MAT-2454 – Cálculo II
Aulas 13 e 14: Mais Cadeia e Derivadas Direcionais

Alexandre Lymberopoulos

Para Escola Politécnica – USP

IME–USP — Departamento de Matemática

Ordem do dia

Derivando duas vezes - I

Se $\gamma\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ é derivável em t_0 e $\operatorname{Im}\gamma \subset A$, com $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$, e $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é diferenciável em (x_0, y_0) então

- escrevendo $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, já sabemos que

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = \big\langle \nabla f(x_0, y_0), \gamma'(t_0) \big\rangle = f_x\big(\gamma(t)\big)x'(t) + f_y\big(\gamma(t)\big)y'(t).$$

- Derivando novamente com as regras da cadeia e produto, temos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)'(t)\Big|_{t=t_0} &= \frac{d}{dt}\Big(f_x\big(\gamma(t)\big)x'(t) + f_y\big(\gamma(t)\big)y'(t)\Big)\Big|_{t=t_0} \\ &= \Big[f_{xx}\big(\gamma(t_0)\big)x'(t_0) + f_{xy}\big(\gamma(t_0)\big)y'(t_0)\Big]x'(t_0) + f_x\big(\gamma(t_0)\big)x''(t_0) \\ &+ \Big[f_{yx}\big(\gamma(t_0)\big)x'(t_0) + f_{yy}\big(\gamma(t_0)\big)y'(t_0)\Big]y'(t_0) + f_y\big(\gamma(t_0)\big)y''(t_0)\end{aligned}$$

- Se f é de classe $\mathcal{C}^2$, omitindo os pontos de aplicação temos

$$\boxed{(f \circ \gamma)'' = f_{xx}(x')^2 + 2f_{xy}x'y' + f_{yy}(y')^2 + f_x x'' + f_y y''.}$$

Derivando duas vezes - II

De maneira análoga, se $g, h\colon B \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são diferenciáveis em (x_0, y_0) e $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $\big(g(x_0, y_0), h(x_0, y_0)\big)$

- então a composta $F(x, y) = f\big(g(x, y), h(x, y)\big)$ é diferenciável em (x_0, y_0) e, escrevendo $u = g(x, y)$ e $v = h(x, y)$, suas derivadas parciais são $F_x = f_u u_x + f_v v_x$ e $F_y = f_u u_x + f_v v_x$;
- a segunda derivada F_{xx} é obtida aplicando novamente as regras da cadeia e do produto:

$$\begin{aligned} F_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} F_x = \frac{\partial}{\partial x}(f_u u_x + f_v v_x) \\ &= (f_{uu} u_x + f_{uv} v_x) u_x + f_u u_{xx} + (f_{vu} u_x + f_{vv} v_x) v_x + f_v v_{xx}. \end{aligned}$$

- Se f é de classe $\mathcal{C}^2$ então

$$\boxed{F_{xx} = f_{uu} u_x^2 + 2 f_{uv} u_x v_x + f_{vv} v_x^2 + f_u u_{xx} + f_v v_{xx}}.$$

Derivando duas vezes - III

Sob estas mesmas condições, sinta-se convidado a calcular F_{xy} e F_{yy}, obtendo, em resumo:

$$\begin{aligned}
F_{xx} &= f_{uu}u_x^2 + 2f_{uv}u_x v_x + f_{vv}v_x^2 + f_u u_{xx} + f_v v_{xx} \\
F_{xy} &= f_{uu}u_x u_y + f_{uv}(u_x v_y + u_y v_x) + f_{vv}v_x v_y + f_u u_{xy} + f_v v_{xy} \\
F_{yy} &= f_{uu}u_y^2 + 2f_{uv}u_y v_y + f_{vv}v_y^2 + f_u u_{yy} + f_v v_{yy}
\end{aligned}$$

Por que não calculamos F_{yx}? (ou já calculamos?). Vamos praticar:

1. Calcule as derivadas segundas em x e y de $w(x, y)$, onde $w(u, v) = u^2 + v^2$, $u(x, y) = x^2 + y^2$ e $v(x, y) = 2xy$.
2. Se f é de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ e $u(s, t) = f(e^s \cos t, e^s \sin t)$, expresse Δu em termos das derivadas parciais de f.

Taxa de variação numa direção

- Medir a taxa de variação de $f\colon A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ em $(x_0, y_0) \in A$ ao longo de uma direção fixada.

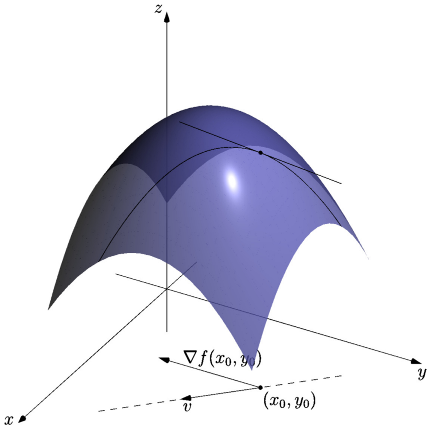

Figura: O gráfico de f, $\nabla f(x_0, y_0)$ e o vetor v.

Definição e Observações

Definição (Derivada Direcional)

Sejam $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ *um vetor unitário* $(a^2 + b^2 = 1)$ *e uma função* $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*. Definimos a derivada direcional de* f *em* $(x_0, y_0) \in A$*, na direção de* v *por*

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + at, y_0 + bt) - f(x_0, y_0)}{t}.}$$

Em particular se $v = e_1 = (1, 0)$ ou $v = e_2 = (0, 1)$, vetores da base canônica de $\mathbb{R}^2$, temos

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial e_1}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial e_2}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).}$$

Observações

- Se f é diferenciável em (x_0, y_0) então consideramos a curva $\gamma(t) = (x_0, y_0) + tv$ obtendo, pela regra da cadeia:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = (f \circ \gamma)'(0) = \big\langle \nabla f(x_0, y_0), v \big\rangle.}$$

- Nas mesmas condições do item anterior, se γ e η são curvas que passam por $\gamma(t_0) = (x_0, y_0) = \eta(s_0)$ e têm o mesmo vetor tangente unitário nesse ponto, $v = \gamma'(t_0) = \eta'(s_0)$, então

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t_0) = \frac{d}{dt}(f \circ \eta)(s_0).$$

- Como $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), v \rangle = \|\nabla f(x_0, y_0)\| \|v\| \cos\theta$, a direção de maior crescimento de f em (x_0, y_0) é o versor de $\nabla f(x_0, y_0)$, $v = \dfrac{\nabla f(x_0, y_0)}{\|\nabla f(x_0, y_0)\|}$.

Mais uma coisa e Exemplos

- A primeira observação acima mostra que, para uma função f diferenciável em (x_0, y_0), a derivada direcional nesse pontodepende linearmente das coordenadas do vetor v.
- Na prática, se a fórmula obtida para a derivada direcional não for linear nas coordenadas no vetor v[1], então f não é diferenciável.
- Do ponto de vista de álgebra linear, podemos então determinar qualquer derivada direcional num ponto se soubermos duas derivadas direcionais, em direções linearmente independentes, nesse ponto. Lembre que as derivadas parciais são as direcionais calculadas na base canônica.
- Seja $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável tal que $\frac{\partial f}{\partial v}(1,1) = 5$ e $\frac{\partial f}{\partial w}(1,1) = -3$, onde $v = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ e $w = (\sqrt{3}/2, 1/2)$. Determine $\nabla f(1,1)$.

[1] Se $v = (a, b)$, então $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = ma + nb$, para certos $m, n \in \mathbb{R}$

Atividades

Da Lista 2

- Seção 3: Exercícios 3.4, 3.8, 3.11 e 3.12;
- Seção 4: Exercícios 4.3 e 4.4;

Referências

- Aula presencial;
- H. L. Guidorrizi, *Um curso de Cálculo*, vol. 2, 5ª. edição, LTC - São Paulo, 2001. **Seções 10.1 e 14.1; 11.1, 11.2 e 11.3; 12.1**;
- J. Stewart, *Cálculo*, Vol. 2, 7ª. edição, Cengage-Learning - São Paulo, 2013. **Seção 14.3**.

Até a próxima aula!

lymber@ime.usp.br