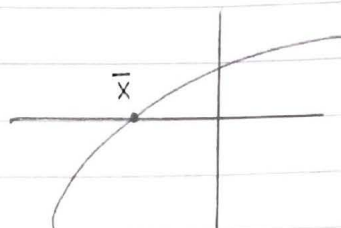


Precisão Pré-Fixada

O método de Newton, nas condições do teorema que enunciamos ($f', f'' \neq 0$), produz uma sequência monótona $X_{n+1} = \varphi_f(X_n)$ que converge para a raiz $\bar{x}$.

Mas como decidir se estamos próximos o bastante de $\bar{x}$?



$$\varphi_f(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Procuramos solução de $f(x) = 0$ (*)

O método de Newton (e outros), trocam a equação de raiz (*) por uma equação de ponto fixo:

$$\varphi(x) = x \quad (**)$$

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e = 2,718...$$

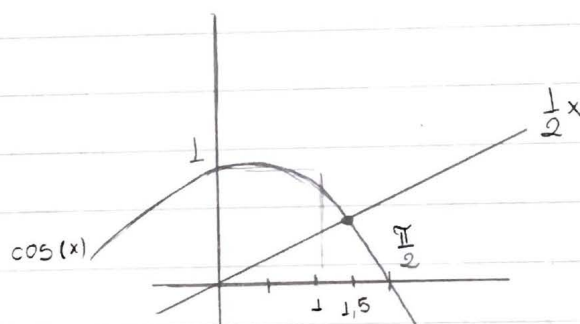
Ex.: $f(x) = \frac{1}{2}x - \cos(x)$

Tem raiz no intervalo:

$$[0; \frac{\pi}{2}]$$

$$[0; 1,5]$$

$$[0,5; 1,5]$$



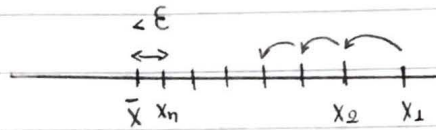
aula anterior...

$$\varphi_f(x) = \frac{x \sin(x) + \cos(x)}{\frac{1}{2} + \sin(x)}$$

$$0,785 \xrightarrow{\varphi_f} 1,045922853... \xrightarrow{\varphi_f} 1,029917273...$$

$$\xrightarrow{\varphi_f} 1,02986653 \xrightarrow{\varphi_f} 1,029866529...$$

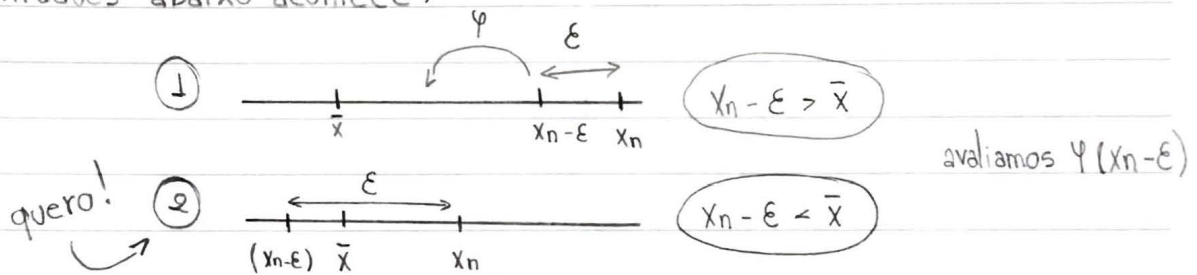
Suponha que um método iterativo (eq. MN) produz uma sequência monótona convergindo para a raiz $\bar{x}$. Por exemplo, x_n decresce para $\bar{x}$,



Dada uma precisão $\epsilon > 0$, queremos decidir quando parar de iterar o método de forma que $|x_n - \bar{x}| < \epsilon$



Como a sequência é decrescente, subtraímos ϵ de x_n . Uma das duas possibilidades abaixo acontece:



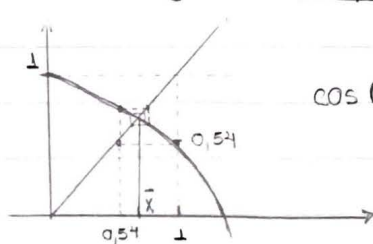
① Se $\psi(x_n - \epsilon) < x_n - \epsilon$ então $x_n - \epsilon$ ainda está à direita de $\bar{x}$, isto é, $x_n - \epsilon > \bar{x}$ caso ①

② Por outro lado, se $\psi(x_n - \epsilon) > x_n - \epsilon$, então $x_n - \epsilon$ está à esquerda de $\bar{x}$, isto é, $x_n - \epsilon < \bar{x} < x_n$

No caso ②, sabemos então que $|x_n - \bar{x}| < \epsilon$

No caso ①, itere muitas vezes e repita até chegar no caso ②

Outro tipo de convergência: Sequência alternada



$$x_n < \bar{x} < x_{n+1}$$

$$\cos(x) = x$$

$$\bar{x} \approx 0,739085133$$

Ex.: Procurar a solução de $\cos(x) = x$ usando o método de Newton

$$\cos(x) = x \iff \underbrace{\cos(x) - x}_{f(x)} = 0$$

Queremos raiz para $f(x)$:

$$\text{M.N. } \varphi_f(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{\cos(x) - x}{-\sin(x) - 1}$$

$$\varphi_f(x) = \frac{-x \sin(x) - x - \cos(x) + x}{-\sin(x) - 1}$$

$$\varphi_f(x) = \frac{x \sin(x) + \cos(x)}{1 + \sin(x)}$$

Para aplicar o teorema, deveríamos encontrar um intervalo $[a, b]$ tal que:

- $f', f'' \neq 0$
- $f(a) \cdot f(b) < 0$
- $\varphi_f(a), \varphi_f(b) \in [a, b]$

Tentamos $[0, 1] = [a, b]$

$$f(0) = 1 \quad f(1) = \cos(1) - 1 = 0,54... - 1 < 0$$

$$f'(x) = -\sin(x) - 1 < 0$$

$$f''(x) = -\cos(x) < 0$$

$$\varphi_f(x) = \frac{x \sin(x) + \cos(x)}{1 + \sin(x)}$$

$$\varphi_f(0) = 1$$

$$0 < \bar{x} < \varphi_f(1) < 1$$

$$1 \mapsto 0,75036$$

Queremos encontrar a raiz $\bar{x}$ com precisão 10^{-4}

$$\varepsilon = 10^{-4} = 0,0001$$

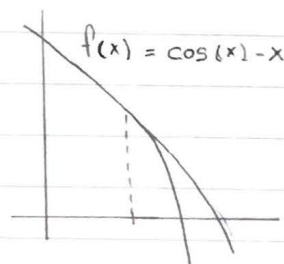
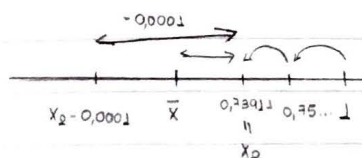
$$x_0 \quad x_1 \quad x_2$$

$$1 \mapsto 0,75036 \mapsto 0,73911$$

pergunta: $|x_2 - \bar{x}| < 0,0001$?

$$x_2 - \varepsilon = 0,73911 - 0,0001 = 0,73901$$

$$\varphi_f(0,73901) = 0,73908$$



$$0,73901 < \bar{x} < 0,73911$$

Algebra Linear

indo em
direção

→ método dos mínimos quadrados

$$\begin{cases} 2u + 3v - 7w = 5 \\ 4u - 6v = -1 \\ u + 2v + 3w = 0 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 4 & -6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 4 & -6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u + 3v - 7w \\ 4u - 6v + 0w \\ 1u + 2v + 3w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u + 3v - 7w \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 7 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ é o produto escalar interno da linha } \begin{bmatrix} 2 & 3 & -7 \end{bmatrix} \text{ com a coluna } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 4 & -6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

$$A \cdot x = \begin{bmatrix} 2u + 3v - 7w \\ 4u - 6v - 0w \\ 1u + 2v + 3w \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = A \cdot \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ | & | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ A \cdot b_1 & A \cdot b_2 & \dots & A \cdot b_n \\ | & | & | & | \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 1 + 0 \times 2 + (-1) \times 3 \\ 1 \times 1 + 3 \times 2 + 5 \times 3 \\ -1 \times 1 + 1 \times 2 + (-1) \times 3 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$A \cdot x$ "linhas x colunas"

combinação linear das
colunas da matriz A usando como
coeficientes as coordenadas do vetor x

Portanto, o produto de A por qualquer vetor x (que tenha tantas coordenadas quanto A tem colunas) é uma combinação linear das colunas de A

$$\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} ; x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

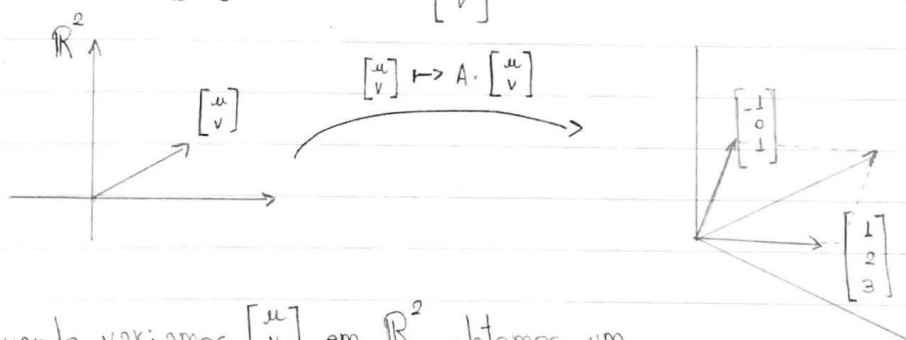
$$A \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = u \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{R}^2 \ni \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \mapsto A \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$T_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\vec{x} \mapsto A \cdot \vec{x}$$

uma transformação linear



Quando variamos $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ em $\mathbb{R}^2$, obtemos um conjunto de $\mathbb{R}^3$ da forma $\left\{ A \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\}$, isto é, todos os vetores em $\mathbb{R}^3$ que são combinações lineares das colunas de A .

subespaço de $\mathbb{R}^3$, chamado
espaço coluna de A

O que é o conjunto $\left\{ A \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 ; \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\}$? $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$A \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = u \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Se A e B são matrizes e as colunas de B são vetores pelos quais podemos multiplicar A (isto é, cada coluna de B tem tantas coordenadas quanto A tem colunas)

$$A \cdot B = A \cdot \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ b_1 & b_2 & \dots & b_l \\ | & | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ Ab_1 & Ab_2 & \dots & Ab_l \\ | & | & | & | \end{bmatrix}$$

A entrada $(A \cdot B)_{ij}$ é o produto da i -ésima linha de A com a j -ésima coluna de B

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 0 & 2 \times 1 & 2 \times 1 \\ + & + & + \\ (-1) \times (-1) & (-1) \times 2 & (-1) \times 3 \\ + & + & + \\ 0 \times 0 & 0 \times 4 & 0 \times 4 \\ + & + & + \\ 3 \times 3 & 3 \times (-2) & 3 \times 0 \end{bmatrix}$$

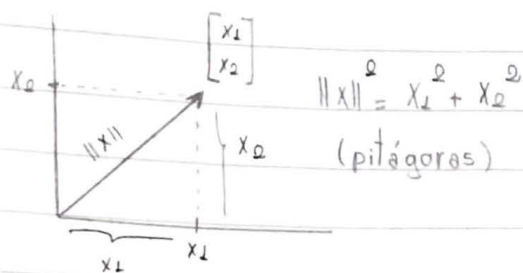
$$\begin{aligned} &+ \begin{pmatrix} 2 \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ (-1) \times \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\ 0 \times \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \\ 3 \times \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{combinação linear} \\ \text{das linhas de } B \text{ usando como} \\ \text{coeficientes as entradas do} \\ \text{vetor linha à esquerda} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Se A e B podem ser multiplicadas (A tem o mesmo número de colunas que B tem de linhas) então cada linha de $A \cdot B$ é uma combinação linear das linhas de B usando como coeficientes as entradas de uma das linhas de A

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times (\text{linha 1 de } B) + (-1) \times (\text{linha 2 de } B) + \dots \\ 1 \times (\text{ " " " " }) + 0 \times (\text{ " " " " }) + \dots \end{bmatrix}$$

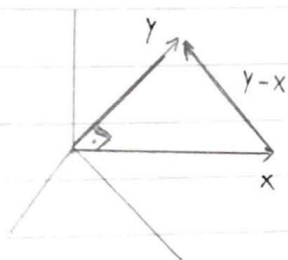
$\begin{matrix} \rightarrow \text{linha 1 de } B \\ \rightarrow \text{linha 2 de } B \end{matrix}$

Ortogonalidade e Norma (tamanho)



Em $\mathbb{R}^n$, definimos a norma do vetor

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{por} \quad \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2$$



para que x e y sejam perpendiculares quero
(*) $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|y-x\|^2$

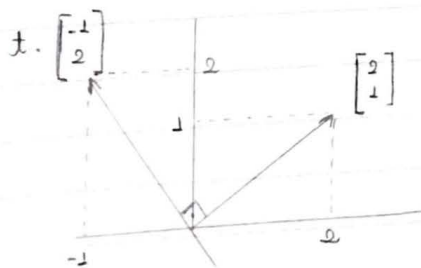
$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$y-x = \begin{bmatrix} y_1-x_1 \\ y_2-x_2 \\ \vdots \\ y_n-x_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 \\ \|y\|^2 = y_1^2 + \dots + y_n^2 \\ \|y-x\|^2 = (y_1-x_1)^2 + \dots + (y_n-x_n)^2 \end{cases}$$

Para que x e y sejam perpendiculares (ortogonais) queremos que valha (*)
Esta equação é equivalente à $0 = (-2)(x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n)$. Isto é,
 $x \perp y \stackrel{\text{def.}}{\iff} x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n = 0$



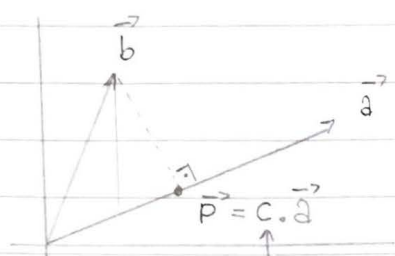
$$x \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = 0$$

definição: $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ são ortogonais se $x^T y = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n = 0$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$x^T y = y^T x$ é chamado o
produto interno de x, y

Projeções (ortogonais)



$c = \text{número real}$

Queremos encontrar $c \in \mathbb{R}$ tal que $p = c \cdot a$ seja a projeção ortogonal de b na direção de a , isto é, queremos que $\vec{a}$ e $(b-p)$ sejam ortogonais, isto é, $a^T(b-p) = 0$

$$0 = a^T(b-p) = a^Tb - a^Tp \Leftrightarrow a^Tp = a^Tb$$

$$a^T(ca) = a^Tb$$

$$c(a^Ta) = a^Tb$$

$$c = \frac{a^Tb}{a^Ta}$$

$$p = \frac{a^Tb}{a^Ta} \cdot a$$

Ex: $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$c = \frac{a^Tb}{a^Ta} = \frac{6}{3} = 2$$

$$a^Ta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3 = \|a\|^2$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad x^Tx = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \|x\|^2$$

$$p = \frac{a^Tb}{a^Ta} \cdot a = 2 \cdot a = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$