Universidade de São Paulo

Lista 2– Novembro de 2018

Programação Matemática

PTC2320

Exercício 1 Deseja-se minimizar a seguinte função:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2 - 6x_1 - 7x_2 8x_3 + 9$$

a Usando a condição necessária de 1ª ordem, encontre um ponto que poderia ser um mínimo local da função.

b Verifique que o ponto é um mínimo local usando a condição suficiente de 2ª orderm.

c Mostre que o ponto é um mínimo global.

Resposta:

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 4x_1 + x_2 - 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 7 \\ x_2 + 2x_3 - 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Fazendo $\nabla f(x_1, x_2, x_3) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 &= 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7, \\ x_2 + 2x_3 &= 8. \end{aligned}$$

Com isso,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{6 - x_2}{4}, x_3 = \frac{8 - x_2}{2} \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= \frac{6 - x_2}{4} + 2x_2 + \frac{8 - x_2}{2} \\ 6 - x_2 + 8x_2 + 16 - 2x_2 = 28 \rightarrow 5x_2 = 6 \rightarrow x_2 &= \frac{6}{5}, x_1 = \frac{6}{5}, x_3 = \frac{17}{5} \end{aligned}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow H(x, y)_{11} = 4 > 0$$

$$det \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 8 - 1 = 7 > 0, det(Q) = 16 - 4 - 2 = 10$$

Logo, Q é definida positiva.

Como $H(x_1, x_2, x_3) = Q$ é definida positiva, $f(x_1, x_2, x_3)$ é convexo, e portanto, é um ponto de mínimo local , e mínimo global.

Exercício 2 Deseja-se minimizar a seguinte função:

$$f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$$

a Obtenha as expressões para o gradiente e matriz hessiana da função.

b Qual é o numero global desta função? verifique que neste ponto a condição suficiente de 2ª ordem satisfeita.

c Mostre que a matriz hessiana é positiva definida para todo (x_1, x_2) tal que $f(x_1, x_2) < 0.0025$

Resposta:

$$f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 200(x_2 - x_1^2)(-2x_1) + 2(1 - x_1)(-1) \\ 200(x_2 - x^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -400x_1(x_2 - x_1^2) - 2(1 - x_1) \\ 200(x_2 - x^2) \end{bmatrix}$$

$$H(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -400(x_2 - x_1^2) - 400x_1(-2x_1) + 2 & -400x_1 \\ -400x_1 & 200 \end{bmatrix} \nabla f(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_2 = x_1^2,\ x_1 = 1$$

b)

$$min f(x_1, x_2) = 0 \text{ e } x_1 = 1,\ x_2 = 1. \text{ Neste caso, } \nabla f(1, 1) = 0 \text{ e}$$

$$H(1, 1) = \begin{bmatrix} 802 & -400 \\ -400 & 200 \end{bmatrix} \text{ e } (\lambda - 802)(\lambda - 200) - 16000 = 0$$

$$\lambda^2 - 1002\lambda + 160400 - 160000 = 0 \rightarrow \lambda^2 - 1000\lambda + 400 = 0 \rightarrow \lambda = (1001.6\ ,\ 0.4)$$

Logo, é definida positiva.

Letra c

$$x_2 - x_1^2 = 0.005 \rightarrow H(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 800x_1^2 & -400x_1 \\ -400x_1 & 200 \end{bmatrix} \rightarrow det H(x_1, x_2) = 160000x_1^2 - 160000x_1^2 = 0$$

$$det H(x_1, x_2) = 0 \rightarrow 200(-400(x_2 - x_1^2) + 2) = 0 \rightarrow x_2 - x_1^2 = 0.005$$

Portanto, $det H(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_2 - x_1^2 = 0$ e $(x_2 - x^2) < 0.005$

$$\begin{cases} det H(x_1, x_2) = 200(-400(x_2 - x_1^2) + 2) > 0 \\ H(x_1, x_2)_{11} = (-400(x_2 - x_1^2) + 2) + 800x_1^2 > 0 \end{cases}$$

Logo, $(x_2 - x_1^2) < 0.005\ \rightarrow H(x_1, x_2)$ é definida positiva.

$$f(x_1, x_2) < 0.0025 \rightarrow 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 < 0.0025$$

$$100(x_2 - x_1^2)^2 0.0025 \rightarrow (x_2 - x_1^2)^2 < 0.000025 \rightarrow (x_2 - x_1^2) < 0.005 \rightarrow H(x_1, x_2)$$

é definida positiva.

Exercício 3 Determine o mínimo global da função:

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1^3 + x_1^4.$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 4x_1 - x_2 + 6x_1^2 + 4x_1^3 \\ 2x_2 - 2x_1 \end{bmatrix}$$

$$H(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 4 + 12x_1 + 12x_1^2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$det(H(x_1, x_2)) = 4(6x_1^2 + 6x_1 + 2 - 1) = 4x_1(6x_1 + 6 + 1)$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = 0 \iff x + 2 = x_1, \; x_1(4x_1^2 + 6x_1 + 2) = 0 \iff$$

$$\text{a) } x_1 = x_2 = 0, \quad \text{b) } x_1 = -1, \; x_2 = -1, \quad \text{c) } x_1 = -1/2, \; x_2 = -1/2$$

$$\text{a) } H(0,0) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, det = 4 > 0, tr = 6 > 0,$$

$$\implies \lambda_1 > 0, \, \lambda_2 > 0 \implies (0,0) \text{ mínimo local}$$

$$\text{b) } H(-1,-1) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, det = 4 > 0, tr = 6 > 0,$$

$$\implies \lambda_1 > 0, \, \lambda_2 > 0 \implies (-1,-1) \text{ mínimo local}$$

$$\text{c) } H(-1/2,-1/2) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, det = -1 < 0, tr = 3 > 0,$$

$$\implies \lambda_1 \times \lambda_2 < 0 \implies (-1/2,-1/2) \text{ ponto de sela}$$

$$0 \leq (x_1 - x_2)^2 + x_1^2(x_1 + 1)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1^2(x_1^2 + 2x_1 + 1) = x_1^4 + 2x_1^3 + 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$$

$$\implies (0,0) \text{ mínimo global.}$$

Exercício 4 Seja

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - 3x_1$$

a Determine um mínimo local de f.

b Porque a soluçã de a) é um mínimo global?

c Encontre o mínimo de f sujeito a $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

Letra a)

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 - 3 \\ 2x_2 + x_1 \end{bmatrix}, \; H(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\nabla(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} 0$$

$$-3x_2 = 3 \to x_2* = -1, x_1* = 2$$

$$det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 - 2)^2 - 1 = 0 \to \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \to \lambda = (3 \; , \; 1)$$

Letra b) Portanto, o Hessiano é positivo definido e o ponto é de mínimo global(a função é convexa).

Letra c)

$$g_1(x_1,x_2) = -x_1,\;\; g_2(x_1,x_2) = -x_2$$
$$\begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 - 3 - u_1 \\ x_1 + 2x_2 \qquad -u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$u_1 x_1 = 0, u_1 \;\geq 0$$
$$u_2 x_2 = 0, u_2 \geq 0$$

1. $u_1 = 0,\;\; u_2 = 0, x_1 = 2, x_2 = -1$ não serve
2. $$u_1 > 0 \rightarrow x_1 = 0,\;\; u_2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_2 - u_1 = 3 \\ 2x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_1 = -3 \\ x_2 = 0, x_1 = 0 \end{cases}$$

   não serve
3. $$u_1 = 0, u_2 > 0 \rightarrow x_2 = 0 \begin{cases} 2x_1 = 3 \rightarrow x_1 = \frac{3}{2} \\ u_2 = x_1 \rightarrow u_2 = \frac{3}{2} \end{cases} \quad Ok,\;\; f(\frac{3}{2}, 0) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = -\frac{9}{4}$$
4. $$u_1 > 0, u_2 > 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0, u_1 = -3u_2 = 0$$

   não serve

Exercício 5 Aplique as condições de 1ª e 2ª ordem a função

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 16x_3^2$$

sujeita a restrição $h(x_1,x_2,x_3) = 0$ e obtenha os pontos de mínimo local global para cada caso abaixo:

a $h(x_1,x_2,x_3) = x_1 - 1$

b $h(x_1,x_2,x_3) = x_1 x_2 - 1$

c $h(x_1,x_2,x_3) = x_1 x_2 x_3 - 1$

Resposta

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 8x_2 \\ 32x_3 \end{bmatrix} \rightarrow F = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix}$$

Para o primeiro caso

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2x_1 + \lambda = 0 \\ 8x_2 = 0 \\ 32x_3 = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases} \rightarrow \lambda = -2, x_2 x_3 = 0$$

$$L = F > 0$$

Para o segundo caso

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2x_1 + \lambda x_2 = 0 \\ 8x_2 + \lambda x_1 = 0 \\ 32x_3 = 0 \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases} \rightarrow 2x_1^2 + \lambda = 0$$

$$8x_2^2 + \lambda = 0$$

$$x_1^2 = 4x_2^2$$

$$x_1^2 = 4x_2^2$$

$$x_1 = \pm 2x_2 \rightarrow x_1^2 = 2 \rightarrow \lambda = -4 \rightarrow x_1 = \pm\sqrt{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow x_2 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, x_3 = 0 \\ x_1 = -\sqrt{2}, x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, x_3 = 0 \end{cases} \quad \nabla f = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 8x_2 \\ 32x_3 \end{bmatrix} F = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix}$$

$$\nabla h = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L = F + \lambda H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

$$det \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = 0$$

$$M = (x_1, x_2, x_3), \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 0 = (y_1, y_2, y_3) y_1 = -2y_2$$

$$\begin{bmatrix} -2y_2 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2y_2 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4y_2 & 8y_2 & 16y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 16(y_2^2) + y_3^2 > 0$$

os 2 pontos são mínimos globais

$$f(\pm\sqrt{2}, \pm\frac{1}{2}, 0) = 2 + 2 = 4$$

Para o terceiro caso

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda x_2 x_3 = 0 \\ 8x_2 + \lambda x_1 x_3 = 0 \\ 32x_3 + \lambda x_1 x_2 = 0 \\ x_1 x_2 x_3 = 1 \end{cases} \quad \nabla h = \begin{bmatrix} x_2 x_3 \\ x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1^2 + \lambda = 0 \rightarrow x_1 = \pm\sqrt{-\frac{-\lambda}{2}} \\ 8x_2^2 + \lambda = 0 \rightarrow x_2 = \pm\sqrt{\frac{-\lambda}{8}} \\ 32x_3^2 + \lambda = \rightarrow x_3 = \pm\sqrt{\frac{-\lambda}{32}} \end{cases}$$

$$(\frac{-\lambda^3}{512})^{1/2} = 1 \rightarrow -\lambda^3 = 512 \rightarrow \lambda = -8$$

$$x_1 = \pm 2, x_2 \pm 1, x_3 = \pm 1/2 \ e \ x_1 x_2 x_3 = 1$$

$$M = (y_1, y_2, y_3); (x_2 x_3 \ x_1 x_3 \ x_1 x_2)(y_1 \ y_2 \ y_3)' = 0$$

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 & x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$\begin{cases} i) x_1 = 2, x_2 = 1 x_3 = \frac{1}{2} \\ ii) x_1 = 2, x_2 = -1 x_3 = -\frac{1}{2} \\ iii) x_1 = -2, x_2 = 1 x_3 = -\frac{1}{2} \\ iv) x_1 = -2, x_2 = -1 x_3 = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \rightarrow f = 4 + 4 + \frac{16}{4} = 12$$

então

$$\begin{cases} i) M : (\frac{1}{2}, 1, 2) \rightarrow y_1 + 2y_2 + 4y_3 = 0 \rightarrow y_1 = -2y_2 - 4y_3 = -(2y_2 + 4y_3) \\ ii) M : (\frac{1}{2}, -1, -2) \rightarrow y_1 - 2y_2 - 4y_3 = 0 \\ iii) M : (-\frac{1}{2}, 1, -2) \rightarrow -y_1 + 2y_2 - 4y_3 = 0 \\ iv) M : (-\frac{1}{2}, -1, 2) \rightarrow -y_1 - 2y_2 + 4y_3 = 0 \end{cases}$$

Caso i) (os outros são similares)

$$F + \lambda H = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -8 \\ -4 & 8 & -16 \\ -8 & -16 & 32 \end{bmatrix} det(.) = -256$$

$$\begin{bmatrix} 2y_2 - 4y_3 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & -8 \\ -4 & -8 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2y_2 - 4y_3 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 2(2y_2 + 4y_3)^2 + 8y_2^2 + 32y_3^2 > 0$$

$$\text{para} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \in M, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \neq 0$$

Exercício 6 Resolva o seguinte problema de programação quadrática:

$$\min \frac{1}{2}x'Qx + b'x$$

$$Q = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, b = -\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

e obtenha os pontos de mínimo local(global) para cada restrição abaixo:

1. $x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$
2. $x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 4$

Resposta Caso 1.

$$\nabla f(x) = Qx + b$$

$$\nabla h(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Qx + b + \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

então

$$x_1 = 0.5, x_2 = 1, x_3 = 15, \lambda = 0.5$$

$$\frac{3}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 1$$

$$-1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\frac{1}{2} + 2 + \frac{3}{2} = 4$$

Caso 2.

$$Qx - b - u_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$u_1(4 - (x_1 + 2x_2 + x_3)) = 0$$

Caso 2.1.

$$u_1 > 0 \rightarrow x_1 = 0.5, x_2 = 1, x_3 = 15, u_1 = -0.5$$

Caso 2.2.

$$u_1 = 0 \to Qx = b \to Q^{-1}x = b \to x = Q^{-1}b$$

$$x = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 3.5 \\ 4.5 \end{bmatrix} \to \text{solução otima}$$

onde

$$x_1 + x_2 + x_3 = 13 \geq 4$$

Exercício 7 Resolva o seguinte problema:

$$\max 14x_1 - x_1^2 + 6x_2 - x_2^2 + 7$$

$$\text{s.s.} \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \end{cases}$$

Resposta Fazendo,

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) = -14x_1 + x_1^2 - 6x_2 + x_2^2 - 7 \\ g_1(x, 1x_2) = x_1 + x_2 - 2 \\ x_1 2x_2 - 3 \end{cases}$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -14 + 2x_1 \\ -6 + 2x_2 \end{bmatrix}, \nabla g_1(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \nabla g_2(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Com isso podemos escrever

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} -14 + 2x_1 \\ -6 + 2x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u_2 = 0 \\ (x_1 + x_2 - 2)u_1 = 0 \\ (x_1 + 2x_2 - 3)u_2 = 0 \end{cases}$$

Letra a: $u_1 > 0$, $u_2 > 0$

$$\begin{cases} 2x_1 + u_1 + u_2 = 14 \\ 2x_2 + u_1 + 2u_2 = 6 \end{cases} \to \begin{cases} u_1 + u_2 = 12 \\ u_1 + 2u_2 = 4 \end{cases} \to \begin{cases} u_2 = -8 \\ u_1 = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases} \to \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

Letra b:

$u_1 > 0$, $u_2 = 0$

$$\begin{cases} 2x_1 + u_1 = 14 \\ 2x_2 + u_1 = 6 \end{cases} \quad 2x_1 - 2x_2 = 8 \to x_1 - x_2 = 4$$

$$x_1 + x_2 = 2 \to x_1 + x_2 = 2$$

$$x_1 = 3,\ x_2 = -1$$

$$\to u_1 = 14 - 2x_1 = 8$$
$$x_1 + 2x_2 = 3 - 2 = 1 < 3 \text{ candidato}$$
$$x_1 = 3,\ x_2 = -1,\ u_1 = 8,\ u_2 = 0$$

Letra c:

$$u_1 = 0, u_2 > 0,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + u_2 = 14 \\ 2x_2 + 2u_2 = 6 \end{cases} \to 4x_1 - 2x_2 = 22$$
$$x_1 + 2x_2 = 3$$
$$x_1 = 5, x_2 = -1, u_2 = 4$$
$$x_1 + x_2 = 5 - 1 = 4 > 2 \text{ não serve}$$

Letra d: $u_1 = 0,\ u_2 = 0$

$$\begin{cases} 2x_1 = 14 \\ 2x_2 = 6 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$
$$x_1 + x_2 = 7 + 3 = 10 > 2 \text{ não serve}$$

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, g_1 = 0, g_2 = 0$$
$$L = F > 0 \to \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases} \quad \text{é mínimo local}$$

Exercício 8 Resolva o seguinte problema:

$$\min x_2 + x_3$$
$$\text{s.a.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \end{cases}$$

Resposta

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \nabla h_1(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \nabla h_2(x) = 2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Para o caso de 1ª ordem

$$\begin{cases} 0 + \lambda_1 + 2x_1\lambda_2 = 0 \to -\lambda_1 = 2x_1\lambda_2 \\ 1 + \lambda_1 + 2x_2\lambda_2 = 0 \\ 1 + \lambda_1 + 2x_3\lambda_2 = 0 \to (x_2 - x_3)\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$\lambda_2 \neq 0$ pois caso contrario teríamos $(\lambda_2 = 0)$. Logo, $x_2 = x_3$ e

$$\left\{ x_1 + 2x_2 = 1 x_1^2 + 2x_2^2 = 1 \quad \rightarrow \left\{ (1-2x_2)^2 + 2x_2^2 \rightarrow 2x_2(3x_2 - 2) = 0 \right.\right.$$

Letra a

$$x_2 = x_3 = 0, x_1 = 1, \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -\frac{1}{2}$$

$$x_a^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1/2$$

Letra b

$$x_2 = x_3 = \frac{2}{3}, x_1 = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$\lambda_1 = -2x_2\lambda_2 - 1 = -\frac{4}{3}\lambda_2 - 1$$

$$\lambda_1 = -2x_1\lambda_2 = \frac{2}{3}\lambda_2$$

$$\rightarrow \lambda_2 = -\frac{1}{2}, \lambda_1 = -\frac{1}{3}$$

$$x_b^* = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \lambda_1 = -1/3, \lambda_2 = -1/2$$

2ª Ordem:

$$\nabla^2 f(x) = 0, \nabla^2 h_1(x) = 0, \nabla h_2(x) = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para a) : $L = \frac{1}{2}2I = I > 0 \rightarrow x_a$ é mínimo local.(global pois o conjunto de factibilidade é compacto)

$$x_a^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é mínimo global.

Para b): $L = -\frac{1}{2}2I = -I < 0 \rightarrow x_b$ é máximo local(global), $\lambda_2 = -1/2$

$$x_b^* = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

é máximo global.

Exercício 9 Resolva o seguinte problema:

$$\min x_1^2 + x_2^2 x_1 x_2 - 3x_1$$

$$\text{S.A.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ 2x_1 + x_2 \geq 1 \end{cases}$$

Resposta Fazendo

$$\begin{aligned}
f(x_1,x_2) &= x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - 3x_1 \\
g_1(x_1,x_2) &= 1 - (x_1 + 2x_2) \\
g_2(x_1,x_2) &= 1 - (2x_1 + x_2) \\
\nabla g_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}&,\ \nabla g_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3 - u_1 - 2u_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2u_1 - u_2 = 0 \end{cases}$$

Caso 1) $u_1 = 0$, $u_2 = 0 \rightarrow x_1 = 2, x_2 = -1$ são serve.
Caso 2) $u_1 > 0$, $u_2 = 0$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - u_1 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 2u_1 = 0 \qquad \rightarrow x_1 = 2, x_2 = -\dfrac{1}{2} \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

$$2x_1 + x_2 = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2} > 10$$

$$u_1 = 2x_1 + x_2 - 3 = \frac{1}{2} > 0 \text{ Ok}$$

Caso 3) $u_1 = 0$, $u_2 > 0$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2u_2 - 3 \\ x_1 + 2x_2 - u_2 = 0 \qquad \rightarrow x_1 = 1, x_2 = -1 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

$$x_1 + 2x_2 = 1 - 2 = -1 \rightarrow \text{não serve}$$

Exercício 10 Resolva o seguinte problema:

$$\begin{aligned}
&\min x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - 3x_1 \\
&\quad \text{S.A.} \left\{ x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \right.
\end{aligned}$$

Resposta

$$\begin{aligned}
f(x_1,x_2) &= x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - 3x_1 \\
g(x_1,x_2) &= x_1^2 + x_2^2 \geq 1 \\
\nabla f(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 - 3 \\ x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}, \nabla g(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, H &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Kuhn tucker:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_1u &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_2u &= 0 \\ u(x_1^2 + x_2^2 - 1) &= 0, u \geq 0 \end{aligned}$$

$i)$ $u = 0 \to x_1 = 2, x_2 = -1$ não serve.
$ii)$ $u > 0 \to x_1^2 x_2^2 = 1$

$$\begin{aligned} 2x_1(1+u) + x_2 = 3 \to -4x_2z^2 + x_2 = 3 \\ x_1 + 2x_2(1+u) = 0 \to x_1 = -2x_2z \\ x_2(1-4z^2) = 3 \to x_2 = \frac{3}{(1-2z)(1+2z)} \\ x_2 = \frac{3}{(1-2z)(1+2z)}, x_1 = \frac{-6z}{(1-2z)(1+2z)} \\ 9 + 36z^2 = (1-2z)^2(1+2z)^2 = (1-4z^2)^2 = 1 - 8z^2 + 16z^4 \\ 16z^4 - 8z^2 - 36z^2 + 1 - 9 = 0 \to l = z^2 \\ l = \frac{11 \pm \sqrt{153}}{8} \to z^2 = 2,92 \to z = 1.17 \to 0.71 \\ x_1 = 0.96 \; x_2 = 0.28 \\ L = F + Hu = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + 0.71 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.42 & 1 \\ 1 & 3.42 \end{bmatrix}, det(L) = 3.42^2 - 1 > 0, \\ ti(L) = 2 \times 3.42 > 0 \\ L > 0 \to \begin{cases} x_1^* = 0.96 \\ x_2^* = 0.28 \end{cases} \quad \text{é mínimo local(global)} \end{aligned}$$

Portanto,

$$f(x_1^*, x_2^*) = 1 + 0.96 \times 0.28 - 3 \times 0.96 = -1.6656$$

Exercício 11 Resolva o seguinte problema:

$$\begin{aligned} &\min x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 \\ &\text{s.a.} \begin{cases} x_1x_2 \leq -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Resposta

$$g(x) = x_1x_2 + 1, \; \nabla g(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}, \; \nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}, \; F = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, det(F) = 3 > 0$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ u(x_1x_2 + 1) = 0 \end{cases}$$

$i)\ u = 0 \rightarrow$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0 \text{ não serve!}$$

$ii)\ u > 0 \rightarrow$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_2 u = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_1 u = 0 \\ x_1 x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2x_1^2 - x_1 x_2 - u = 0 \\ -x_1 x_2 + 2x_2^2 - u = 0 \\ 2x_1^2 + 2x_2^2 = 0 \rightarrow x_1^2 = x_2^2 \rightarrow x_1^4 = 1 \\ x_1 = \pm 1 \\ x_2 = \pm 1 \end{aligned}$$

Letra a)

$$\begin{aligned} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2 + 1 - u = 0 \rightarrow u = 3 \\ -1 - 2 + u = 0 \end{cases}$$

Letra b)

$$\begin{aligned} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -2 - 1 + u = 0 \rightarrow u = 3 \\ 1 + 2 - u = 0 \end{cases}$$

2^{a} Ordem:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M((1.1)) = M((-1,1)) = [y \in R^2; y_1 = y_2]$$

$$2 \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2y_1 \\ 2y_1 \end{bmatrix} = 8y_1^2 > 0$$

para $y \neq 0$ em $M((1,1)) = M((-1,1))$. Logo, $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ são mínimos locais.

Exercício 12 Resolva o seguinte problema:

$$\min (x_1-3)^2+(x_2-2)^2$$

$$\text{S.A.}\begin{cases} x_1^2+x_2^2 \leq 5, \\ x_1+x_2 \leq 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Resposta

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2(x_1-3) \\ 2(x_2-2) \end{bmatrix}, \nabla g_1(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}, \nabla g_2(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1+2x_1u_1+u_2=6 \\ 2x_2+2x_2u_1+u_2=4 \\ u_1(x_1^2+x_2^2-5)=0 \\ u_2(x_1+x_2-3)=0 \end{cases}$$

$i)u_1=0, u_2=0 \rightarrow x_1=3, x_2=2 \rightarrow x_1^2+x_2^2=11>5.$
$ii)u_1=0, u_2=0 \rightarrow$

$$\begin{cases} 2x_1(1+u_1)=6 \rightarrow x_1=\frac{3}{(1+u_1+1)} \\ 2x_2(1+u_1)=4 \rightarrow x_2=\frac{3}{(1+u_1+1)} \\ x_1^2+x_2^2=5 \rightarrow \frac{11}{(1+u_1)^2}=5 \\ (1+u_1)^2=\frac{11}{5} \rightarrow u_1=-1+\sqrt{\frac{11}{5}} \rightarrow \\ x_1=3\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{11}}, x_2=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{11}} \end{cases} \qquad x_1+x_2=\frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{11}}=3.37>3 \ \text{ não serve}$$

$iii)$ $u_1=0$, $u_2>0$

$$\begin{cases} 2x_1+u_2=6 \\ 2x_2+u_2=4 \\ x_1+x_2=3 \end{cases} \rightarrow 2(x_1-x_2)=2 \rightarrow x_1-x_2=1$$

$$x_1=2, x_2=1$$

$iv)$ $u_1>0$, $u_2>0$

$$2x_1(1+u_1)+u_2=6$$
$$2x_2(1+u_1)+u_2=4$$
$$\begin{cases} x_1^2+x_2^2=5 \\ x_1+x_2=3 \end{cases} \rightarrow x_1=2, x_2=1, u_1=0$$

2 ª Ordem :

$$L=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}>0$$

OK

Exercício 13 Considere 2 ativos com retornos R_1 e R_2 é fator de correlação, medias, e desvios padrão dados por

$$\rho = -0.5, r_1 = 14\%, \sigma_1 = 10\%, \sigma_2 = 20\%$$

Considere também um ativo livre de risco com retorno $r_f = 10\%$. Considere um portfolio com retorno $P = \omega_0 r_f + \omega_2 R_2, \omega_0, \omega_1 + \omega_2 = 1$. Quanto deve ser alocado nos ativos livre de risco, ativo 1 e no ativo 2 de forma a se ter uma carteira de mínima variância e retorno esperado $\mu = 20\%$? Qual é o risco dessa carteira e como ele se compara com o ativo 2 individualmente?

Resposta:

$$\min 0.01w_1^2 + 0.04w_2^2 - 2 \times 0.5 \times 0.1 \times 0.2w_1w_2 \text{s.a.} 0.1(1 - w_1 - w_2) + 0.14w_1 + 0.2w_2 = 0.2$$

$$f(w_1, w_2) = 0.01[w_1^2 + 4w_2^2 - 2w_1w_2]$$

$$0.1 - 0.1(w_1 + w_2) + 0.14w_1 + 0.2w_2 = 0.2$$

$$0.04w_1 + 0.1w_2 = 0.1 \to 4w_1 + 10w_2 = 10$$

$$h(w_1, w_2) = 10 - 4w_1 - 10w_2$$

$$\min 0.01(w_1^2 + 4w_2^2 - 2w_1w_2)$$

$$\text{s.a.} 4w_1 + 10w_2 = 20$$

$$\nabla f(w_1, w_2) = 0.01 \begin{bmatrix} 2w_1 & -2w_2 \\ -2w_1 + 8w_2 & \end{bmatrix}$$

$$\nabla(w_1, w_2) = -\begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 0.01(2w_1 - 2w_2) - 4\lambda = 0 \\ 0.01(-2w_1 + 8w_2) - 10\lambda = 0 \\ 4w_1 + 10w_2 = 10 \end{cases}$$

$$w_1 = \frac{13}{7}w_2$$

$$4(\frac{13}{7}w_2) + 10w_2 = 10 \to w_2 = \frac{70}{122}, w_1\frac{65}{61}$$

Em renda fixa:

$$1 - \frac{100}{61} = -63,92\%$$

Em R_1: $\frac{65}{61} \cong 6.56\%$.
Em R_2 : $\frac{35}{61} \cong 57.38\%$.
Risco da carteira:

$$\sigma^2 = 0.01(w_1^2 + 4w_2^2 - 2w_1w_2)$$

$$= 0.01(\frac{65^2 + 4.35^2 - 2.65.35}{61^2} = 0.012295$$

$$\sigma = 11.09\%(< 20\% \text{ do ativo } r_2)$$

2^{a} Ordem:

$$\nabla^2 f(x) = 0.001 \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}, \nabla^2 h(x) = 0,\ tra(\nabla^2 f(x)) = 0.01(2+8) = 0.1 > 0$$
$$det(\nabla^2 f(x)) = (0.01)^2(16-4) = 0.01^2 \times 12 > 0$$

Logo, $\nabla^2 f(x) > 0$. A solução encontrado é mínimo local (global pois $f(x)$ é conversa e o conjunto restrição é convexo.)

Exercício 14

$$\Psi_u^k + \lambda(k)\phi_u^k = 0,\ \ k = 0.\ldots,T,$$
$$\lambda(k-1) = \lambda(k)\phi_x^k + \Psi_x^k,\ \ k = 1,\ldots,T,$$
$$\lambda(T) = \lambda(T+1)G_x,$$
$$\Psi(x,u,k) = \frac{1}{2(k+1)^2}u^2,\ \ \phi(x,u,k) = x + u - d(k),\ \ G(x) = x$$
$$\Psi_u^k = \frac{u}{(k+1)^2},\ \ \Psi_x^k = 0,\ \ \phi_u^k = 1,\ \ \phi_x^k = 1,\ \ G_x = 1,$$
$$\frac{u(k)}{(k+1)^2} + \lambda(k) = 0,\ \ k = 0,\ldots,T, \lambda(k-1) = \lambda(k),\ \ k = 1,\ldots,T, \lambda(T) = \lambda(T=1) = c_0$$
$$\Longrightarrow \lambda(k) = c_0,\ \ k = 0,\ldots,T \Longrightarrow \frac{u(k)}{(k+1)^2} = -c_0 \Longrightarrow u(k) = -c_0(k+1)^2,\ \ k = 0,\ldots,T$$
$$x() = x_0 + \sum_{j=0}^{k-1}(u(j) - d(j)) \Longrightarrow 0 = x(T+1) = x_0 + \sum_{j=0}^{T} u(j) - D \Longrightarrow$$
$$-c_0\sum_{j=0}^{T}(j+1)^2 = D - x_0,\ \ \sum_{j=0}^{T}(j+1)^2 = \frac{(T+1)(T+2)(T+3)}{6} \Longrightarrow$$
$$-c_0 = \frac{6(D-x_0)}{(T+1)(T+2)(2T+3)},\ \ u^*(k) = \frac{6(D-x_0)}{(T+1)(T+2)(2T+3)}(k+1)^2,$$
$$J(u^*) = \frac{3(D-x_0)^2}{(T+1)(T+2)(2T+3)},$$
$$\text{Para } T = 2, u^*(0) = \frac{D-x_0}{14},\ \ u^*(1) = \frac{2}{7}(D-x_0),\ \ u^*(2) = \frac{9}{14}(D-x_0),\ \ J(u^*) = \frac{(D-x_0)^2}{28}.$$

——— *BOA SORTE :D* ———