PTC 2320 - Programação Matemática Aplicada a Controle - 2ª Lista

1ª Questão: Deseja-se minimizar a seguinte função:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2 - 6x_1 - 7x_2 - 8x_3 + 9$$

- a) Usando a condição necessária de 1ª ordem, encontre um ponto que poderia ser um mínimo local da função
- b) Verifique que o ponto é um mínimo local usando a condição suficiente de 2ª ordem.
- c) Mostre que o ponto é um mínimo global.

2ª Questão: Deseja-se minimizar a seguinte função:

$$f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2.$$

- a) Obtenha as expressões para o gradiente e matriz hessiana da função.
- b) Qual é o mínimo global desta função? Verifique que neste ponto a condição suficiente de 2ª ordem é satisfeita.
- c) Mostre que a matriz hessiana é positiva definida para todo (x_1, x_2) tal que $f(x_1, x_2) < 0.0025$.

3ª Questão: Determine o mínimo global da função

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1^3 + x_1^4.$$

4ª Questão: Seja

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - 3x_1$$

- a) Determine um mínimo local de f .
- b) Porque a solução de a) é um mínimo global?
- c) Encontre o mínimo de f sujeito a $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

5ª Questão: Aplique as condições de 1ª e 2ª ordem à função

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 16x_3^2$$

sujeita à restrição $h(x_1, x_2, x_3) = 0$ e obtenha os pontos de mínimo local (global) para cada caso abaixo:

- a) $h(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 1$
- b) $h(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 - 1$
- c) $h(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 - 1$

6ª Questão: Resolva o seguinte problema de programação quadrática:

$$\min \frac{1}{2}x'Qx + b'x$$

onde

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, b = - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

e obtenha os pontos de mínimo local (global) para cada restrição abaixo:

- a) $x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$.
- b) $x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 4$.

7ª Questão: Resolva o seguinte problema:

$$\begin{aligned} & \text{maximizar } 14x_1 - x_1^2 + 6x_2 - x_2^2 + 7 \\ & \text{sujeito a } x_1 + x_2 \leq 2 \\ & \quad \quad \quad x_1 + 2x_2 \leq 3 \end{aligned}$$

8ª Questão: Resolva o seguinte problema:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } x_2 + x_3 \\ & \text{sujeito a } x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & \quad \quad \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1. \end{aligned}$$

9ª Questão: Resolva o seguinte problema:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - 3x_1 \\ & \text{sujeito a } x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ & \quad \quad \quad 2x_1 + x_2 \geq 1. \end{aligned}$$

10ª Questão: Resolva o seguinte problema:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - 3x_1 \\ & \text{sujeito a } x_1^2 + x_2^2 \leq 1. \end{aligned}$$

11ª Questão: Resolva o seguinte problema:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 \\ & \text{sujeito a } x_1x_2 \leq -1. \end{aligned}$$

12ª Questão: Resolva o seguinte problema:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \\ & \text{sujeito a } x_1^2 + x_2^2 \leq 5, \\ & \quad \quad \quad x_1 + x_2 \leq 3, \\ & \quad \quad \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

13ª Questão: Considere 2 ativos com retornos R_1 e R_2 e fator de correlação, médias, e desvios padrão dados por

$$\rho = -0,5, r_1 = 14\%, r_2 = 20\%, \sigma_1 = 10\%, \sigma_2 = 20\%.$$

Considere também um ativo livre de risco com retorno $r_f = 10\%$. Considere um portfolio com retorno $P = \omega_0 r_f + \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2$, $\omega_0 + \omega_1 + \omega_2 = 1$. Quanto deve ser alocado nos ativos livre de risco, ativo 1 e no ativo 2 de forma a se ter uma carteira de mínima variância e retorno esperado $\mu = 20\%$? Qual é o risco dessa carteira e como ele se compara com o ativo 2 individualmente?

14ª Questão: Considere o seguinte problema de controle de estoque:

$$\begin{aligned} \min J(u) &= \sum_{k=0}^T \frac{u(k)^2}{2(k+1)^2} \\ \text{sujeito a } x(k+1) &= x(k) + u(k) - d(k), \quad k = 0, 1, \dots, T \\ \sum_{k=0}^T d(k) &= D, \\ x(0) &= x_0, \quad x(T+1) = 0. \end{aligned}$$

- a) Aplique as condições de otimalidade de 1a ordem e determine a lei de control ótima $u^*(k)$, $k = 0, \dots, T$.
- b) Escreva o valor do custo ótimo $J(u^*)$ (ou seja o valor da função objetivo quando se utiliza o controle ótimo $u^*(k)$ do item a)).
- c) Considerando $T = 2$, obtenha $u^*(k)$, $k = 0, 1, 2$ e $J(u^*)$.

Dica:

$$\sum_{j=1}^n j^2 = \frac{(1+2n)(1+n)n}{6}$$