



Nome: \_\_\_\_\_ N° USP: \_\_\_\_\_

## Experiência 4 INTEGRADORES E FILTROS ATIVOS

### INSTRUÇÕES PARA IMPRIMIR O PAPEL MONOLOG

Imprima o arquivo MonoLogColorA4.pdf usando o modo ALTA QUALIDADE da impressora em uma folha A4 **INDIVIDUAL**. Não é necessário imprimi-la em cores.

### PARTE A TEORIA

#### 4.1 Integrador

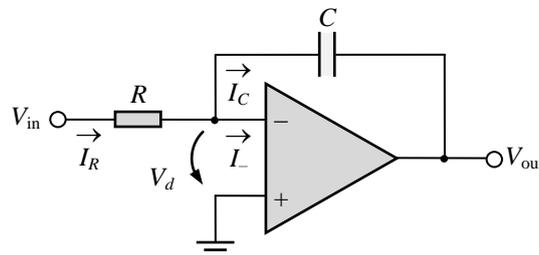


Figura 4.1 Circuito do Integrador

O circuito da Figura 4.1, conhecido como integrador Miller, fornece uma tensão proporcional à integral do sinal de entrada. Ou seja,

$$V_{\text{out}}(t) = - \left( \frac{1}{RC} \int_0^t V_{\text{in}}(t) dt + V_{C0} \right), \quad (4.1)$$

onde  $V_{C0}$  é a tensão inicial do capacitor e  $(-1/RC)$  é o *ganho de integração* (unidade:  $s^{-1}$ ). Repare que o ganho é *negativo*, o que significa que a tensão de saída estará invertida com relação a integral do sinal de entrada.

A dedução desta relação segue o mesmo roteiro já visto na experiência anterior. Lembre-se que a relação temporal entre a corrente  $I_C$  e a tensão  $V_C$  no capacitor é dada por

$$I_C(t) = C \frac{dV_C(t)}{dt}. \quad (4.2)$$

Adotando as aproximações de um amp-op ideal, temos:

- Com ganho diferencial  $A_O$  infinito e  $V_{\text{out}}$  não saturado,  $V_d$  tende a zero devido à realimentação negativa. Por isso, a tensão  $V_-$  na entrada inversora é aproximadamente **zero** (tem-se um *terra virtual* na entrada inversora), e a corrente no resistor  $R$  vale

$$I_R = \frac{V_{\text{in}} - V_-}{R} \cong \frac{V_{\text{in}}}{R}. \quad (4.3)$$

- A tensão no capacitor  $C$  pode ser determinada integrando-se a equação 4.2. Como a resistência de entrada do amp-op é elevada, a corrente  $I_L$  é desprezível e podemos aproximar a corrente  $I_C$  por  $I_R$ . Assim,

$$V_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t I_C(t) dt + V_{C0} \cong \frac{1}{C} \int_0^t \frac{V_{\text{in}}}{R}(t) dt + V_{C0}. \quad (4.4)$$

- Por fim, considerando que  $V_-$  é próxima de zero (*terra virtual*), a tensão de saída será

$$V_{\text{out}} = V_- - V_C \cong -V_C,$$

a partir do que, aplicando as igualdades 4.4 e 4.3, chega-se à expressão 4.1 do integrador.

#### 4.1.1 Impedância de entrada e escolha de R e C

Em geral, projeta-se um circuito integrador a partir do ganho de integração ( $-1/RC$ ) desejado, o que nos dá apenas uma relação entre o resistor e o capacitor. Para dimensioná-los, é necessário considerar alguns aspectos práticos.

O resistor  $R$  constitui a *impedância de entrada* do integrador (veja esse conceito na apostila da experiência anterior). Se essa impedância se for muito baixa, a corrente  $I_R$  drenada da fonte de sinal  $V_{in}$  será muito alta; se for muito alta, a corrente  $I_R$  será muito baixa e poderá ficar próxima da corrente  $I_L$  de entrada do amp-op, invalidando a hipótese de que  $I_L$  é desprezível. Portanto, o limite inferior de  $R$  deve observar a capacidade de corrente da fonte de  $V_{in}$  e por outro lado  $R$  deve ficar pelo menos duas ordens de grandeza abaixo da impedância de entrada do amp-op.

Com relação ao capacitor, veremos mais adiante que não dispomos na prática de valores que abrangem várias ordens de grandeza: para capacitores de melhor precisão e baixas perdas, a faixa disponível se restringe entre picofarads ( $10^{-12}$  F) e alguns microfarads ( $10^{-6}$  F).

#### 4.1.2 Cancelamento da tensão de Offset

Vimos na experiência anterior que os amp-ops apresentam imperfeições que podem resultar em uma *tensão de offset* na saída mesmo quando a tensão diferencial de entrada é nula. Integradores costumam ser usados em circuitos de precisão em que o valor médio (também chamado de *componente ou nível CC*) do sinal pode ser diferente de zero.

Nesses casos, é importante zerar a tensão de *offset* para que esta não venha a se somar à componente CC. No caso particular do integrador, temos que colocar o capacitor  $C$  em curto para garantir que permaneça descarregado durante o ajuste de *offset* como mostra a Figura 4.2. Com entrada em zero e capacitor em curto, ajusta-se o potenciômetro de compensação para zerar a saída.

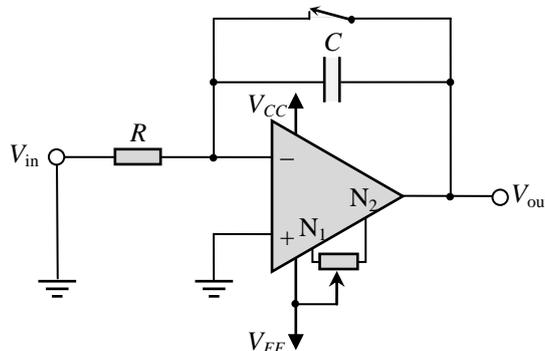


Figura 4.2 Ajuste de offset do integrado com  $V_{in} = 0$  V e capacitor  $C$  em curto.

#### 4.1.3 Aplicação: conversor analógico-digital

Um conversor analógico-digital (AD) converte o valor de uma grandeza contínua em um número inteiro dentro de uma escala predeterminada. O circuito integrador é a base de conversores AD usados em instrumentos que necessitam fazer conversões com precisão, mas que podem levar algum tempo para isso. É o caso, por exemplo, dos multímetros que usamos no laboratório.

A técnica mais usada é a integração de dupla rampa. Vamos ver como ela funciona com o auxílio da Figura 4.3. No instante  $t=0$  a chave  $S_1$  conecta a entrada  $V_{in}$  do integrador à tensão  $V_A$  e a chave  $S_2$  se abre. Com isso, a tensão  $V_A$  começa a ser integrada com o capacitor inicialmente descarregado. No instante  $t=t_1$ , a chave  $S_1$  muda e conecta a tensão  $V_B$  à entrada do integrador. A tensão  $V_B$  tem que ter sinal contrário ao da tensão  $V_A$ .

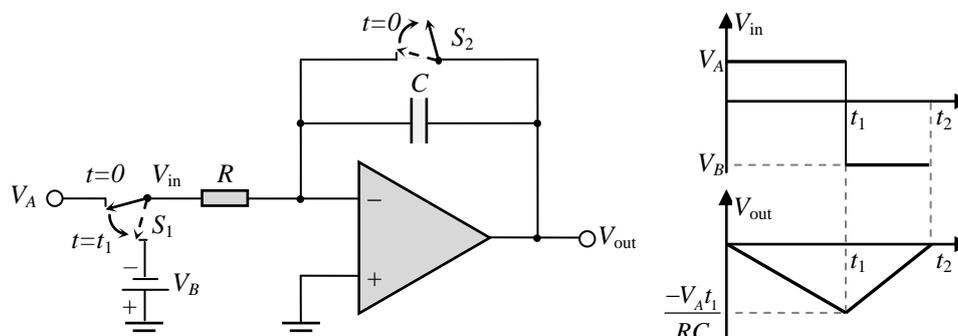


Figura 4.3 Conversão AD por integração de rampa dupla.

A tensão  $V_A$  é a grandeza a ser digitalizada e  $V_B$  é uma tensão de referência, estável e fixa. Como exemplo, vamos supor que  $V_A$  seja positiva e que permaneça constante durante toda a conversão; nesse caso  $V_B$  deve ser negativa. Os gráficos à direita Figura 4.3 mostram a evolução das tensões. No instante  $t=t_1$ , temos  $V_{out} = -V_{in}t_1/RC$  e o circuito passa a integrar a tensão negativa  $V_B$  de modo a fazer  $V_{out}$  crescer até que se torne zero. Tem-se que

$$\frac{-V_A t_1}{RC} = \frac{V_B (t_2 - t_1)}{RC},$$

e portanto

$$t_2 - t_1 = \left| \frac{V_A}{V_B} \right| t_1. \quad (4.5)$$

Desta forma, a influência da constante  $RC$  é eliminada e a conversão se resume à contagem do tempo da segunda integração. Como veremos mais a frente no curso, é possível construir circuitos digitais denominados *contadores binários* que são capazes de medir intervalos de tempo com grande precisão.

Infelizmente, para testar esse conversor AD no laboratório necessitaríamos de alguns equipamentos que não temos, como por exemplo um gerador programável de funções e chaves analógicas. No entanto, vamos usar uma versão modificada desse circuito para medir capacitores. Mais detalhes logo mais à frente.

## 4.2 Integrador em regime CA

Na prática, os circuitos integradores apresentam alguns problemas para operação em frequências muito baixas, e principalmente com entradas com nível CC não nulo. Como a integral de uma função contínua do tipo  $f(t) = A$  é uma rampa do tipo  $A.t$ , a presença de uma componente contínua no sinal de entrada  $V_{in}$  faz a tensão de saída do integrador aumentar continuamente (em módulo), levando o amp-op a saturar rapidamente.

Em *regime de operação CA*, procura-se garantir que os sinais de entrada e saída tenham valor médio nulo.

**Nota:** o nome **CA** se refere a **qualquer sinal de média nula** – NÃO NECESSARIAMENTE senoidais.

Para eliminar qualquer nível CC que possa existir no sinal de entrada  $V_{in}$ , acrescenta-se um *capacitor de desacoplamento* em série com na entrada do integrador. Essa é a função do capacitor  $C_D$  na Figura 4.4.

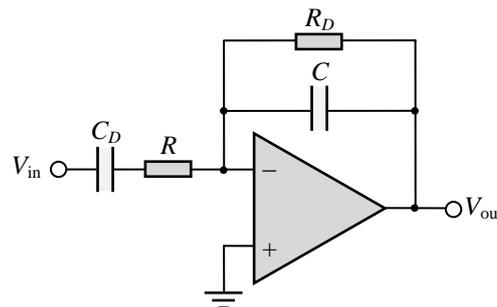


Figura 4.4 Integrador CA.

Idealmente, a saída também deveria ter componente CC igual a zero. No entanto, isso não acontece se a tensão inicial  $V_{C0}$  do capacitor for diferente de zero, como mostra a expressão 4.1. Após o integrador operar por algum tempo, a saída poderá apresentar nível médio não nulo se o sinal de entrada deixar de ser simétrico por algum motivo (ruído, por exemplo), mesmo que por um breve momento.

Para resolver esse problema, acrescenta-se o *resistor de descarga*  $R_D$  em paralelo com o capacitor do integrador, como mostra a Figura 4.4. Qualquer carga CC existente no capacitor se descarregará através desse resistor.

### 4.2.1 Dimensionamento do capacitor de desacoplamento e do resistor de descarga

O capacitor  $C_D$  e o resistor  $R_D$  devem ser dimensionados para que não interfiram (muito) no funcionamento do integrador. Assim, para que o integrador CA da Figura 4.4 se aproxime do integrador ideal (Figura 4.1), é necessário que

- a impedância de  $C_D$  seja desprezível com relação ao resistor  $R$  do integrador (já que estão em série), e
- $R_D$  seja muito grande quando comparado à impedância do capacitor  $C$  do integrador (pois estão em paralelo).

Lembrando que o fasor  $\mathbf{X}_C$  da impedância complexa de um capacitor  $C$  é dado por

$$\mathbf{X}_C(\omega) = \frac{1}{j\omega C}, \quad (4.6)$$

temos as relações para dimensionar o capacitor de desacoplamento e o resistor de descarregamento:

$$\left| \frac{1}{j\omega C_D} \right| \ll R \Rightarrow C_D \gg \frac{1}{\omega R}, \quad (4.7)$$

$$R_D \gg \left| \frac{1}{j\omega C} \right| \Rightarrow R_D \gg \frac{1}{\omega C}, \quad (4.8)$$

onde  $\omega$  é a frequência do sinal de entrada (em rad/s) e  $j$  é o número imaginário. Obviamente, é impossível garantir essas condições em qualquer frequência. Assim, temos que saber para qual faixa de frequência vamos projetar o integrador e escolher  $C_D$  e  $R_D$  suficientemente grandes para que as condições acima sejam satisfeitas mesmo na *menor* frequência de operação do circuito.

Mas quão grande  $C_D$  e  $R_D$  devem ser? Como critério, podemos considerar a precisão dos demais componentes do circuito. Por exemplo, no laboratório usaremos resistores e capacitores com 5% de precisão. Portanto, escolhendo  $C_D$  e  $R_D$  pelo menos  $1/0,05 = 20$  vezes maiores que seus valores de referência, garantimos que o efeito deles no circuito não será maior do que o causado pela imprecisão em  $R$  e  $C$ , respectivamente.

De fato, a associação em série do capacitor  $C_D$  e do resistor  $R$  forma um *filtro passa-altas*, enquanto que a associação em paralelo do resistor  $R_D$  com o capacitor  $C$  forma um *filtro passa-baixas*, e as condições acima estão relacionadas às *frequências de corte* desses filtros, como veremos mais adiante.

#### 4.2.2 Aplicação: medidor de capacitância

Vamos ver como usar o integrador AC para medir a capacitância de capacitores. Suponha que se tenha na entrada  $V_{in}$  uma onda quadrada de amplitude  $V_p$  ( $2V_p$  pico a pico) e período  $T$ , como mostra a Figura 4.5.

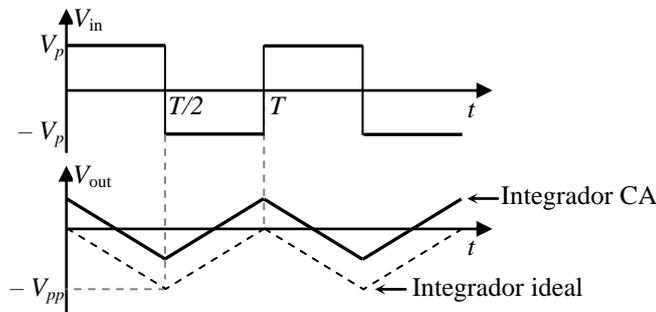


Figura 4.5 Integrador AC com onda quadrada de entrada.

O sinal  $V_{out}$  tracejado representa o sinal que seria gerado por um integrador ideal, que manteria o nível médio da integral. Em linha contínua, tem-se o sinal de saída do integrador CA, no qual o resistor de descarga  $R_D$  zera a componente CC do sinal após algum tempo de funcionamento, deixando-o simétrico com relação ao nível de 0 V. A amplitude pico a pico ( $V_{pp}$ ) de ambos os sinais é a mesma e é dada por

$$V_{pp} = \frac{V_p T}{RC 2},$$

e portanto, sabendo-se os demais parâmetros do circuito, podemos determinar o valor do capacitor  $C$  por

$$C = \frac{V_p}{2fV_{pp}R}, \quad (f = 1/T, \text{ em Hz}) \quad (4.9)$$

No laboratório, poderemos ajustar convenientemente a frequência  $f$  para ter  $V_{pp}$  proporcional a  $V_p$ , e dessa forma cancelá-los na expressão acima. Com isso, o valor do capacitor será determinado pela frequência e o resistor.

#### 4.3 Diferenciador

O circuito da Figura 4.6 produz um sinal de saída proporcional à derivada no tempo do sinal de entrada. Ou seja,

$$V_{out}(t) = -RC \frac{dV_{in}(t)}{dt}. \quad (4.10)$$

Repare que o ganho ( $-RC$ ) do diferenciador tem a dimensão de tempo (unidade: segundos) e é *negativo*, o que significa que a saída estará invertida com relação a derivada do sinal de entrada.

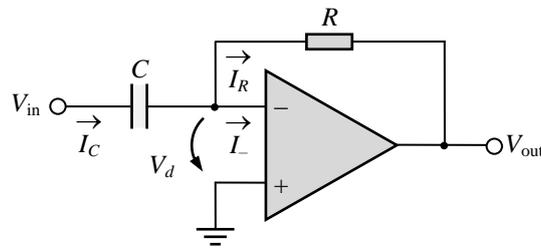


Figura 4.6 Circuito Diferenciador

Adotando novamente as aproximações relativas ao amp-op ideal, temos:

- Assumindo que o ganho diferencial  $A_o$  seja infinito e que a saída  $V_{out}$  não esteja saturada, a tensão diferencial  $V_d$  é forçada a zero pela realimentação negativa. Como a entrada não inversora está aterrada,  $V_+$  é zero e o valor de  $V_-$  é aproximadamente **zero** (*terra virtual*). Assim, a tensão sobre o capacitor  $V_C$  é aproximadamente igual a  $V_{in}$  e pela expressão 4.2 temos a corrente  $I_C$  dada por

$$I_C \cong C \frac{dV_{in}}{dt} \tag{4.11}$$

- Como o amp-op tem impedância de entrada infinita, a corrente  $I_L$  no terminal ‘-’ é desprezível. Assim, toda corrente  $I_C$  que chega ao ponto X é desviada para o resistor R, ou seja as correntes  $I_R$  e  $I_C$  são quase as mesmas. Lembrando que  $V_-$  é praticamente nula, a tensão de saída é dada por

$$V_{out} = V_- - RI_R \cong -RI_C,$$

onde, substituindo  $I_C$  pela expressão 4.11, chega-se à expressão 4.10, como queríamos mostrar.

Na prática, os circuitos diferenciadores apresentam problemas para operação em frequências muito altas. Uma vez que qualquer variação rápida na tensão de entrada resulta em um sinal de grande amplitude na saída, o circuito pode produzir níveis altos de tensão devido a presença de ruído na entrada.

### 4.4 Filtros

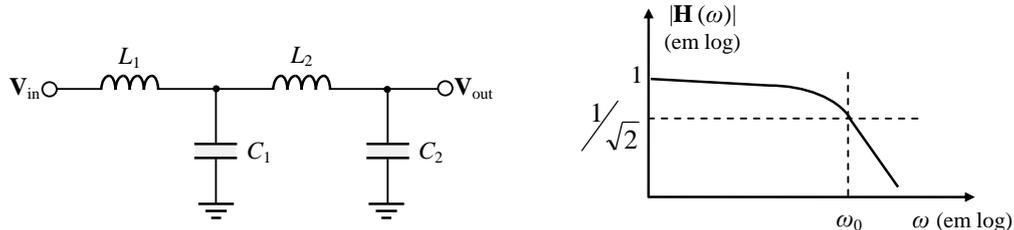


Figura 4.7 Filtro passa-baixas passivo (esquerda) e sua resposta em frequência (direita).

Um filtro é um circuito cuja função é deixar passar sinais em uma certa faixa de frequências, rejeitando (ou atenuando) as outras frequências fora dessa faixa. A Figura 4.7 mostra um filtro passivo tipo passa-baixas.

Em um circuito linear em regime senoidal, todas as tensões e correntes do circuito variam senoidalmente no tempo com a mesma frequência e podem ser representadas por *fasores* – números complexos que representam apenas as amplitudes e fases das senóides. Por exemplo, se o sinal de entrada do sistema varia no tempo conforme

$$V_{in}(t) = V_{p_{in}} \cos(\omega t + \varphi_{in}),$$

onde  $V_{p_{in}}$  é amplitude (ou valor de pico),  $\omega$  é a frequência (em rad/s) e  $\varphi_{in}$  é a fase inicial (em rad) em  $t = 0$ . O fasor correspondente é dado por

$$\mathbf{V}_{in} = V_{p_{in}} e^{j\varphi_{in}},$$

no qual subentende-se a frequência  $\omega$ , pois em um circuito linear todas as tensões e correntes tem a mesma frequência do sinal de entrada (nota: neste texto, indicaremos os fasores e outros números complexos por variáveis **em negrito**). Em geral adota-se como referência de fase ( $\varphi_{in} = 0$ ) o sinal de entrada, que neste caso reduz-se a um número real ( $\mathbf{V}_{in} = V_{p_{in}}$ ). Com isso, a fase de qualquer tensão ou corrente do circuito corresponde à defasagem com relação a  $\mathbf{V}_{in}$ .

Define-se a resposta em frequência do circuito pela razão complexa

$$\mathbf{H}(\omega) \triangleq \frac{\mathbf{V}_{out}}{\mathbf{V}_{in}}, \tag{4.12}$$

cujos módulo, denominado *ganho de tensão em frequência* ou *resposta em frequência*, é dado por

$$|\mathbf{H}(\omega)| \triangleq \sqrt{\mathbf{H}(\omega) \cdot \mathbf{H}^*(\omega)} = \frac{V_{p_{out}}}{V_{p_{in}}}, \quad (4.13)$$

onde  $\mathbf{H}^*(\omega)$  representa o conjugado de  $\mathbf{H}(\omega)$ .

Voltando à Figura 4.8, repare que o gráfico de  $|\mathbf{H}(\omega)|$  (diagrama de Bode) indica que sinais de baixa frequência passam pelo filtro, enquanto que os de alta frequência são fortemente atenuados. Isto acontece porque, para altas frequências, o módulo da impedância  $\mathbf{X}_C$  dos capacitores tende a zero, uma vez que

$$\mathbf{X}_C(\omega) = \frac{1}{j\omega C}. \quad (4.14)$$

Por sua vez, os indutores apresentam alta impedância em altas frequências, pois

$$\mathbf{X}_L(\omega) = j\omega L. \quad (4.15)$$

Portanto, componentes de alta frequência do sinal tem dificuldade para passar pelos indutores e ainda são desviados para o terra pelos capacitores.

Como o ganho de um filtro varia ordens de grandeza em função da frequência, é conveniente adotar uma escala logarítmica. O ganho de tensão é medido em decibéis (dB), definido por

$$|\mathbf{H}|_{dB} = 20 \log \left( \left| \frac{\mathbf{V}_{out}}{\mathbf{V}_{in}} \right| \right) \text{ dB}, \quad (4.16)$$

onde  $\log(\cdot)$  é a função logarítmica em base dez. Como a potência de um sinal é proporcional ao quadrado da tensão, equivalentemente o ganho em dB pode ser dado por

$$|\mathbf{H}|_{dB} = 10 \log \left( \frac{P_{out}}{P_{in}} \right) \text{ dB}, \quad (4.17)$$

onde  $P_{out}$  é a potência do sinal de saída e  $P_{in}$  é a potência do sinal de entrada.

Por definição, a frequência de corte  $\omega_0$  é aquela em que o ganho de tensão cai para  $1/\sqrt{2}$  de seu valor máximo (ou 70,7%). Ou, equivalentemente, é a frequência em que o ganho de potência cai pela metade. Na frequência de corte, o ganho cai aproximadamente 3 dB com relação ao ganho máximo (que, no caso dos filtros passa-baixas, corresponde ao ganho em CC).

Os filtros passivos em geral requerem a presença de um indutor que é um componente pesado, caro e difícil de ser miniaturizado. Os filtros passivos também não permitem ganho de tensão (apenas atenuação) e possuem perda resistiva interna, denominada perda de inserção, pois os indutores e capacitores não são componentes ideais. Para evitar esses inconvenientes, são utilizados os filtros ativos.

#### 4.5 Filtro Ativo Passa-baixas de Primeira Ordem

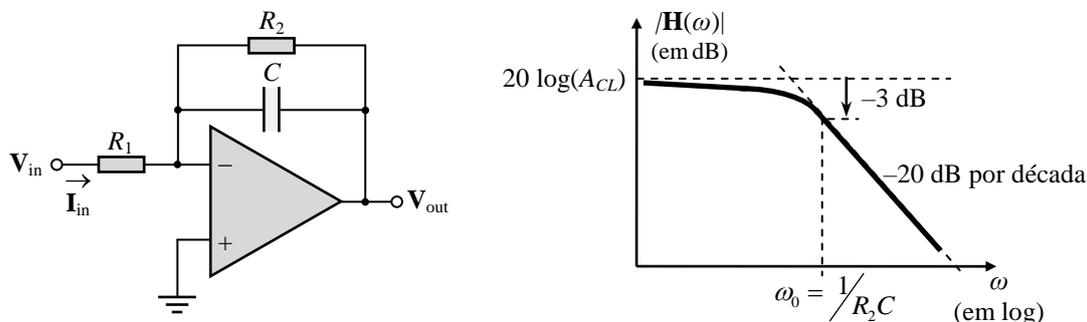


Figura 4.8 Filtro passa-baixas de primeira ordem e sua resposta em frequência.

A Figura 4.8 mostra um filtro ativo passa-baixas de primeira ordem, que é assim denominado por possuir apenas um polo em sua função de transferência. Podemos mostrar que a resposta em frequência deste circuito é dada por

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{A_{CL}}{1 + j\omega R_2 C}, \quad (4.18)$$

onde  $A_{CL}$  é o chamado *ganho em malha fechada* e é dado por

$$A_{CL} = -\frac{R_2}{R_1}. \quad (4.19)$$

Observe que  $A_{CL}$  é o ganho máximo do filtro e ocorre para  $\omega$  igual a zero (ou seja, quando tem-se na entrada  $V_{in}$  um nível CC constante). Em baixas frequências, o capacitor se comporta como um circuito aberto (podendo ser ignorado) e o circuito se aproxima de um amplificador inversor.

Uma vez que o módulo de  $\mathbf{H}(\omega)$  é dado por

$$|\mathbf{H}(\omega)| = \frac{|A_{CL}|}{\sqrt{1+(\omega R_2 C)^2}}, \quad (4.20)$$

a frequência de corte será o inverso da constante de tempo  $R_2 C$ , ou seja,

$$\omega_0 = \frac{1}{R_2 C} \quad (\text{em rad/s}). \quad (4.21)$$

Vamos agora analisar o que acontece com a resposta do circuito em altas frequências. Repare que, para  $\omega$  muito maior que  $\omega_0$  (ou seja,  $\omega \gg 1/R_2 C$ ), a expressão 4.20 pode ser aproximada por

$$|\mathbf{H}(\omega)|_{(\omega \gg \omega_0)} \cong \frac{\omega_0}{\omega} |A_{CL}| \quad (\text{adimensional}), \text{ ou equivalentemente em decibéis,}$$

$$|\mathbf{H}(\omega)|_{(\omega \gg \omega_0)} \cong 20 \cdot \log(\omega_0 \cdot |A_{CL}|) - 20 \cdot \log(\omega) \quad \text{dB}. \quad (4.22)$$

O primeiro termo à direita da igualdade 4.22 não varia com a frequência, mas o segundo indica que o ganho cai 20 dB por década em frequências muito maiores que  $\omega_0$ , como mostra o diagrama de Bode da Figura 4.8. Isto é, o ganho de tensão diminui dez vezes a cada aumento de frequência de dez vezes. Um decaimento de 20 dB por década equivale a aproximadamente 6 dB por oitava (uma oitava corresponde a uma variação em frequência de duas vezes).

#### 4.5.1 Resposta em Frequência

Vamos agora mostrar como se chega à expressão 4.18. Para isso, basta substituir o resistor  $R_2$  e o capacitor pela impedância complexa equivalente  $\mathbf{Z}_2$ , como mostra a Figura 4.9.

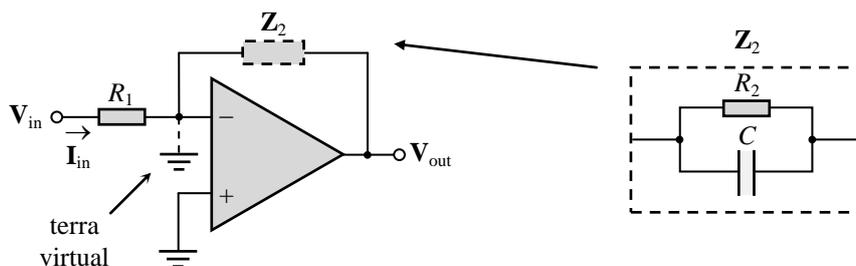


Figura 4.9 Filtro passa-baixas como amplificador inversor.

A impedância  $\mathbf{Z}_2$  é constituída pela associação em paralelo do resistor  $R_2$  e do capacitor  $C$ . Ou seja,

$$\mathbf{Z}_2 = \frac{R_2 \mathbf{X}_C}{R_2 + \mathbf{X}_C} = R_2 \frac{1}{1 + j\omega R_2 C}, \quad (4.23)$$

onde  $\mathbf{X}_C$  é a impedância do capacitor, dada pela expressão 4.14. Desta forma, a resposta  $\mathbf{H}(\omega)$  do filtro é análoga a resposta do amplificador inversor e é dada por

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = -\frac{\mathbf{Z}_2}{R_1},$$

onde, substituindo-se pela expressão 4.23, chega-se à expressão 4.18 da resposta em frequência do filtro.

Repare que o ganho e a frequência de corte do filtro fornecem apenas relações entre resistores e capacitores. Para especificar completamente os seus valores, temos que usar outros critérios, como a *impedância de entrada* do filtro – se for muito baixa, vai impor uma elevada corrente  $I_{in}$  à fonte do sinal de entrada; se for muito alta, diminuirá a

corrente  $I_{in}$  a ponto de deixá-la próxima da corrente de entrada do amp-op, o que invalidaria nossas hipóteses simplificadoras. Além disso, como veremos na seção 4.6.3, as características dos capacitores disponíveis comercialmente restringem a escolha dos valores destes.

#### 4.5.2 Impedância de Entrada

A Figura 4.9 permite determinar a impedância de entrada  $Z_{in}$  do filtro, que é a impedância vista pela fonte de sinal de entrada ( $V_{in}$ ). Neste caso, como a tensão  $V_-$  na entrada inversora é praticamente nula (terra virtual), tem-se

$$Z_{in} \triangleq \frac{V_{in}}{I_{in}} = R_1. \quad (4.24)$$

#### 4.5.3 Resposta ao Degrau e Constante de Tempo

Suponha que se deseje determinar a frequência de corte de um filtro como o da Figura 4.8. Podemos fazer isso experimentalmente, aplicando uma *entrada em degrau* e analisando a saída resultante.

Analisando tensões e correntes no domínio do tempo na Figura 4.9, devido ao terra virtual presente na entrada inversora, podemos dizer que

$$I_{in} \approx \frac{V_{in}}{R_1}, \quad V_{out} \approx -R_2 I_{R2} \quad \text{e} \quad V_{out} \approx -V_C,$$

e devido à alta resistência de entrada do amp-op, temos que

$$I_{in} \approx I_{R2} + I_C, \quad \text{com} \quad I_{R2} \approx \frac{V_{out}}{R_2} \quad \text{e} \quad I_C \approx C\dot{V}_{out}.$$

A partir das aproximações acima, chega-se à equação diferencial do filtro:

$$R_2 C \dot{V}_{out} + V_{out} = -\frac{R_2}{R_1} V_{in}. \quad (4.25)$$

Basta portanto resolver a equação diferencial de primeira ordem 4.25 com  $V_{in} = V_p$  (degrau de amplitude  $V_p$ ) e condição inicial  $V_{out}(t=0) = 0$ . Em particular, no apêndice você poderá encontrar a solução por meio de *Transformada de Laplace* (fora os outros métodos que você certamente também conhece...)

Sendo  $A_{CL}$  e  $\omega_0$  são respectivamente o ganho em malha fechada e a frequência de corte, já definidas, a saída gerada em resposta a uma entrada em degrau de amplitude  $V_p$  é dada por

$$V_{out}(t) = A_{CL} V_p \cdot (1 - e^{-\omega_0 t}) \quad (\text{para } t > 0), \quad (4.26)$$

A *constante de tempo*  $\tau$  do sistema é dada por  $\tau = 1/\omega_0$ . No instante particular de tempo  $t = \tau$ , temos

$$V_{out}(t)|_{t=\tau} = A_{CL} V_p \cdot (1 - e^{-1}) = 0,63 A_{CL} V_p. \quad (4.27)$$

Como mostra a Figura 4.10, podemos determinar constante de tempo (e inversamente a frequência de corte) medindo o tempo necessário para o sinal de saída atingir 63% de seu valor de regime.

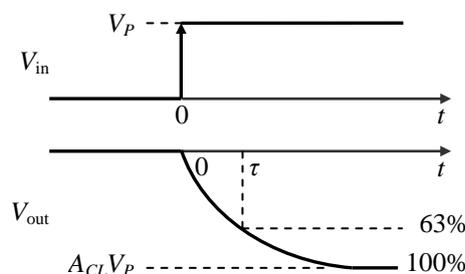


Figura 4.10 Resposta ao degrau e constante de tempo do filtro passa-baixas de primeira ordem

A resposta ao degrau exemplifica bem o funcionamento do filtro. A borda vertical do sinal de entrada  $V_{IN}$  é uma variação abrupta e por isso requer componentes de alta frequência para que aconteça. De fato, um degrau ideal, com borda perfeitamente vertical e com transição instantânea de um nível para outro, envolveria componentes de frequência infinita.

O gráfico da saída  $V_{out}$  mostra que o filtro atenua as componentes de alta frequência do sinal de entrada e deixa passar as de baixa frequência, o que suaviza a borda de subida e torna a transição mais lenta. Note também que

quanto menor for a frequência de corte, maior será a constante de tempo do filtro e maior será o tempo necessário para o sinal de saída transitar.

### 4.6 Filtro Ativo Passa-altas de Primeira Ordem

A Figura 4.11 mostra um filtro passa-altas de primeira ordem. Podemos mostrar que

$$\mathbf{H}(\omega) = A_{CL} \frac{j\omega R_1 C}{1 + j\omega R_1 C}. \tag{4.28}$$

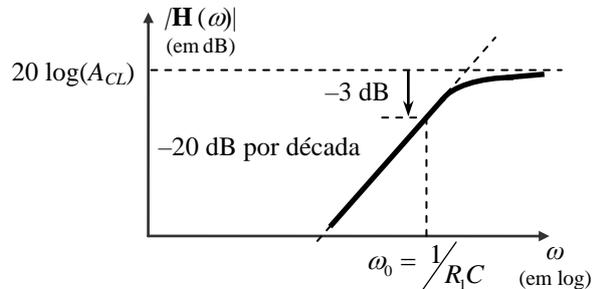
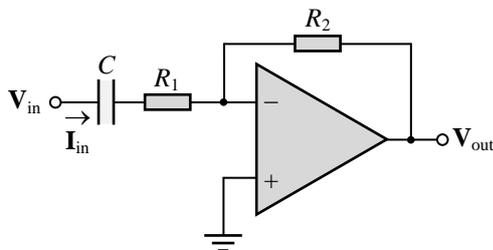


Figura 4.11 Filtro passa-altas de primeira ordem e sua resposta em frequência.

O ganho em malha fechada  $A_{CL}$  é o mesmo já visto ( $A_{CL} = -R_2/R_1$ ). O módulo de  $\mathbf{H}(\omega)$  é dado por

$$|\mathbf{H}(\omega)| = A_{CL} \frac{\omega R_1 C}{\sqrt{1 + (\omega R_1 C)^2}}, \tag{4.29}$$

e a frequência de corte  $\omega_0$  é dada por

$$\omega_0 = \frac{1}{R_1 C} \text{ (em rad/s)}. \tag{4.30}$$

Fazendo-se  $\omega$  tender ao infinito, vemos que a resposta do circuito tende ao ganho em malha fechada  $A_{CL}$ . Portanto, esse é o ganho máximo do filtro e ocorre em altas frequências, como se pode ver na região direta do diagrama de Bode da Figura 4.11. Para frequências muito menores que a frequência de corte  $\omega_0$ , a resposta tende a

$$|\mathbf{H}(\omega)|_{(\omega \ll \omega_0)} \cong \frac{\omega}{\omega_0} |A_{CL}|, \text{ o que equivale, em decibéis, a}$$

$$|\mathbf{H}(\omega)|_{(\omega \ll \omega_0)} \cong 20 \cdot \log\left(\frac{|A_{CL}|}{\omega_0}\right) + 20 \cdot \log(\omega) \text{ dB}. \tag{4.31}$$

Portanto, o filtro atenua fortemente sinais com frequências abaixo de  $\omega_0$ , com uma queda de 20 dB aproximadamente a cada década de redução da frequência (ou equivalentemente  $-6$  dB por oitava).

#### 4.6.1 Resposta em Frequência

Para se chegar à expressão 4.28, usa-se o mesmo procedimento da seção anterior, substituindo o resistor  $R_1$  e o capacitor pela impedância complexa equivalente  $\mathbf{Z}_1$ , como mostra a Figura 4.12.

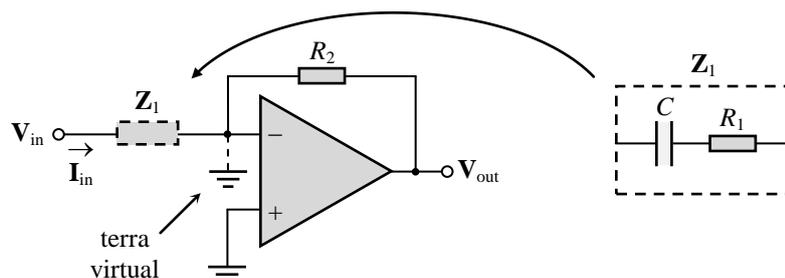


Figura 4.12 Filtro passa-altas como amplificador inversor.

A impedância  $\mathbf{Z}_1$  é constituída pela associação em série do resistor  $R_1$  e do capacitor  $C$ . Ou seja,

$$\mathbf{Z}_1 = R_1 + \mathbf{X}_C = R_1 + \frac{1}{j\omega C}, \quad (4.32)$$

e a resposta  $\mathbf{H}(\omega)$  do filtro é dada por

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_{\text{out}}}{\mathbf{V}_{\text{in}}} = -\frac{R_2}{\mathbf{Z}_1},$$

onde, substituindo-se pela expressão 4.32, chega-se a expressão 4.28 da resposta em frequência.

#### 4.6.2 Impedância de entrada

Pela Figura 4.12, devido ao terra virtual presente na entrada inversora, vê-se que a impedância de entrada deste circuito é determinada pela expressão de  $\mathbf{Z}_1$  (4.32).

De fato, o filtro propriamente dito se resume a esta impedância – o resistor  $R_2$  e o amp-op servem apenas para proporcionar o ganho do filtro ativo. Como o módulo de  $\mathbf{Z}_1$  varia com a frequência, componentes do sinal que tenham frequências diferentes encontram diferentes condições de entrada: alta impedância em baixas frequências (isto é, frequências muito menores que a frequência de corte) e impedância tendendo ao mínimo (dado por  $R_1$ ) para altas frequências.

Repare que se trata da mesma impedância formada pelo capacitor de desacoplamento  $C_D$  e a resistência de entrada  $R$  do circuito integrador (Figura 4.4).

#### 4.6.3 Resposta ao Degrau e Constante de Tempo

Pela análise de correntes e tensões no domínio do tempo na Figura 4.12, considerando a presença do terra virtual na entrada inversora, temos que

$$V_{\text{in}} \approx V_C + R_1 I_{\text{in}} \quad \text{e} \quad V_{\text{out}} \approx -R_2 I_{R2},$$

e devido à alta resistência de entrada do amp-op, temos que

$$I_{\text{in}} \approx I_{R2}, \quad \text{com} \quad I_{R2} \approx \frac{V_{\text{out}}}{R_2}.$$

A partir das aproximações acima, chega-se à equação diferencial do filtro:

$$\frac{1}{R_1 C} \int_0^t V_{\text{out}} dt + V_{\text{out}} = -\frac{R_2}{R_1} V_{\text{in}}. \quad (4.33)$$

Novamente, temos uma equação diferencial de primeira ordem para resolver, com  $V_{\text{in}} = V_p$  (degrau de amplitude  $V_p$ ) e condição inicial  $V_{\text{out}}(t=0) = 0$  (veja no apêndice a solução por meio de *Transformada de Laplace*).

Para uma entrada em degrau de amplitude  $V_p$ , a saída decai exponencialmente no tempo segundo

$$V_{\text{out}}(t) = A_{CL} V_p e^{-\omega_0 t} \quad (\text{para } t > 0), \quad (4.34)$$

sendo  $A_{CL}$  e  $\omega_0$  são respectivamente o ganho em malha fechada e a frequência de corte.

Sendo a *constante de tempo*  $\tau = 1/\omega_0$ , no instante particular  $t = \tau$

$$V_{\text{out}}(t)|_{t=\tau} = A_{CL} V_p \cdot e^{-1} = 0,37 A_{CL} V_p. \quad (4.35)$$

Como mostra a Figura 4.10, a constante de tempo é dada pelo instante em que o sinal de saída cai a 37% de seu valor inicial.

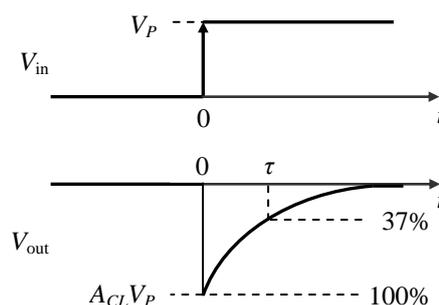


Figura 4.13 Resposta ao degrau e constante de tempo do filtro passa-altas de primeira ordem.

O gráfico de  $V_{out}$  mostra que o filtro deixa passar as componentes de alta frequência que constituem o salto de nível em  $t = 0$ . Em seguida, faz com que a tensão de saída decaia para 0 V, o que equivale a eliminar a componente de frequência zero do sinal (ou seja, o nível CC).

Quanto maior for a frequência de corte, menor será a constante de tempo e mais rapidamente a saída decairá para zero após o degrau.

## 4.7 Materiais

### 4.7.1 Capacitores

Em circuitos de precisão como integradores e filtros para sinais, convém empregar capacitores com baixas perdas e boa estabilidade térmica. Com estas características, encontramos:

- Capacitores de mica: de 1 pF a 100 nF, tensão máxima de 100 a 600 V. Apresentam boa precisão e são indicados para aplicações em rádio frequência.
- Capacitores de teflon: de 1 nF a 2  $\mu$ F, tensão máxima de 50 a 600 V. Possuem excelente precisão e ótima estabilidade térmica, porém são mais caros.
- Capacitores cerâmicos: 1 pF a 1  $\mu$ F, tensão máxima de 50 a 30 kV. Não são os mais indicados, pois possuem baixa precisão, perdas moderadas e baixa estabilidade térmica. Mas são mais baratos, de menor tamanho e podem ser encontrados em ampla faixa de valores e de tensão.

Nesta experiência, usaremos capacitores cerâmicos como os que usamos nas anteriores. Apesar de suas limitações, são adequados para o nível de precisão esperado para a nossa aplicação.

Lembrando que o valor da capacitância é indicado no corpo do capacitor na forma de três algarismos, de forma análogo aos resistores, em picofarads ( $10^{-12}$  F). Ou seja, os dois primeiros algarismos se referem ao valor e o terceiro é o multiplicador em décadas. Exemplo: “104” corresponde a  $10 \times 10^4$  pF = 100 nF (ou 10 kF).

### 4.7.2 Amplificador Operacional

Usaremos o mesmo amp-op da experiência anterior, o TL081. O encapsulamento e a pinagem do CI são apresentados na Figura 4.14.

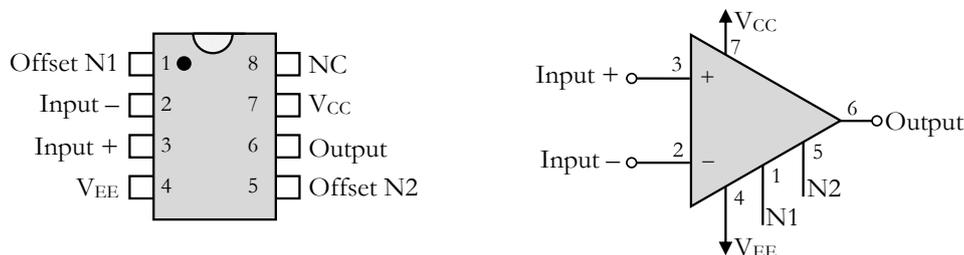


Figura 4.14 Amplificador operacional TL081

## 4.8 Pré-Relatório e Relatório

A Parte B da apostila contém dois tipos de itens que você deverá responder:

- **Exercícios:** constituem o *pré-relatório*; podem ser feitos antes da aula, mas recomendamos que sejam feitos com antecedência para que se possa aproveitar melhor o tempo no laboratório.
- **Anotações:** devem ser feitas individualmente *durante* a aula e constituem o *relatório*.

**ATENÇÃO:** leia as atividades da PARTE B e não apenas os enunciados dos exercícios do pré-relatório

Muitos detalhes necessários para fazer os exercícios estão descritos nas atividades em que se inserem. Além disso, você já terá uma noção do que deverá fazer e perderá menos tempo com a leitura durante a aula.

## Apêndice – Transformada de Laplace

Vejam como encontrar a resposta ao degrau do filtro passa-baixas no domínio da frequência complexa  $s$ .

Na expressão 4.18, substituindo-se a frequência  $j\omega$  (em regime permanente) pela frequência complexa  $s$  da transformada de Laplace, tem-se

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\omega_0}{s + \omega_0} A_{CL}, \quad (4.36)$$

onde  $A_{CL}$  e  $\omega_0$  são respectivamente o ganho em malha fechada e a frequência de corte, já definidas. Como se vê, trata-se de um sistema dinâmico com um polo em  $-\omega_0$ .

A transformada da tensão de saída é dada por

$$\mathbf{V}_{\text{out}}(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{V}_{\text{in}}(s), \quad (4.37)$$

e, sendo  $V_{\text{in}}$  um degrau de amplitude  $V_p$ ,

$$\mathbf{V}_{\text{in}}(s) = \frac{V_p}{s}. \quad (4.38)$$

Portanto a expressão da tensão de saída em  $s$  é dada por

$$\mathbf{V}_{\text{out}}(s) = \frac{\omega_0}{s + \omega_0} \frac{A_{CL}V_p}{s}, \quad (4.39)$$

cuja a *antitransformada de Laplace* é dada por

$$V_{\text{out}}(t) = A_{CL}V_p \cdot (1 - e^{-\omega_0 t}) \quad (\text{para } t > 0), \quad (4.40)$$

Analogamente para o filtro passa-altas, temos que o comportamento dinâmico do filtro passa-altas da Figura 4.11 é descrito em frequência complexa  $s$  por

$$\mathbf{H}(s) = \frac{s}{s + \omega_0} A_{CL}. \quad (4.41)$$

O sistema tem um polo em  $-\omega_0$  e um zero em  $s = 0$ . Para uma entrada em degrau de amplitude  $V_p$ , a saída decai exponencialmente no tempo segundo

$$V_{\text{out}}(t) = A_{CL}V_p e^{-\omega_0 t} \quad (\text{para } t > 0). \quad (4.42)$$

que é a antitransformada de  $\mathbf{V}_{\text{out}}(s) = \mathbf{H}(s) \cdot V_p/s$ .