamentais

$$u_n(x, y) = X(x)Y(y) = \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{b}$$

Vamos supor que a solução do problema de Dirichlet seja uma série da forma

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi y}{b} \sinh \frac{n\pi x}{b}. \quad (5.3)$$

Para satisfazer a condição inicial $u(a, y) = k(y)$, precisamos ter

$$k(y) = u(a, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi y}{b} \sinh \frac{n\pi a}{b} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \sinh \frac{n\pi a}{b} \right] \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Esta é a série de Fourier de senos de $k(y)$. Assim, pelo [Corolário 2.5 na página 184](#), se a função $k : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada $k'(y)$ também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$c_n \sinh \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b k(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.4)$$

Exemplo 5.1. Vamos considerar o problema de Dirichlet num retângulo

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x, 0) = 0, \quad u(x, 2) = 0, \quad 0 < x < 3 \\ u(0, y) = 0, \quad u(3, y) = k(y), \quad 0 < y < 2 \end{cases}$$

com

$$k(y) = \begin{cases} y, & \text{se } 0 \leq y \leq 1 \\ 2 - y, & \text{se } 1 \leq y \leq 2 \end{cases}$$



2.1.4 Tabela de Coeficientes de Séries de Fourier

Coeficientes das Séries de Fourier de Funções Elementares		
$f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}, -1 \leq c < d \leq 1$	$a_n(f, L) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt$	$b_n(f, L) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt$
$f_{c,d}^{(0)}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in [cL, dL] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$\begin{aligned} a_0(f_{c,d}^{(0)}, L) &= d - c \\ a_n(f_{c,d}^{(0)}, L) &= \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen} s \Big _{n\pi c}^{n\pi d} \end{aligned}$	$b_n(f_{c,d}^{(0)}, L) = -\frac{1}{n\pi} \cos s \Big _{n\pi c}^{n\pi d}$
$f_{c,d}^{(1)}(t) = \begin{cases} t, & \text{se } t \in [cL, dL] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$\begin{aligned} a_0(f_{c,d}^{(1)}, L) &= \frac{L}{2}(d^2 - c^2) \\ a_n(f_{c,d}^{(1)}, L) &= \frac{L}{n^2\pi^2} (s \operatorname{sen} s + \cos s) \Big _{n\pi c}^{n\pi d} \end{aligned}$	$\begin{aligned} b_n(f_{c,d}^{(1)}, L) &= \\ \frac{L}{n^2\pi^2} (-s \cos s + \operatorname{sen} s) \Big _{n\pi c}^{n\pi d} \end{aligned}$
$f_{c,d}^{(2)}(t) = \begin{cases} t^2, & \text{se } t \in [cL, dL] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$\begin{aligned} a_0(f_{c,d}^{(2)}, L) &= \frac{L^2}{3}(d^3 - c^3) \\ a_n(f_{c,d}^{(2)}, L) &= \frac{L^2}{n^3\pi^3} ((s^2 - 2) \operatorname{sen} s + 2s \cos s) \Big _{n\pi c}^{n\pi d} \end{aligned}$	$\begin{aligned} b_n(f_{c,d}^{(2)}, L) &= \\ \frac{L^2}{n^3\pi^3} (2s \operatorname{sen} s + (2 - s^2) \cos s) \Big _{n\pi c}^{n\pi d} \end{aligned}$

A solução é então

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2} \sinh \frac{n\pi x}{2}$$

em que $c_n \sinh(\frac{3n\pi}{2})$ são os coeficientes da série de senos de $k(y)$, ou seja, usando a tabela na página [202](#), multiplicando por 2 os valores obtemos:

$$\begin{aligned} c_n \sinh \frac{3n\pi}{2} &= \int_0^2 k(y) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{2} \right) dy \\ &= 2 \left(b_n(f_{0,1/2}^{(1)}) + 2b_n(f_{1/2,1}^{(0)}) - b_n(f_{1/2,1}^{(1)}) \right) \\ &= \frac{8 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2 \pi^2}, \quad n = 1, 2, 3 \dots \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{8 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2 \pi^2 \sinh \frac{3n\pi}{2}}, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

Entretanto coeficientes de índice par são nulos:

$$c_{2k} = 0$$

$$c_{2k+1} = \frac{8(-1)^k}{(2k+1)^2 \pi^2 \sinh \frac{3(2k+1)\pi}{2}}.$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2 \sinh \frac{3n\pi}{2}} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2} \sinh \frac{n\pi x}{2} \\ &= \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2 \sinh \frac{3(2n+1)\pi}{2}} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi y}{2} \sinh \frac{(2n+1)\pi x}{2} \end{aligned}$$

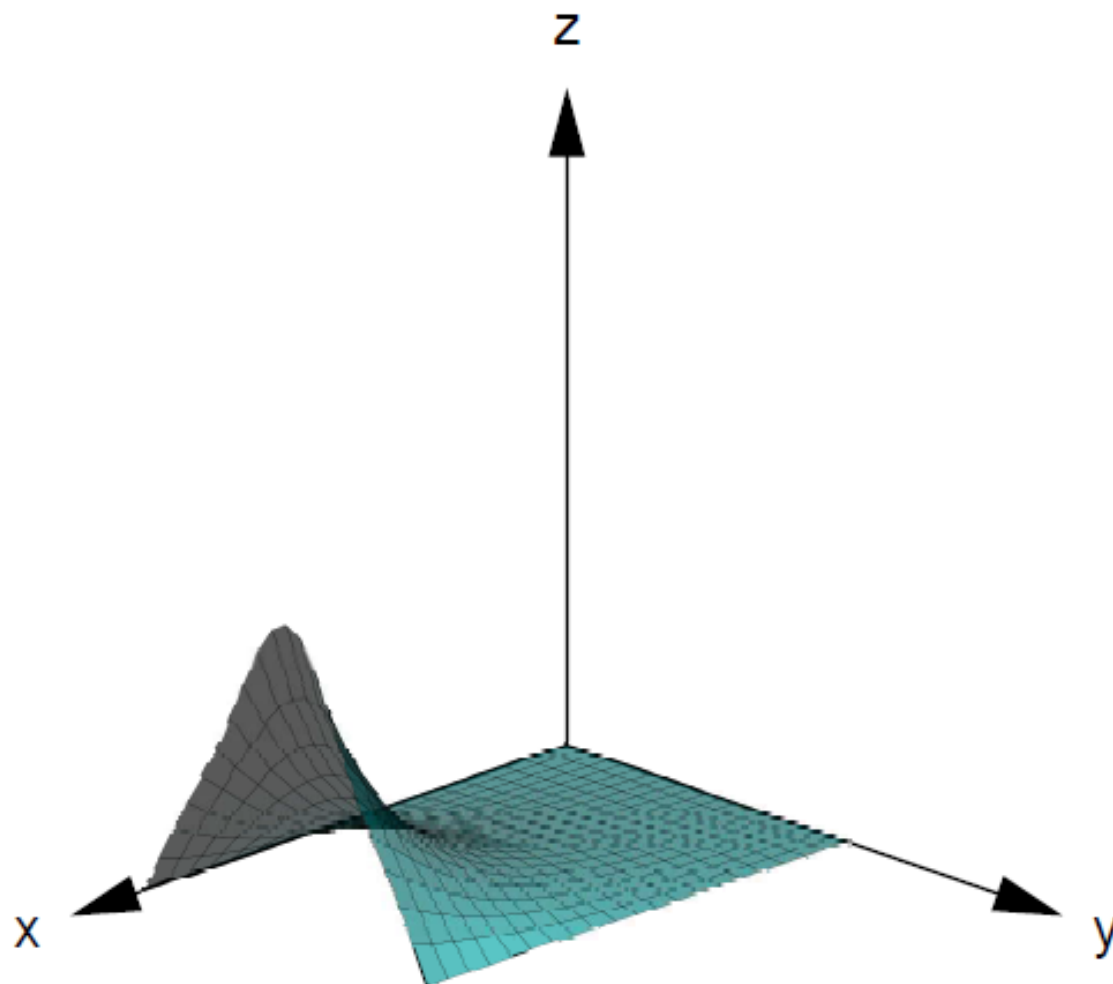


Figura 5.2 – Solução do problema de Dirichlet do Exemplo 5.1 tomando apenas 3 termos não nulos da série

Exercício

1.1. Resolva o seguinte problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x, 0) = 0, u(x, 2) = 0, 0 < x < 3 \\ u(0, y) = 0, u(3, y) = k(y), 0 < y < 2 \end{cases}$$

com

$$k(y) = \begin{cases} y, & \text{se } 0 \leq y < 1/2 \\ 1/2, & \text{se } 1/2 \leq y < 3/2 \\ 2 - y, & \text{se } 3/2 < y \leq 2 \end{cases}$$



1.1. A solução é então

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2} \sinh \frac{n\pi x}{2}$$

em que $c_n \sinh(\frac{3n\pi}{2})$ são os coeficientes da série de senos de $k(y)$, ou seja,

$$\begin{aligned} c_n \sinh\left(\frac{3n\pi}{2}\right) &= \int_0^2 k(y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{2}\right) dy \\ &= \frac{4}{\pi^2} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen} \frac{3n\pi}{4}}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{4}{\pi^2} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen} \frac{3n\pi}{4}}{n^2 \sinh(\frac{3n\pi}{2})}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Portanto a solução é dada por

$$u(x, y) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen} \frac{3n\pi}{4}}{n^2 \sinh(\frac{3n\pi}{2})} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2} \sinh \frac{n\pi x}{2}$$

5.1.2 Apenas $h(y)$ não Nula

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x, 0) = 0, u(x, b) = 0, 0 < x < a \\ u(0, y) = h(y), u(a, y) = 0, 0 < y < b \end{cases}$$

Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de y , ou seja,

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$X''(x)Y(y) = -X(x)Y''(y).$$

Dividindo-se por $X(x)Y(y)$ obtemos

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}.$$

O primeiro membro depende apenas de x , enquanto o segundo depende apenas de y . Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, & X(a) = 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

$$\begin{cases} Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, & Y(0) = 0, Y(b) = 0 \end{cases} \quad (5.6)$$

As condições $Y(0) = Y(b) = 0$ decorrem do fato de que $0 = u(x, 0) = X(x)Y(0)$ e $0 = u(x, b) = X(x)Y(b)$.

A condição $X(a) = 0$, decorre do fato de que $0 = u(a, y) = X(a)Y(y)$.

Além disso

$$u(0, y) = X(0)Y(y) = h(y)$$

A equação (5.6) com as condições de fronteira foi resolvida no problema do calor em uma barra com condições homogêneas - equação (3.1) na página 278 - e tem solução não identicamente nula somente se

$$\lambda = \frac{n^2 \pi^2}{b^2}, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

e a solução é da forma

$$Y(y) = c_1 \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Substituindo-se $\lambda = \frac{n^2 \pi^2}{b^2}$ na primeira equação diferencial obtemos

$$X''(x) - \frac{n^2 \pi^2}{b^2} X(x) = 0.$$

Esta equação tem solução geral

$$X(x) = \hat{c}_1 e^{-\frac{n\pi}{b}x} + \hat{c}_2 e^{\frac{n\pi}{b}x}.$$

Mas podemos escrever a solução geral na forma

$$X(x) = c_1 e^{\frac{n\pi}{b}a} e^{-\frac{n\pi}{b}x} + c_2 e^{-\frac{n\pi}{b}a} e^{\frac{n\pi}{b}x} = c_1 e^{-\frac{n\pi}{b}(x-a)} + c_2 e^{\frac{n\pi}{b}(x-a)},$$

que com a condição $X(a) = 0$ tem solução (verifique!)

$$X(x) = c_2 (e^{\frac{n\pi}{b}(x-a)} - e^{-\frac{n\pi}{b}(x-a)}) = \tilde{c}_2 \sinh\left(\frac{n\pi}{b}(x-a)\right).$$

Logo o problema formado pela equação de Laplace e as condições de fronteira $u(x,0) = u(x,b) = 0$, para $0 < x < a$ e $u(a,y) = 0$, para $0 < y < b$, tem soluções fundamentais

$$u_n(x,y) = X(x)Y(y) = \sin \frac{n\pi y}{b} \sinh\left(\frac{n\pi}{b}(x-a)\right)$$

Vamos supor que a solução do problema de Dirichlet seja uma série da forma

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi y}{b} \sinh\left(\frac{n\pi}{b}(x-a)\right).$$

Para satisfazer a condição inicial $u(0,y) = h(y)$, precisamos ter

$$h(y) = u(0,y) = - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi y}{b} \sinh \frac{n\pi a}{b} = - \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \sinh \frac{n\pi a}{b} \right] \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Esta é a série de Fourier de senos de $h(y)$. Assim, pelo [Corolário 2.5 na página 184](#), se a função $h : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada h' também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$-c_n \sinh \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b h(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

Podemos evitar o sinal negativo se escrevemos

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi y}{b} \sinh\left(\frac{n\pi}{b}(a - x)\right) \quad (5.7)$$

e neste caso

$$c_n \sinh \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b h(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (5.8)$$

Exemplo 5.2. Vamos considerar o problema de Dirichlet num retângulo

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x, 0) = 0, \quad u(x, 2) = 0, \quad 0 < x < 3 \\ u(0, y) = h(y), \quad u(3, y) = 0, \quad 0 < y < 2 \end{cases}$$

com

$$h(y) = \begin{cases} y, & \text{se } 0 \leq y \leq 1 \\ 2 - y, & \text{se } 1 \leq y \leq 2 \end{cases}$$



A solução é então

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2} \sinh\left(\frac{n\pi}{2}(3-x)\right)$$

em que $c_n \sinh(\frac{3n\pi}{2})$ são os coeficientes da série de senos de $h(y)$, que são os mesmos da função $k(y)$ do Exemplo 5.1 na página 427, ou seja,

$$\begin{aligned} c_n \sinh\left(\frac{3n\pi}{2}\right) &= \int_0^2 h(y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{2}\right) dy \\ &= \frac{8 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2 \pi^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{8 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2 \pi^2 \sinh \frac{3n\pi}{2}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Ou ainda,

$$c_{2k} = 0$$

$$c_{2k+1} = \frac{8(-1)^k}{(2k+1)^2 \pi^2 \sinh \frac{3(2k+1)\pi}{2}}.$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2 \sinh \frac{3n\pi}{2}} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2} \sinh \frac{n\pi x}{2} \\ &= \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2 \sinh \frac{3(2n+1)\pi}{2}} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi y}{2} \sinh \frac{(2n+1)\pi(3-x)}{2} \end{aligned}$$

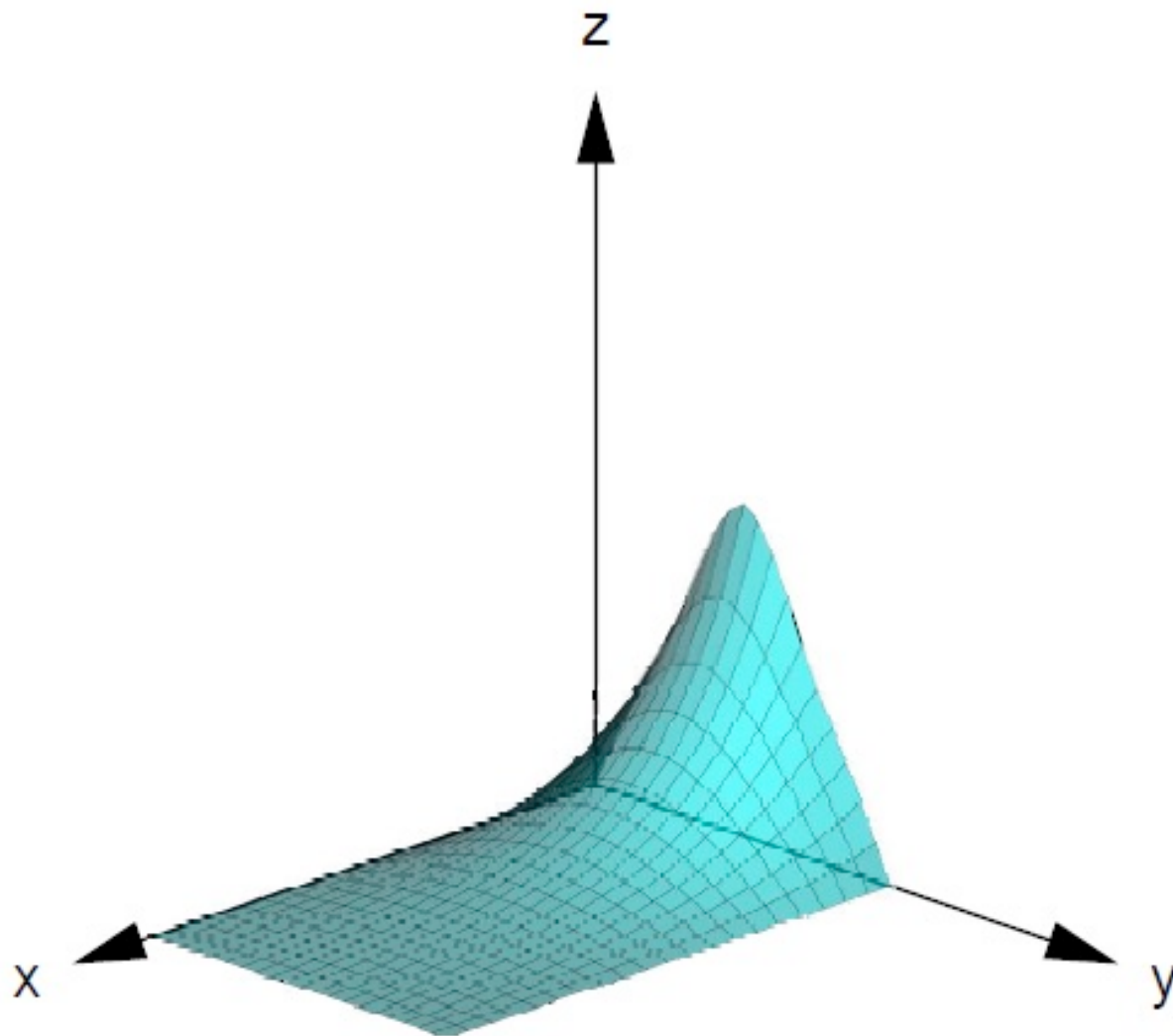


Figura 5.3 – Solução do problema de Dirichlet do Exemplo 5.2 tomando apenas 3 termos não nulos da série

MAP 2320 – MÉTODOS NUMÉRICOS EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS II

2º Semestre - 2019

Roteiro do curso

- **Introdução**
- **Séries de Fourier**
- Método de Diferenças Finitas
- Equação do calor transiente (parabólica)
- **Equação de Poisson (elíptica)**
- Equação da onda (hiperbólica)