

SEM0501

Dinâmica Aplicada às Máquinas

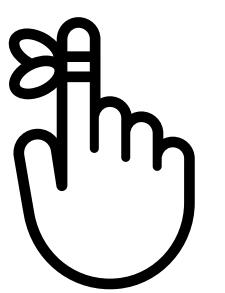
Aula #13 — Momento de inércia

Prof. Dr. Thiago Boaventura

tboaventura@usp.br

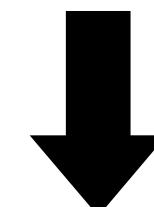
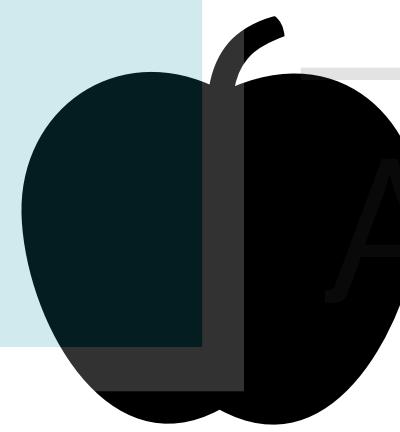
São Carlos, 25/09/19





Aula passada...

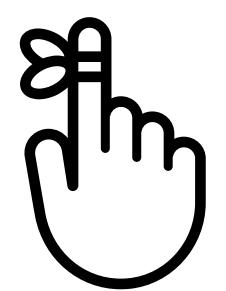
princípio
fundamental da
dinâmica



$$F_R = \frac{d(L)}{dt} = \frac{d(mv)}{dt}$$

$$F_R = ma$$

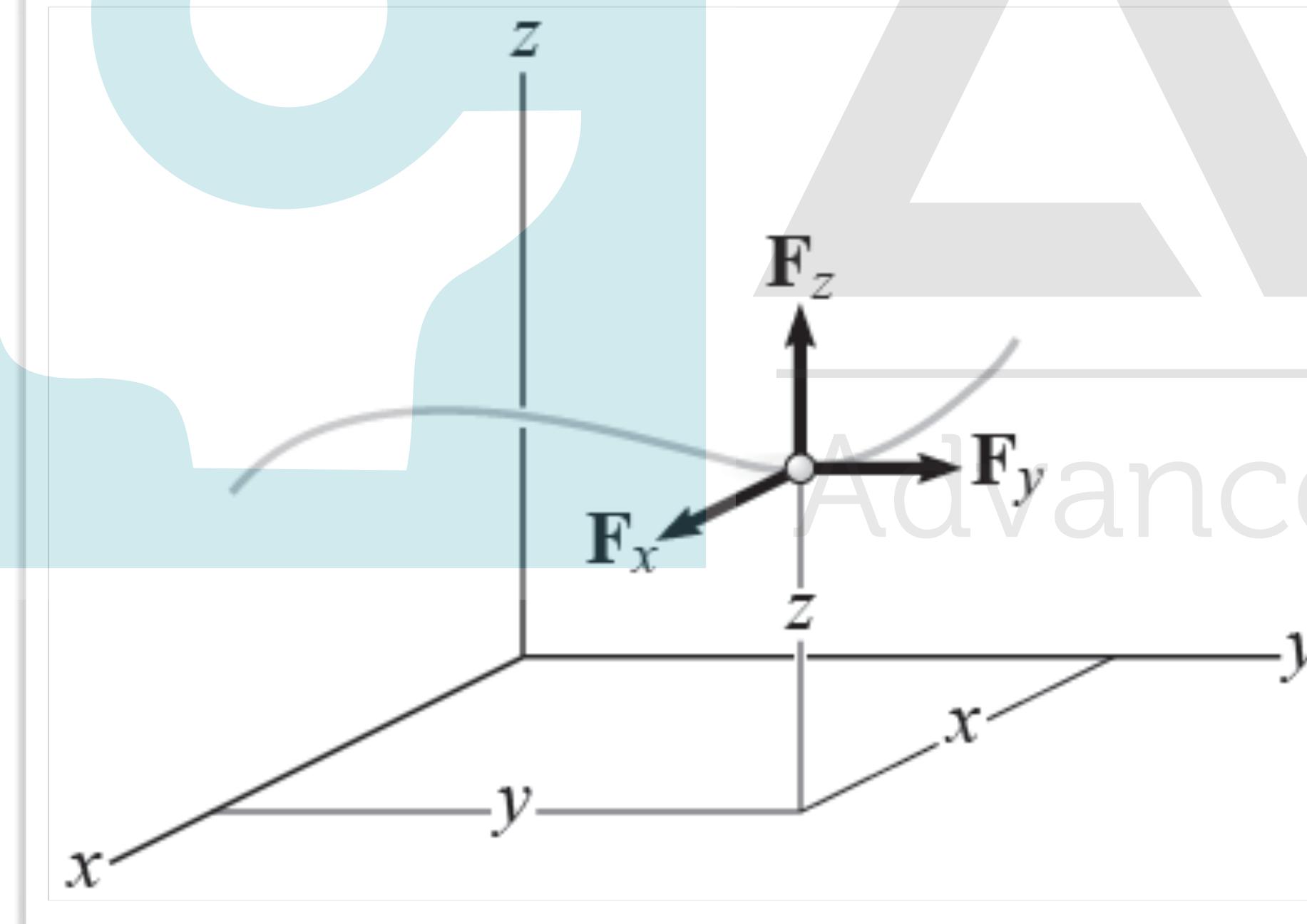
$$F_R = Mag$$



Aula passada...

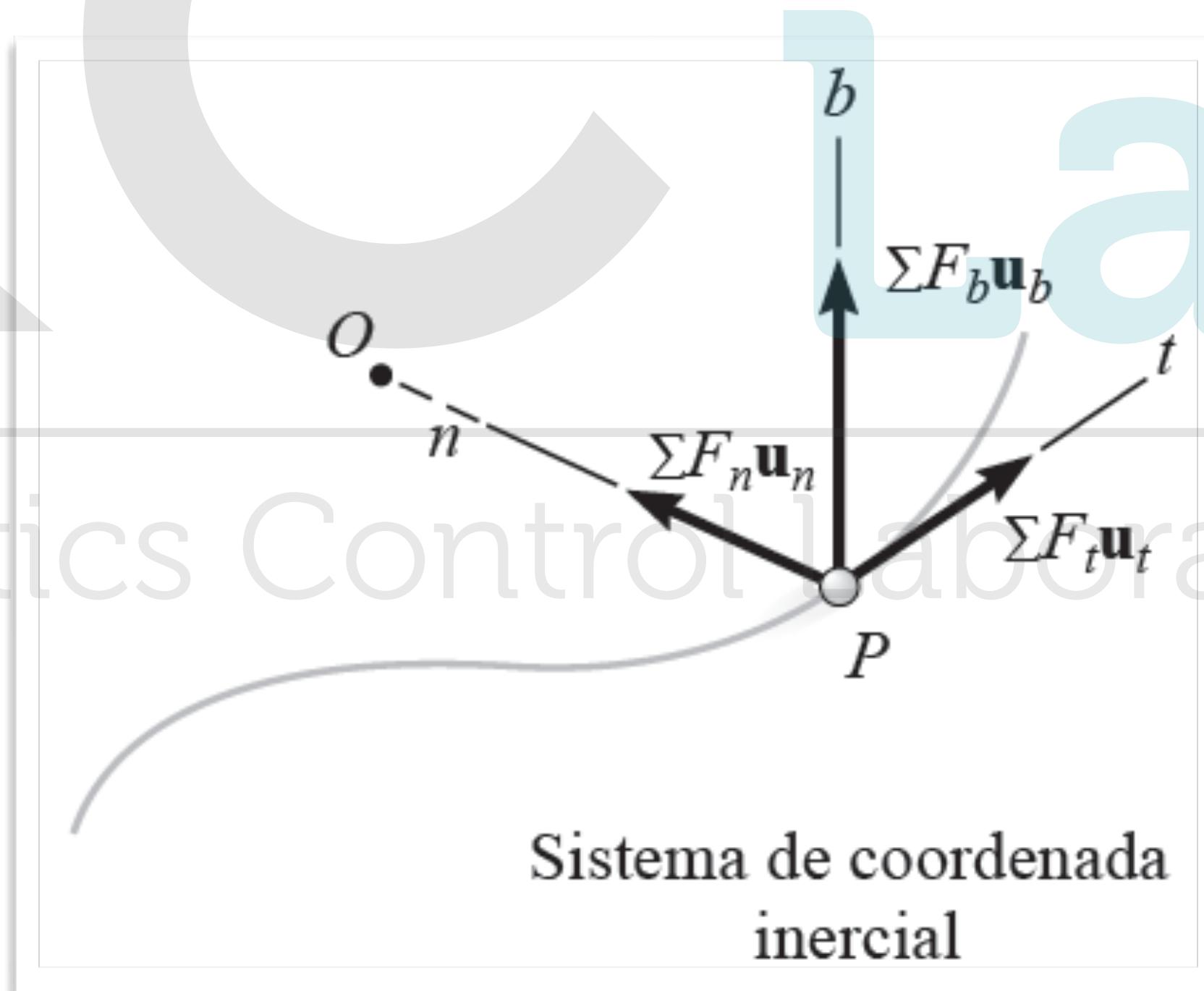
Coordenadas retangulares

movimento retilíneo



Coordenadas normais e tangenciais

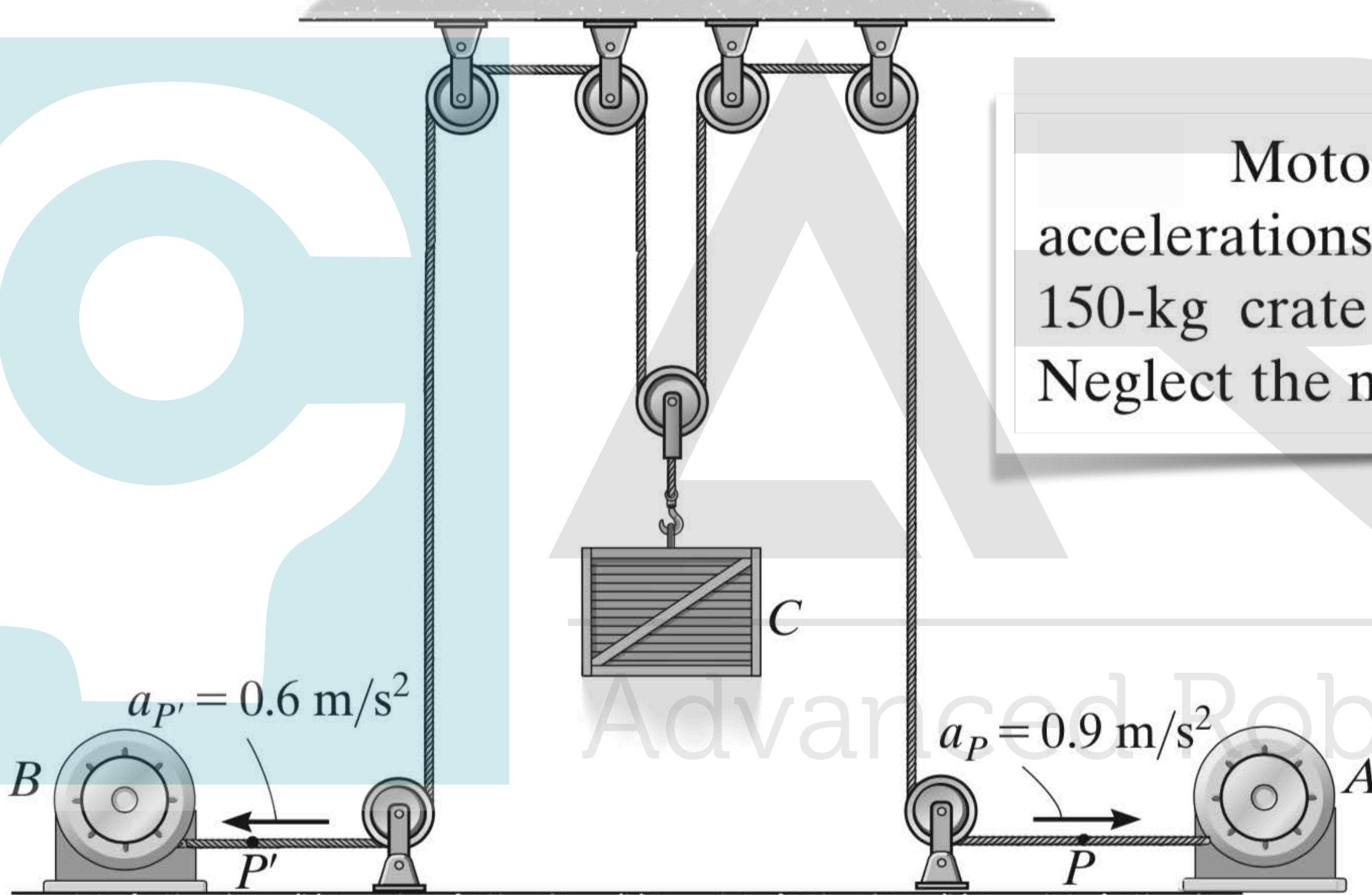
movimento curvilíneo



Sistema de coordenada
inercial

Exercício valendo nota

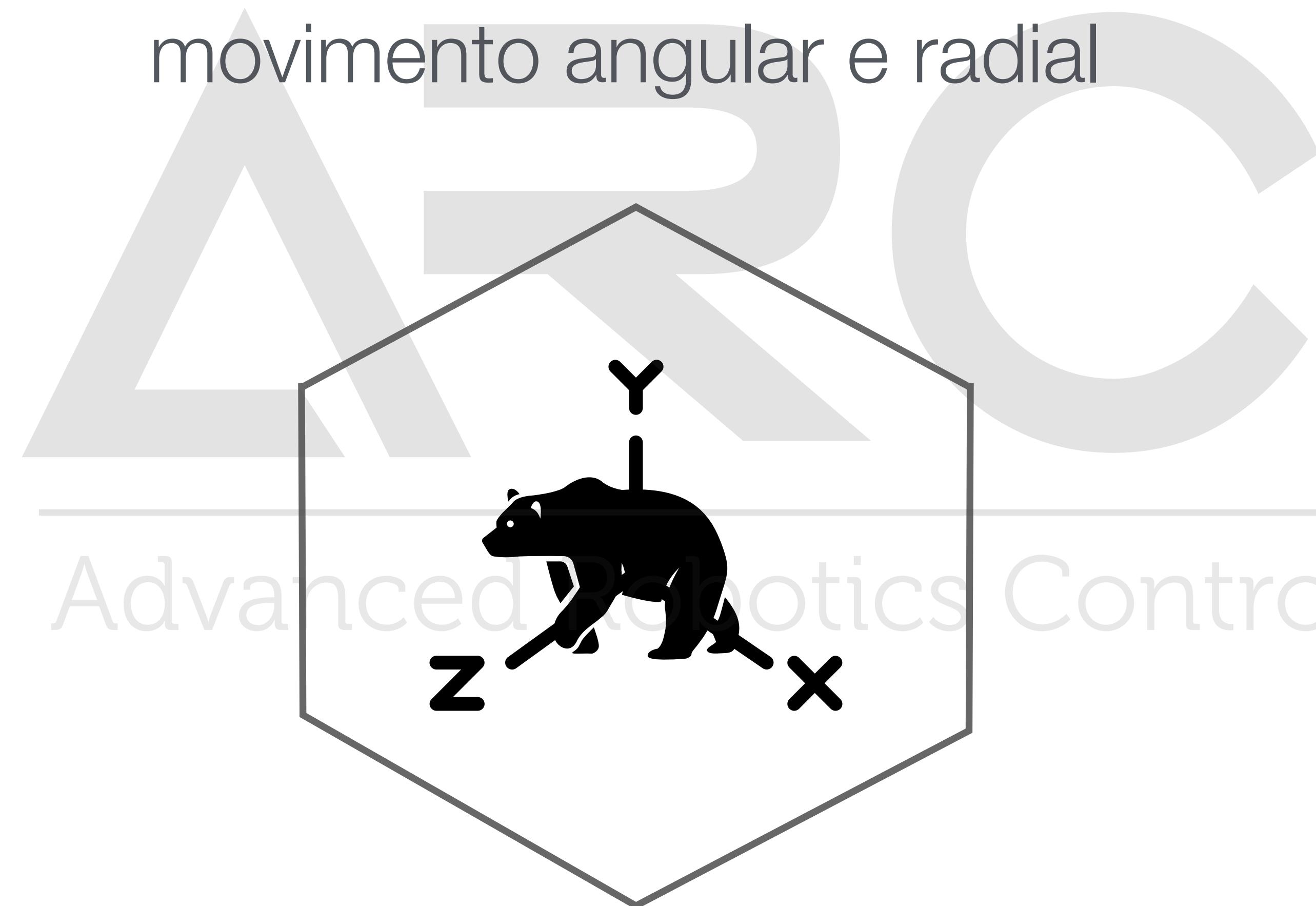




Motors *A* and *B* draw in the cable with the accelerations shown. Determine the acceleration of the 150-kg crate *C* and the tension developed in the cable. Neglect the mass of all the pulleys.

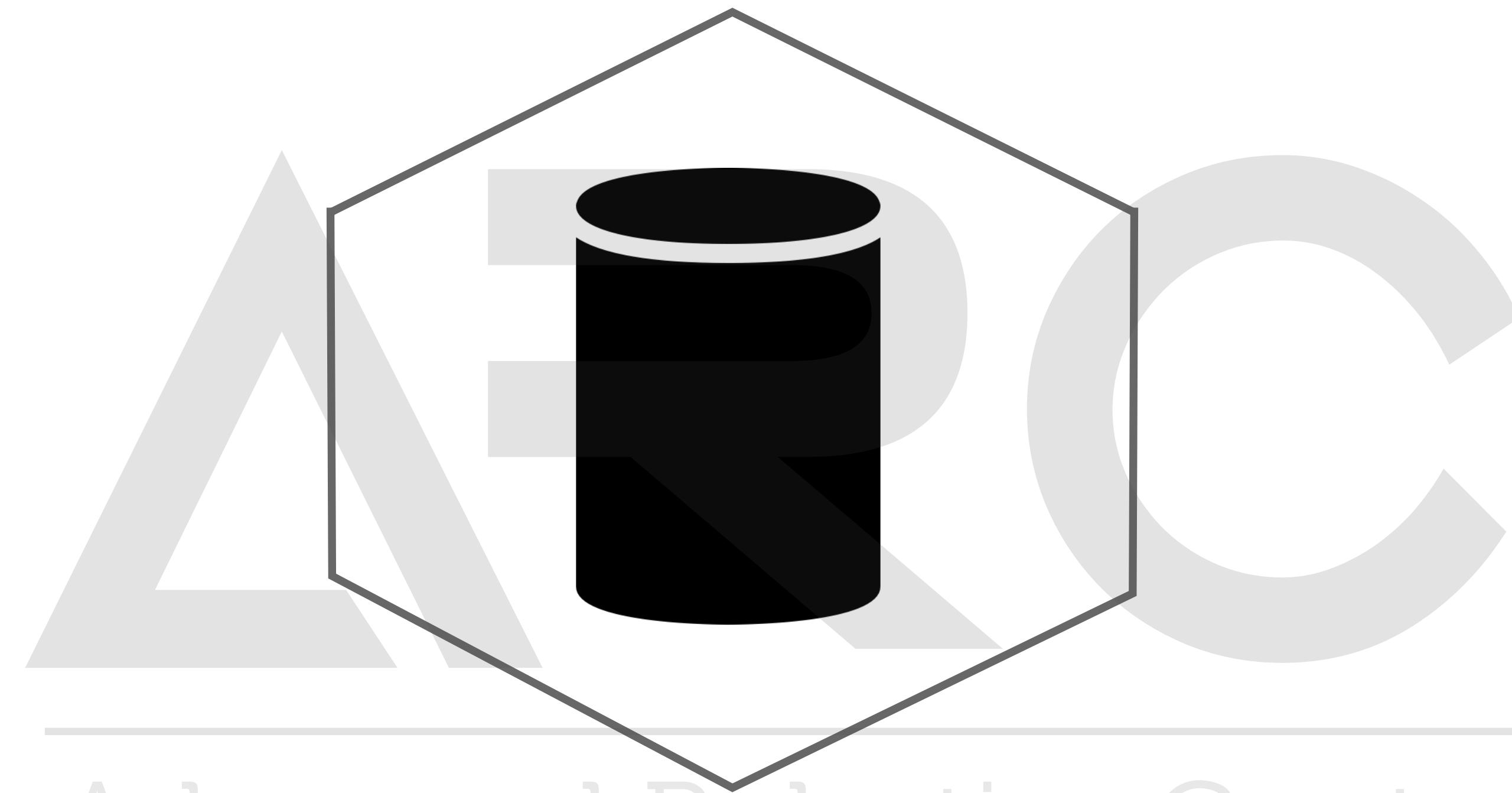
Hoje!

Coordenadas polares/cilíndricas (Cap. 13.6)



ARC Lab

Hoje!



ARC Lab

Advanced Robotics Control Laboratory
**Definir momento
de inércia**
(Cap. 17.1)

Conteúdo

- Equações de movimento
- Exemplo

Coordenadas
cilíndricas

Definição e exemplos
Propriedades

Momento
de Inércia



- “Take-home messages”
- Próxima aula

Conclusão

ARC Lab

Advanced Robotics Control Laboratory

Conteúdo

- Equações de movimento
- Exemplo

Coordenadas
cilíndricas

Momento
de Inércia

Conclusão

Advanced Robotics Control Laboratory

ARC Lab

Equações de movimento em coordenadas cilíndricas

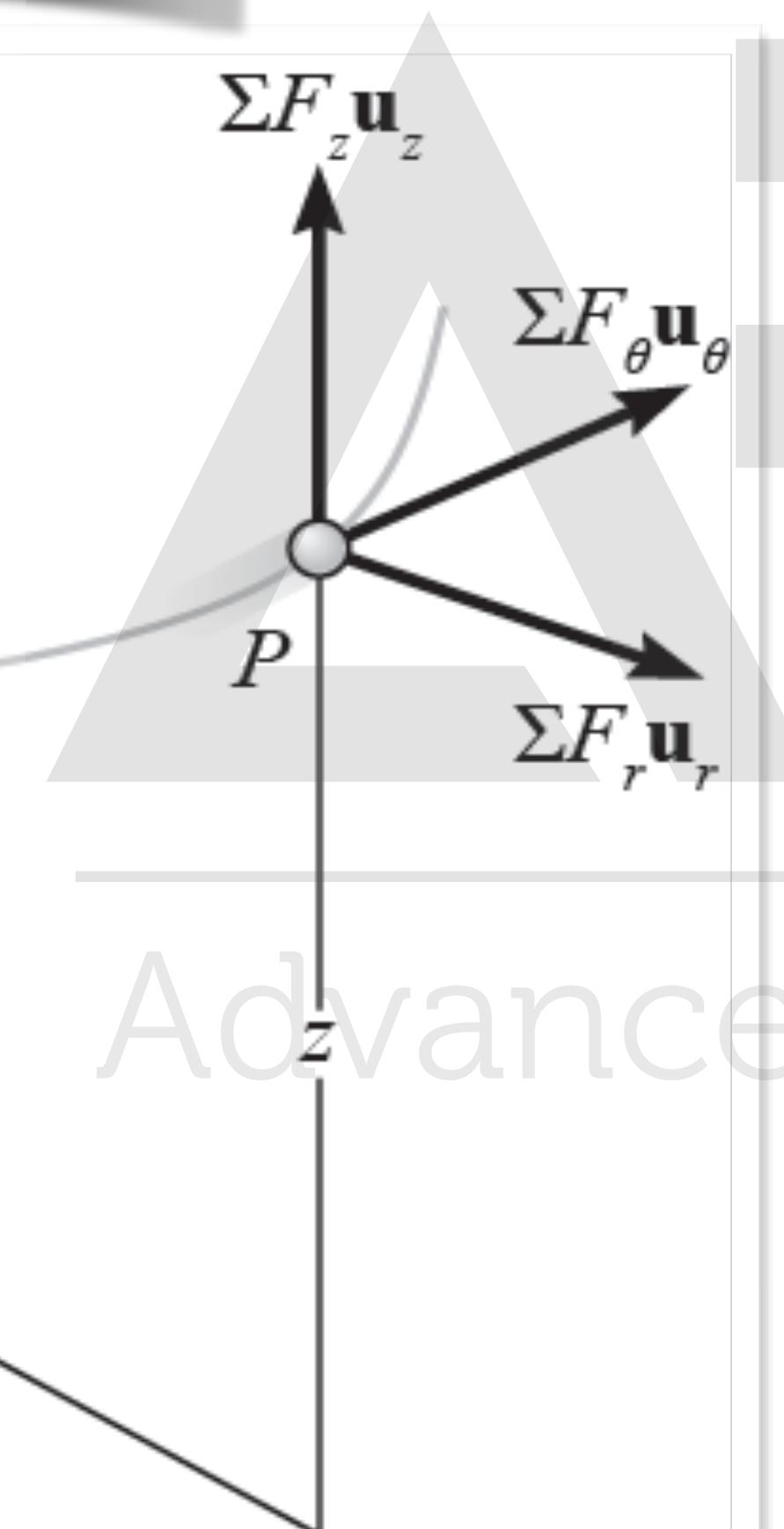
Coordenadas
cilíndricas

Momento
de Inércia

Conclusão

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

$$\sum F_r \mathbf{u}_r + \sum F_\theta \mathbf{u}_\theta + \sum F_z \mathbf{u}_z = m a_r \mathbf{u}_r + m a_\theta \mathbf{u}_\theta + m a_z \mathbf{u}_z$$



Sistema inercial de coordenadas

$$\sum F_r = m a_r$$

$$\sum F_\theta = m a_\theta$$

$$\sum F_z = m a_z$$

$$a_r = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2$$

$$a_\theta = r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}$$

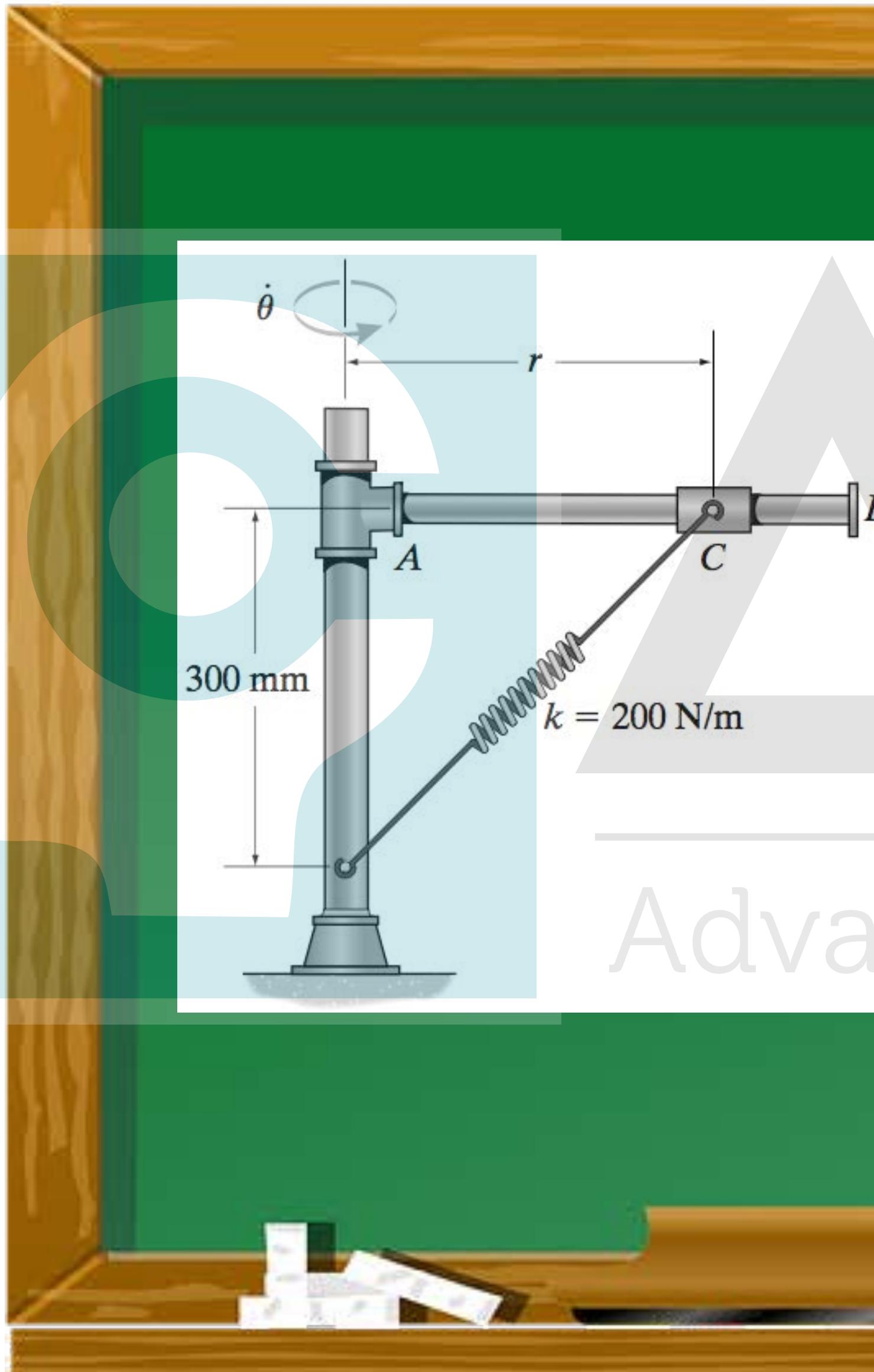
$$a_z = \ddot{z}$$

Problema 13.95

Coordenadas cilíndricas

Momento de Inéria

Conclusão



13.95. Um mecanismo está girando em torno do eixo vertical com velocidade angular constante de $\dot{\theta} = 6 \text{ rad/s}$. Se a barra AB é lisa, determine a posição constante r do anel C de 3 kg. A mola tem um comprimento não deformado de 400 mm. Despreze a massa da barra e a dimensão do anel.

Conteúdo

Coordenadas
cilíndricas

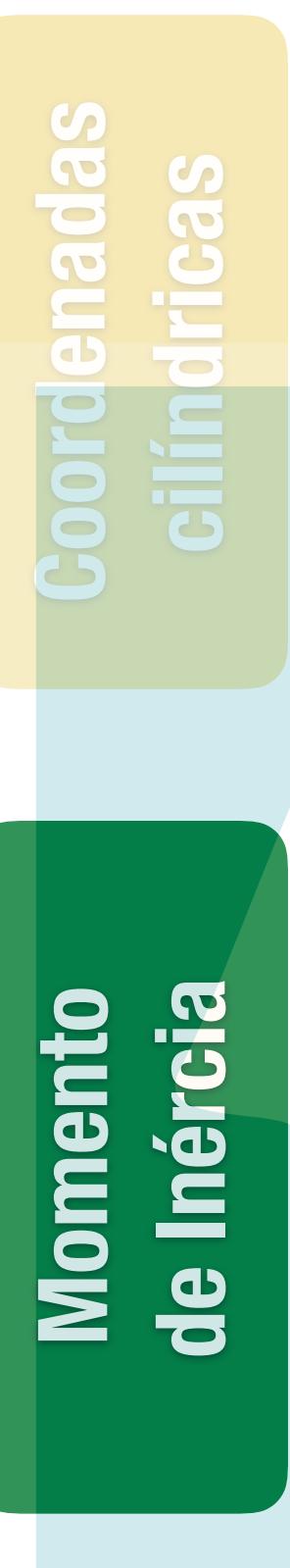
Conclusão

- Definição e exemplos
- Propriedades

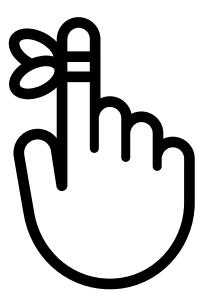
Momento
de Inércia

Advanced Robotics Control Laboratory

Momento de inércia



corpo rígido



Momento linear

Coordenadas
cilíndricas

Momento
de Inércia

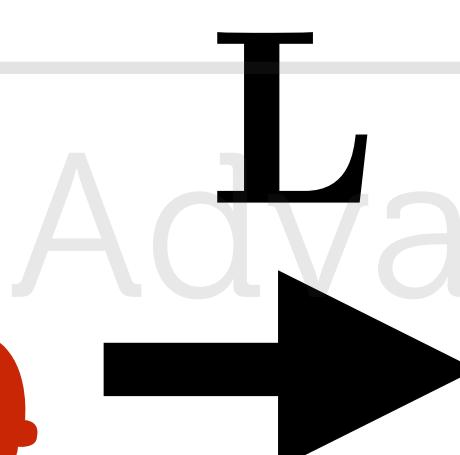
Conclusão

Também chamado de
Quantidade de
movimento
“Inércia”

V

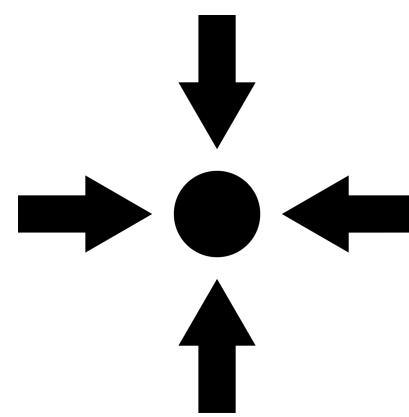
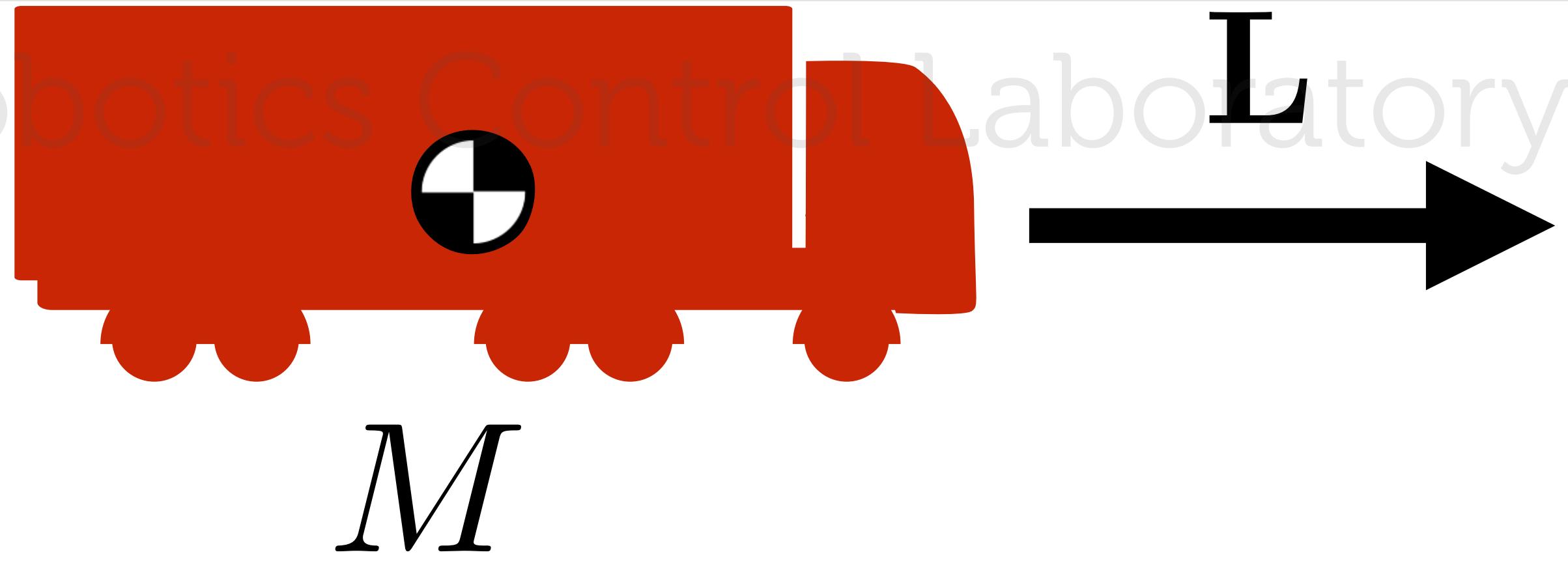


m



$$L = mV$$

$$L = mV_G$$



Momento angular

Coordenadas
cônicas

Momento
de Inércia

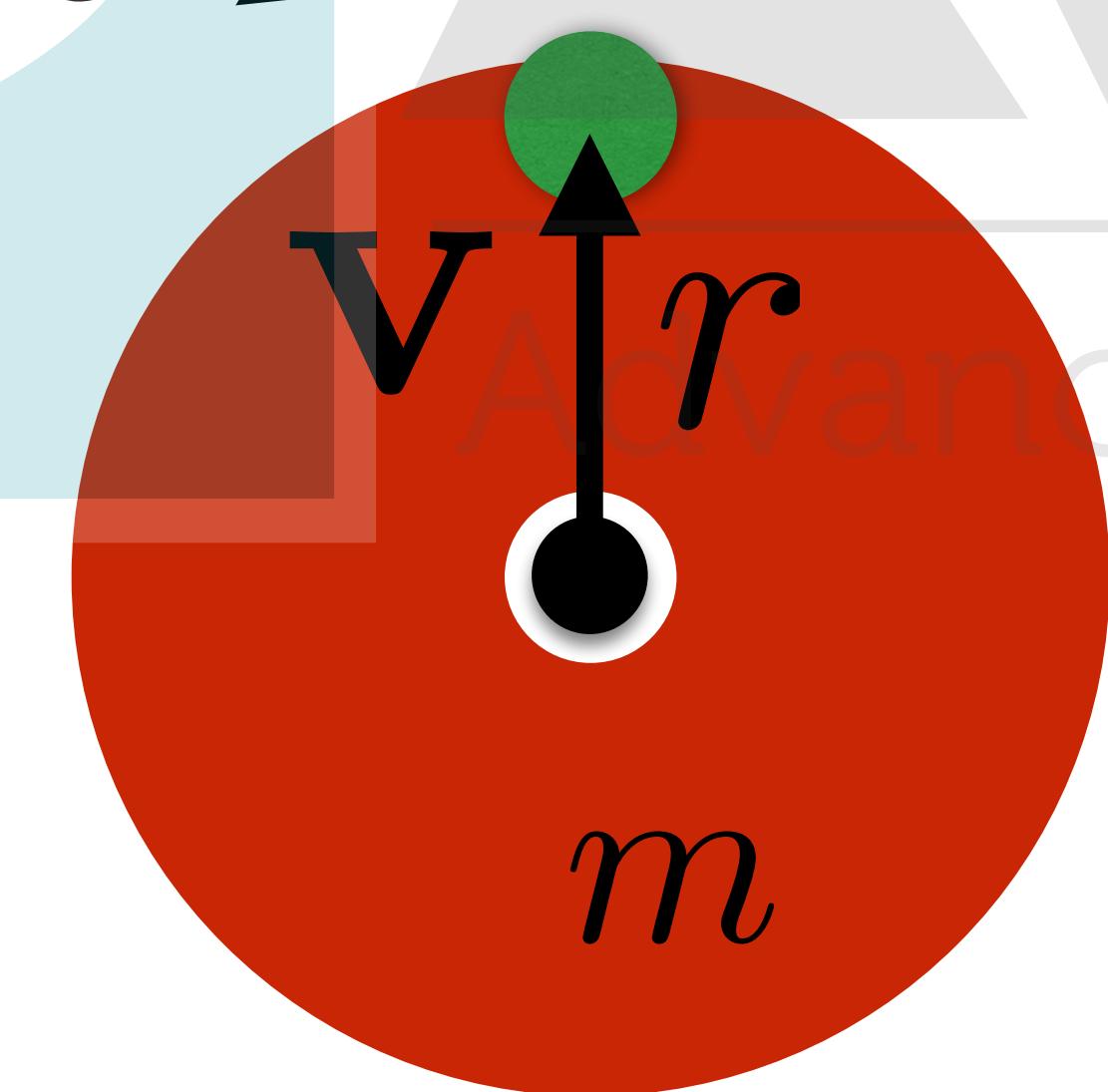
Conclusão

Momento linear:

$$\mathbf{L} = m\mathbf{V}$$

Momento angular:

$$\omega$$



$$\mathbf{H} = \mathbf{r} \times \mathbf{L}$$

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$$

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{r}_i \times (\omega \times \mathbf{r}_i) m_i$$

$$H_i = \omega r_i^2 m_i$$

Momento angular

Coordenadas
cilíndricas

Momento
de Inércia

Conclusão

Momento linear:

$$\mathbf{L} = m\mathbf{V}$$

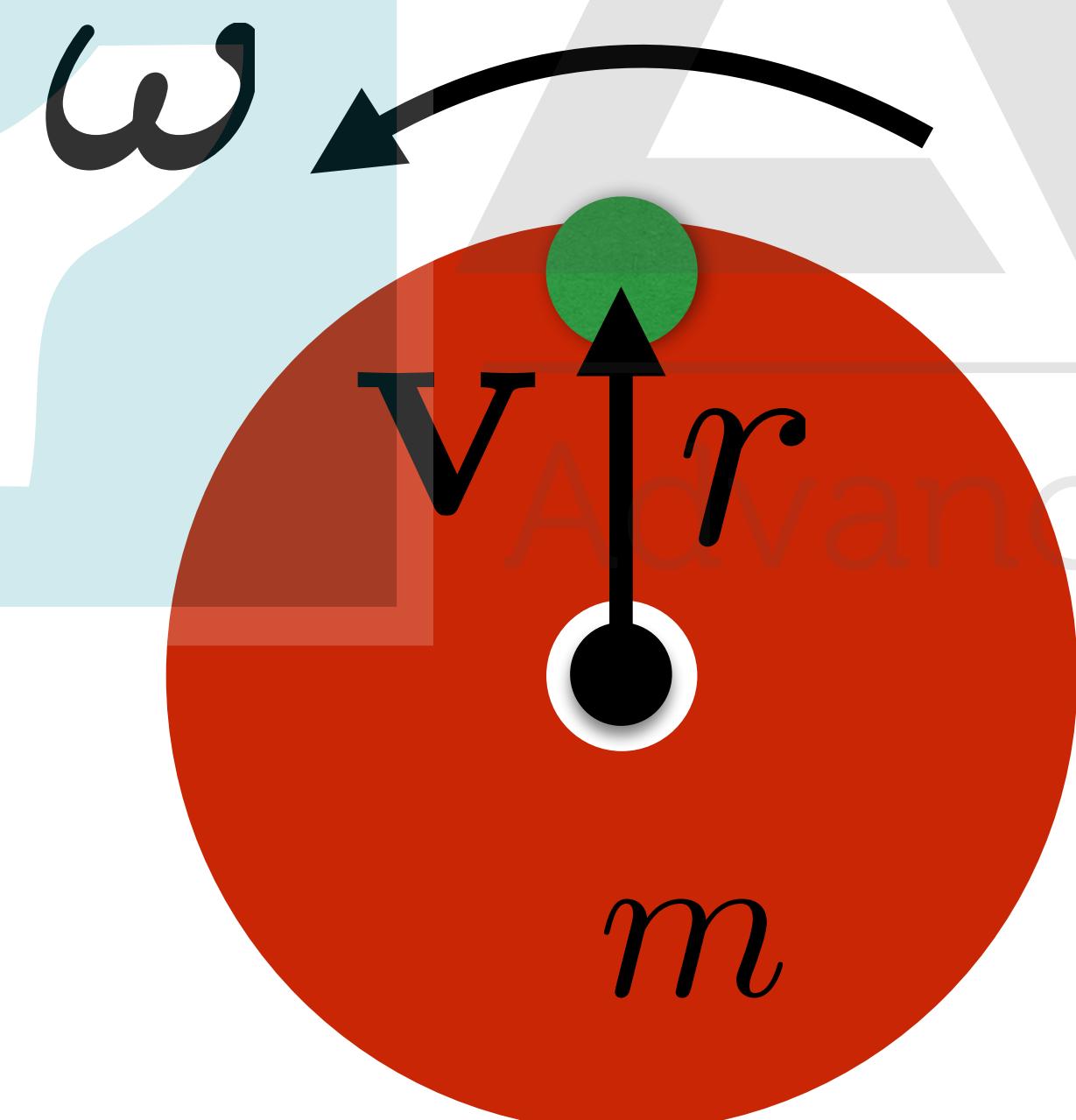
Momento angular:

$$\mathbf{H} = \mathbf{r} \times \mathbf{L}$$

$$H_i = \omega r_i^2 m_i$$

$$H = \omega \sum_{i=1}^N r_i^2 m_i$$

momento de
inércia I



Momento de inércia

Coordenadas
cilíndricas

Momento
de Inércia

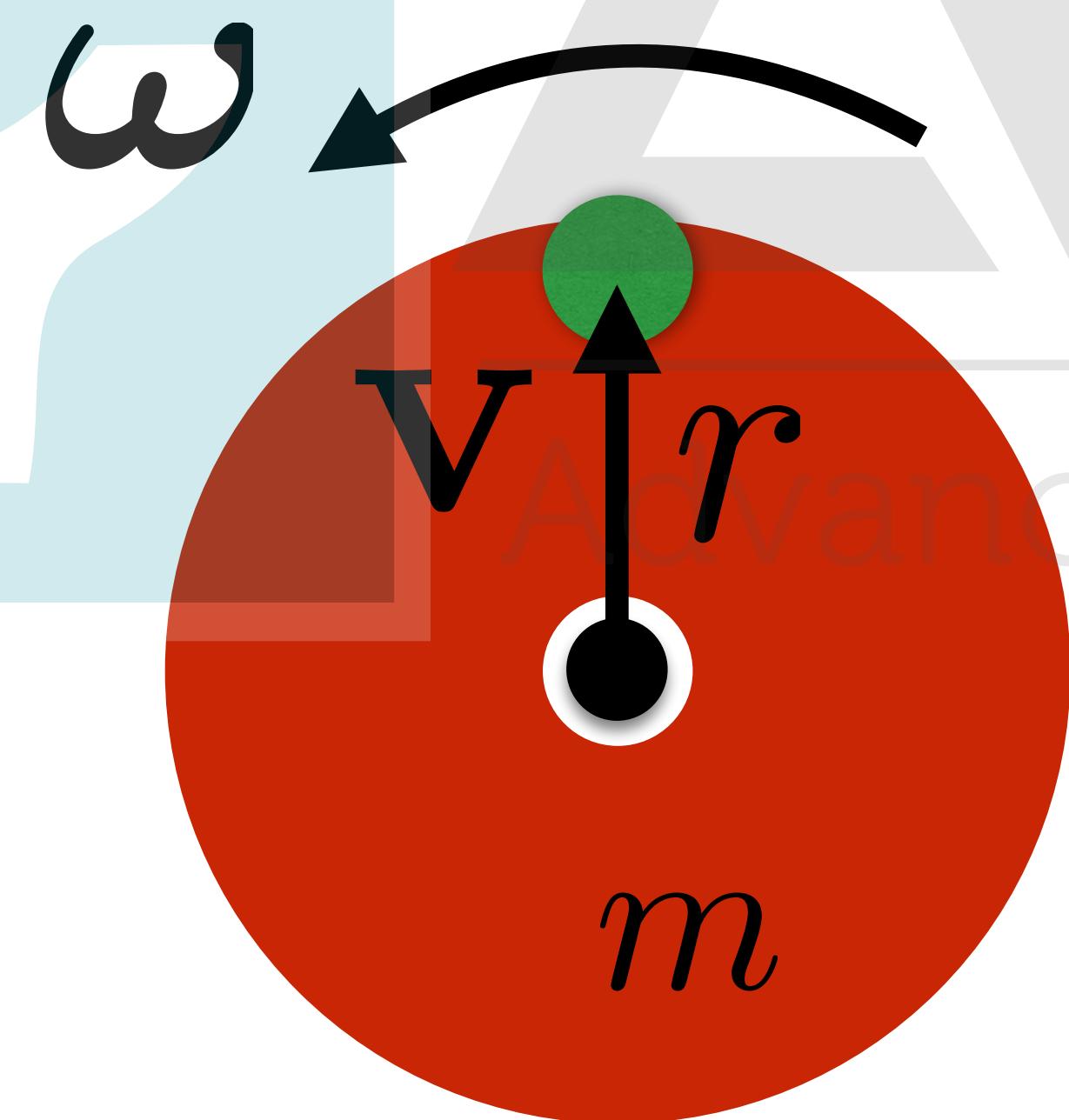
Conclusão

Momento linear:

$$\mathbf{L} = m\mathbf{V}$$

Momento angular:

$$\mathbf{H} = \mathbf{r} \times \mathbf{L}$$



$$\mathbf{H} = I\boldsymbol{\omega}$$

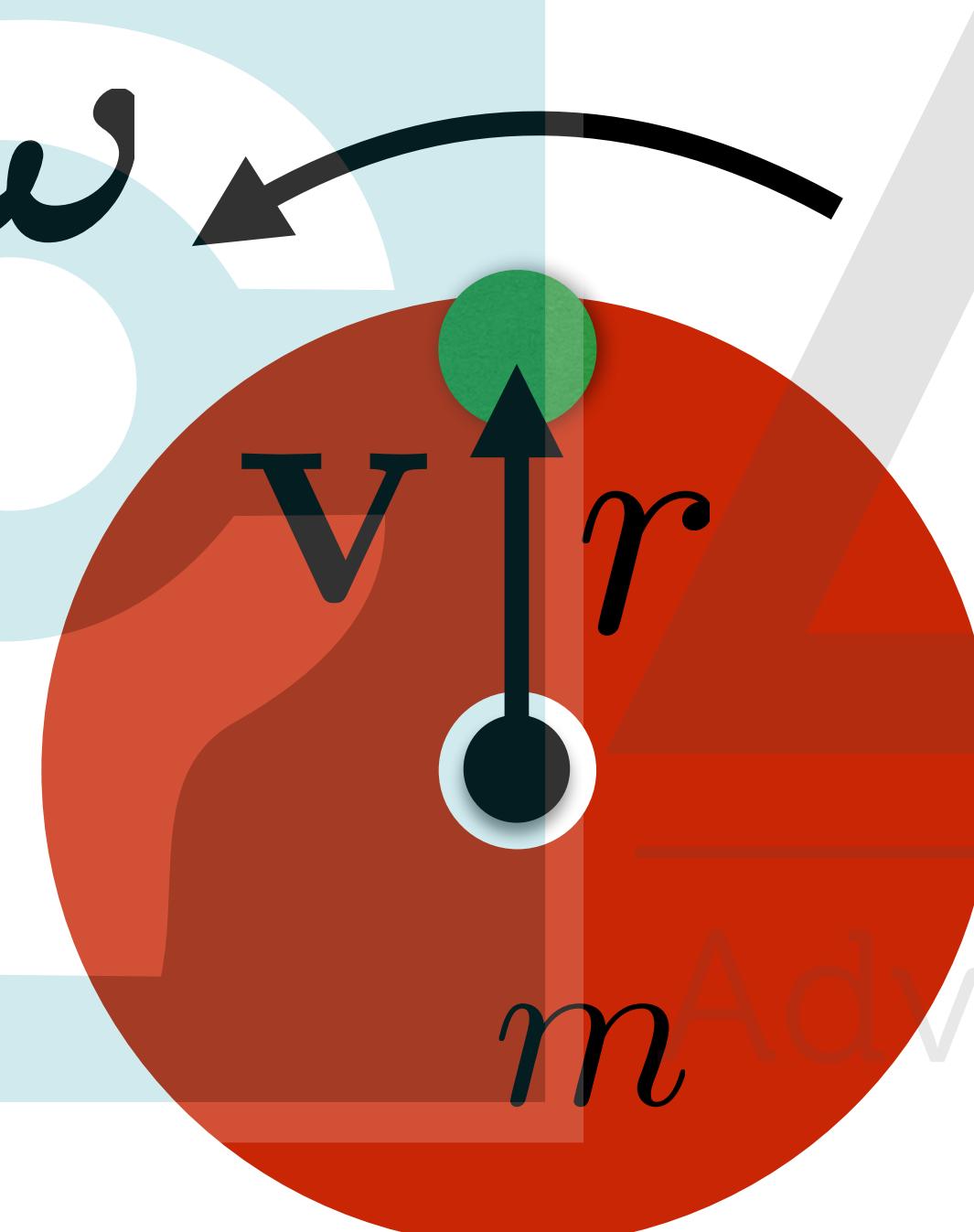
medida da resistência
de um corpo a uma
aceleração angular

Momento de inércia

Coordenadas
cilíndricas

Momento
de Inércia

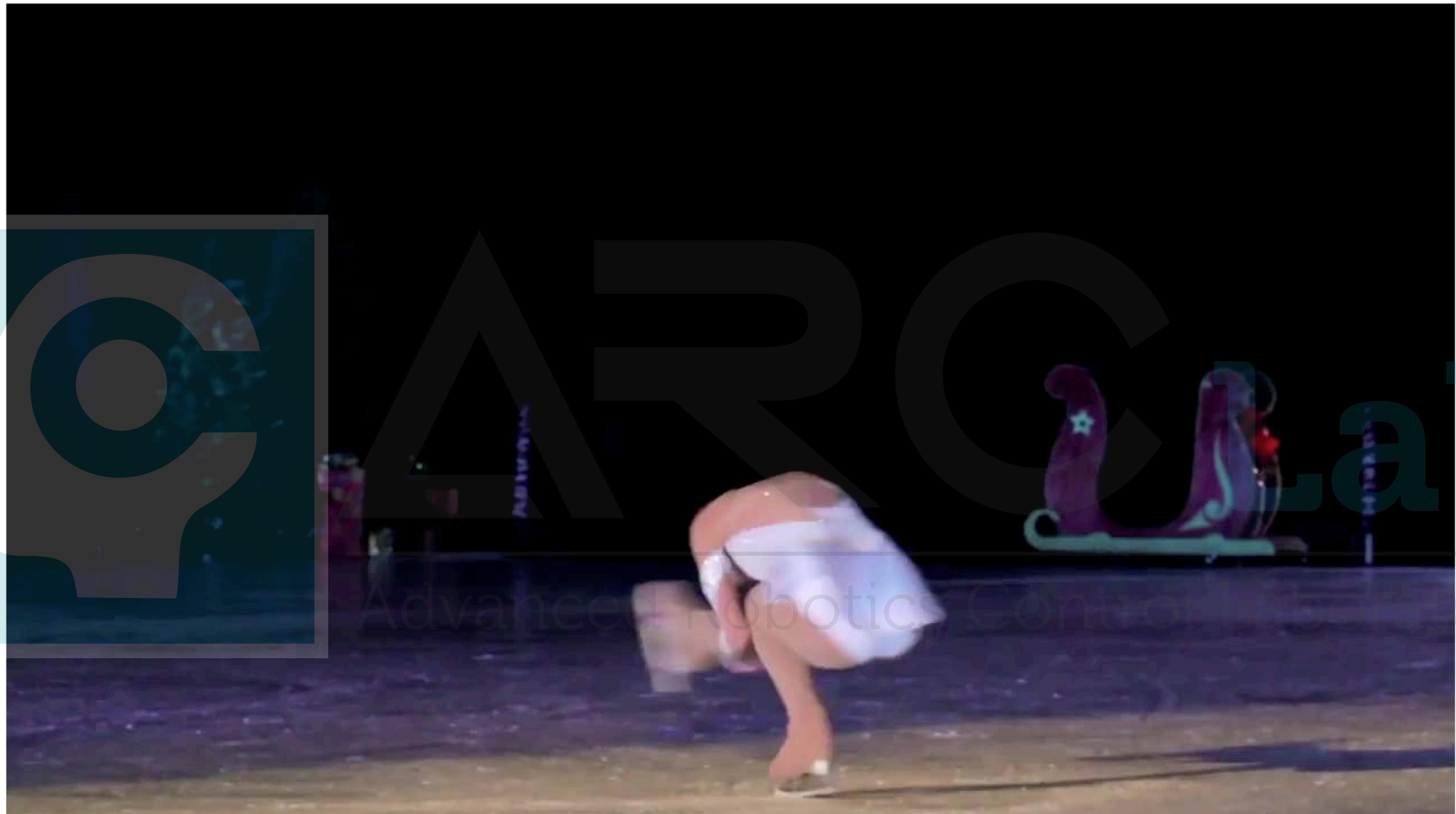
Conclusão



$$H = I\omega$$

$$I = \sum_{i=1}^N r_i^2 m_i$$

$$I = \int_m r^2 dm$$



Momento de inércia

Coordenadas
cilíndricas

Momento
de Inércia

Conclusão

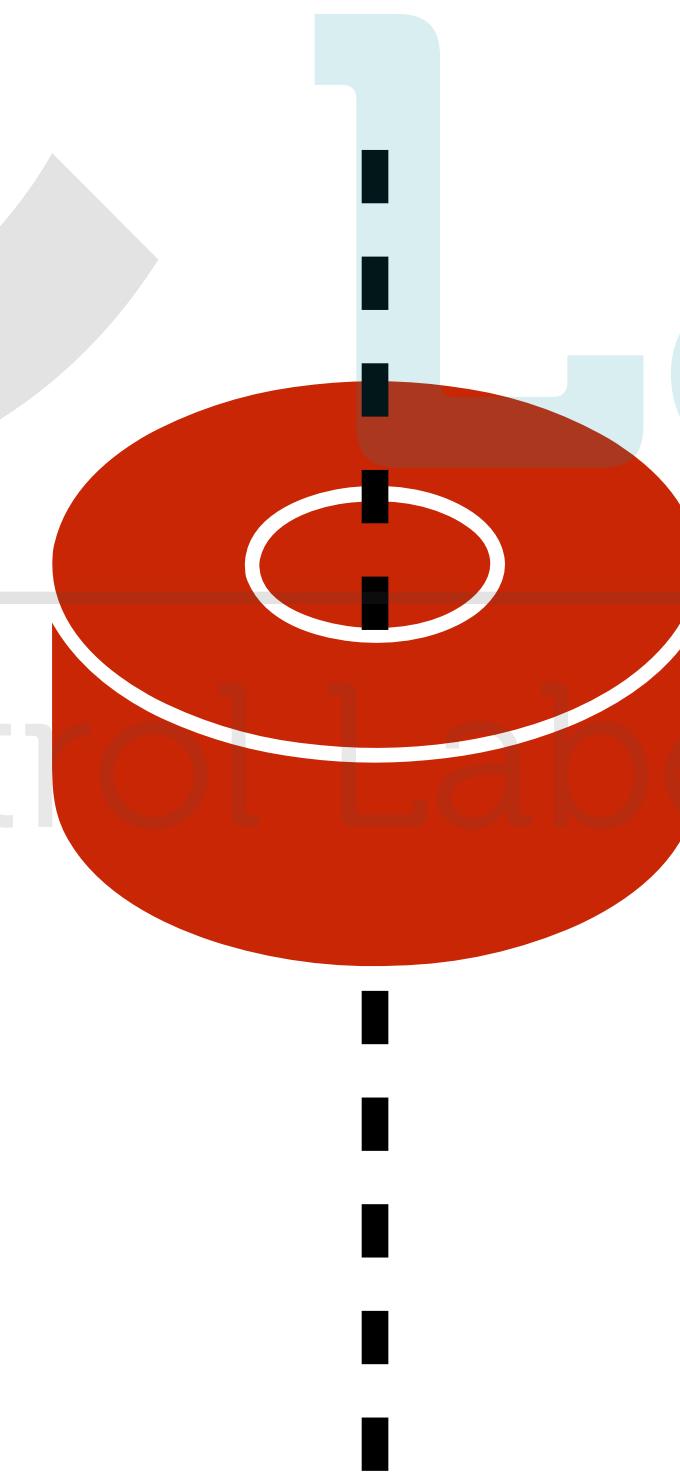
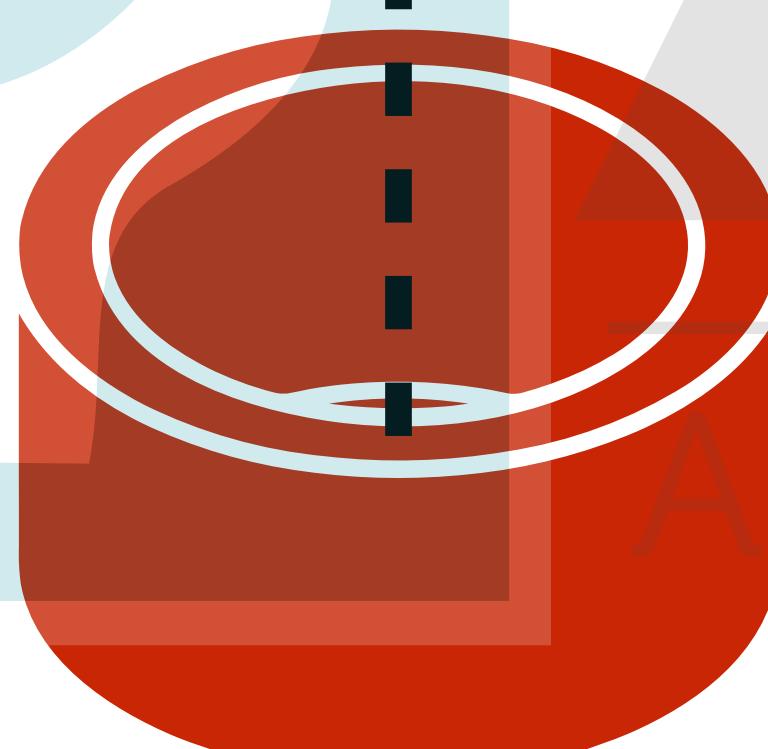
distancia do

eixo de rotação

$$m_1 = m_2$$

$$I_1 > I_2$$

$$I = \int_m r^2 dm$$

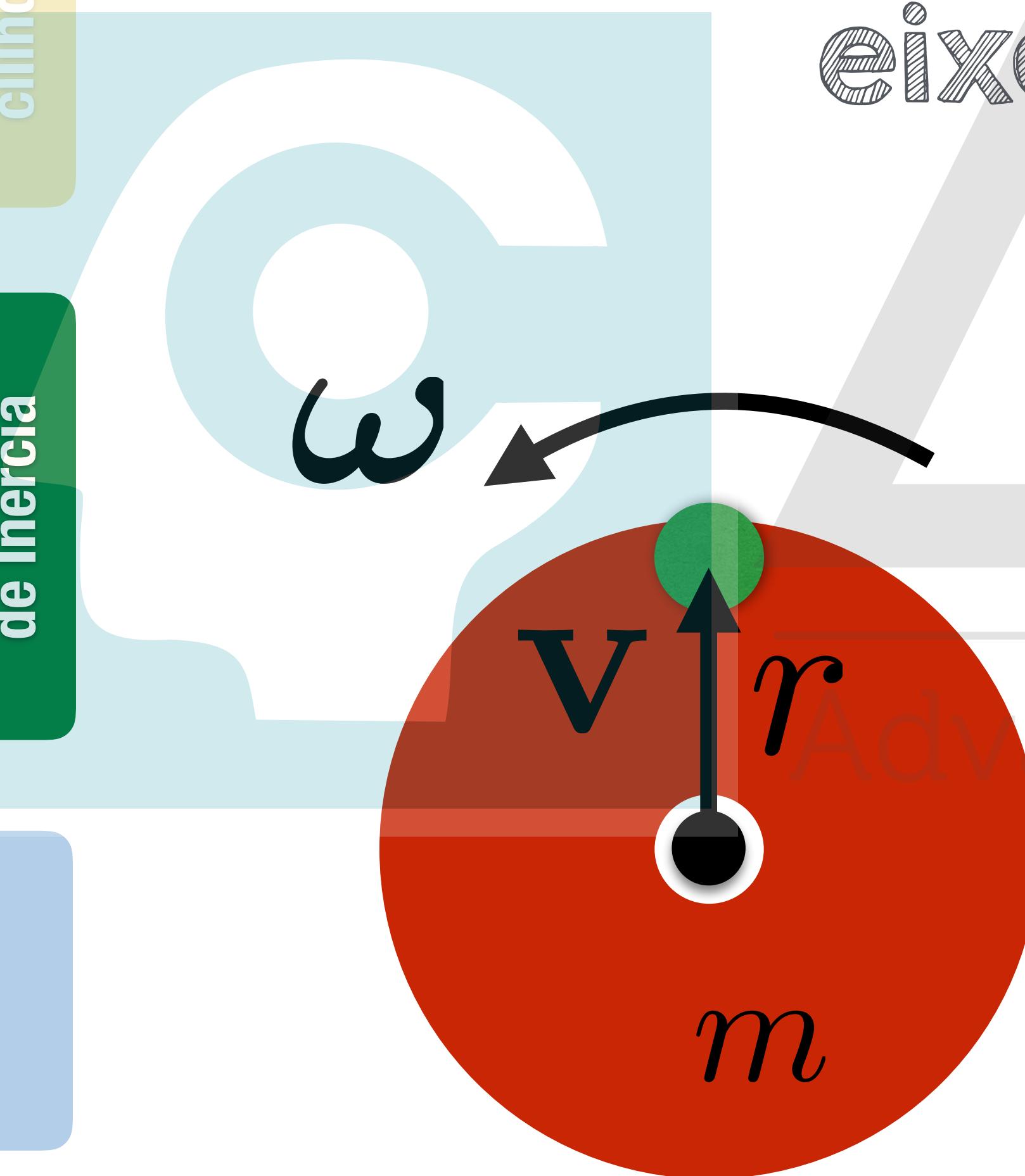


Momento de inércia

Coordenadas
cilíndricas

Momento
de Inércia

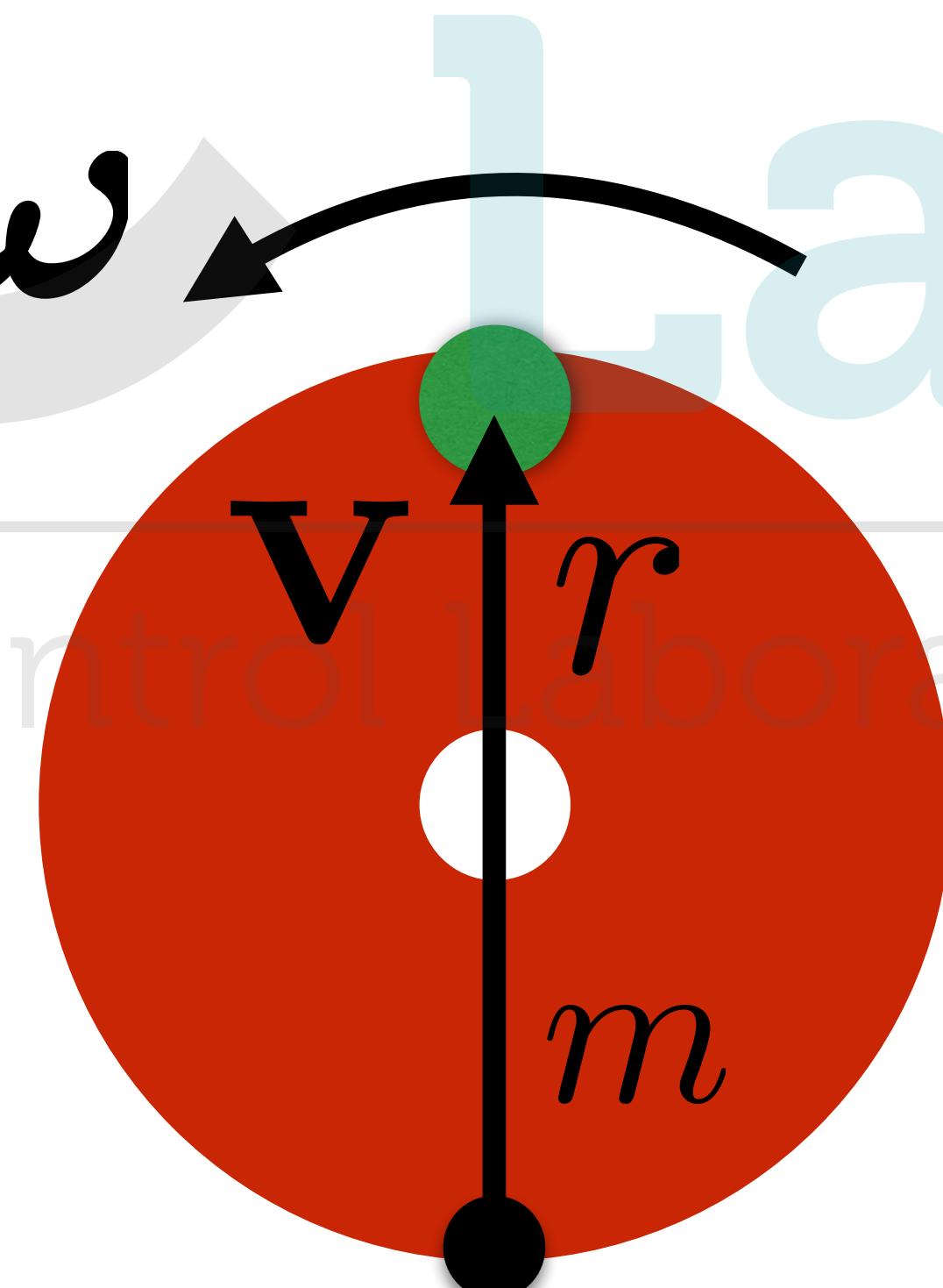
Conclusão



depende do:
eixo de rotação

$$I = \int_m r^2 dm$$

$$I_1 < I_2$$

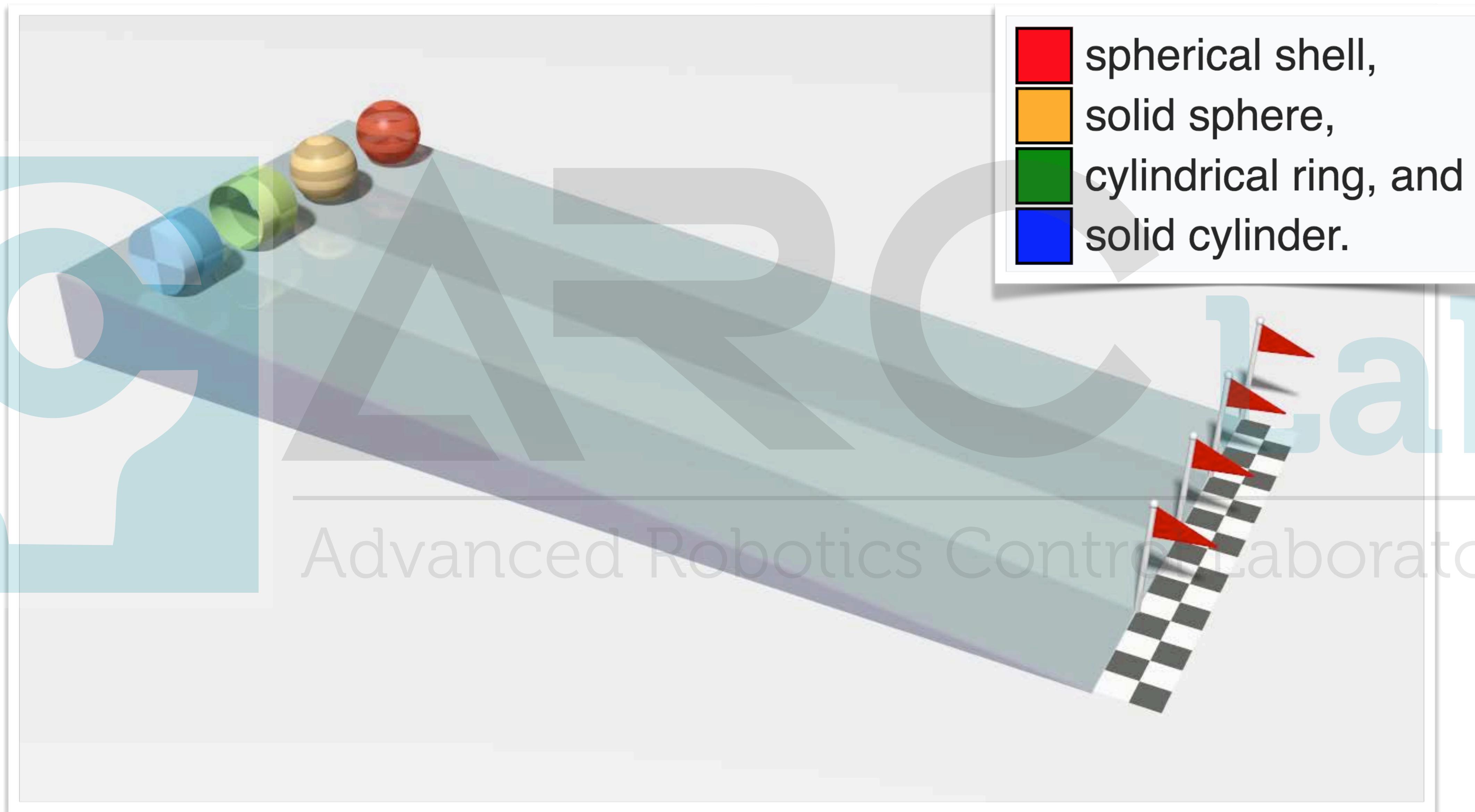


Momento de Inércia

Coordenadas
cilíndricas

Momento
de Inércia

Conclusão



Conteúdo



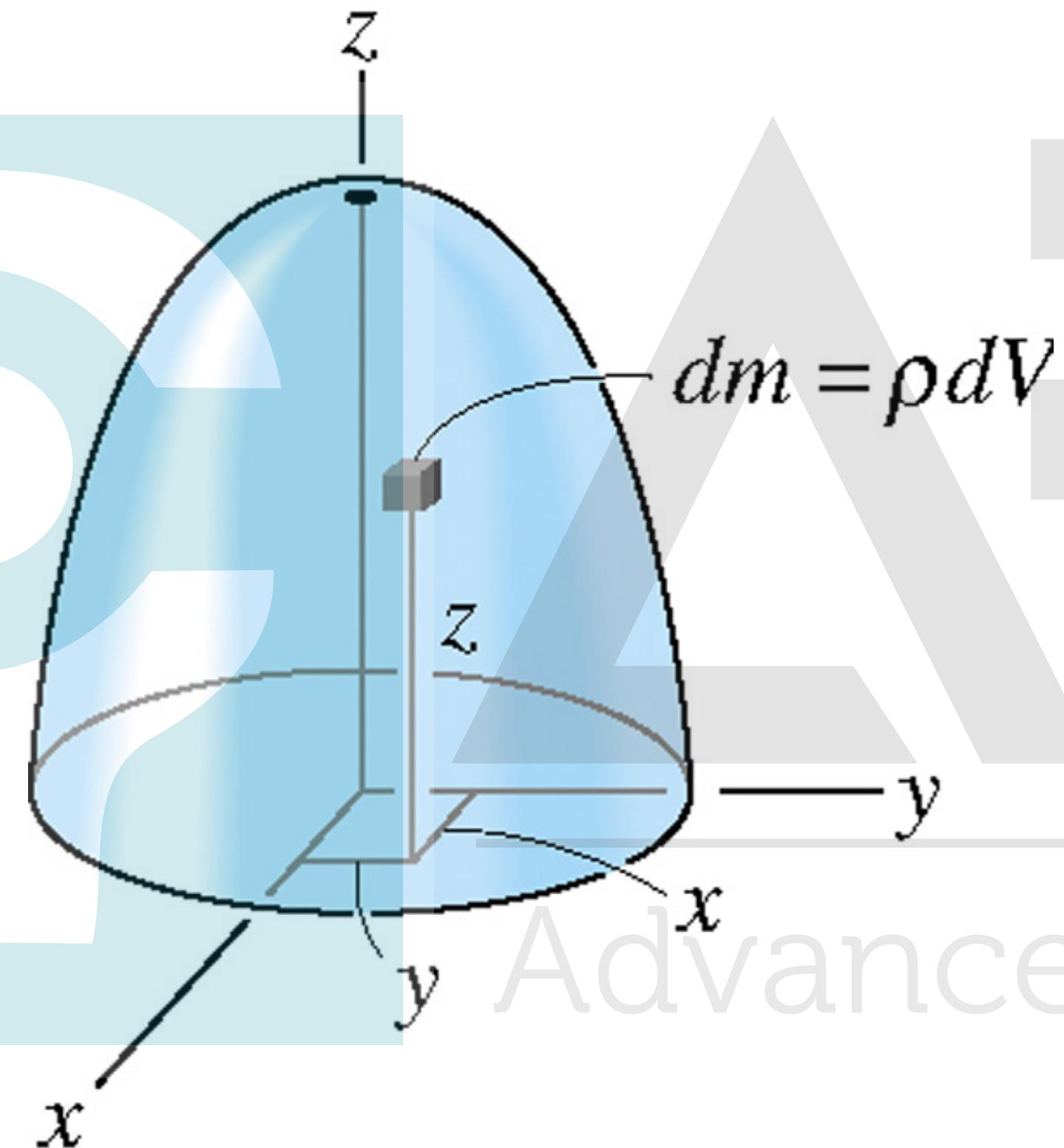
Conclusão

Momento de inércia em função da densidade

Coordenadas
cônicas

Momento
de Inércia

Conclusão



$$I = \int_m r^2 dm$$

$$I = \int_v r^2 \rho dv$$

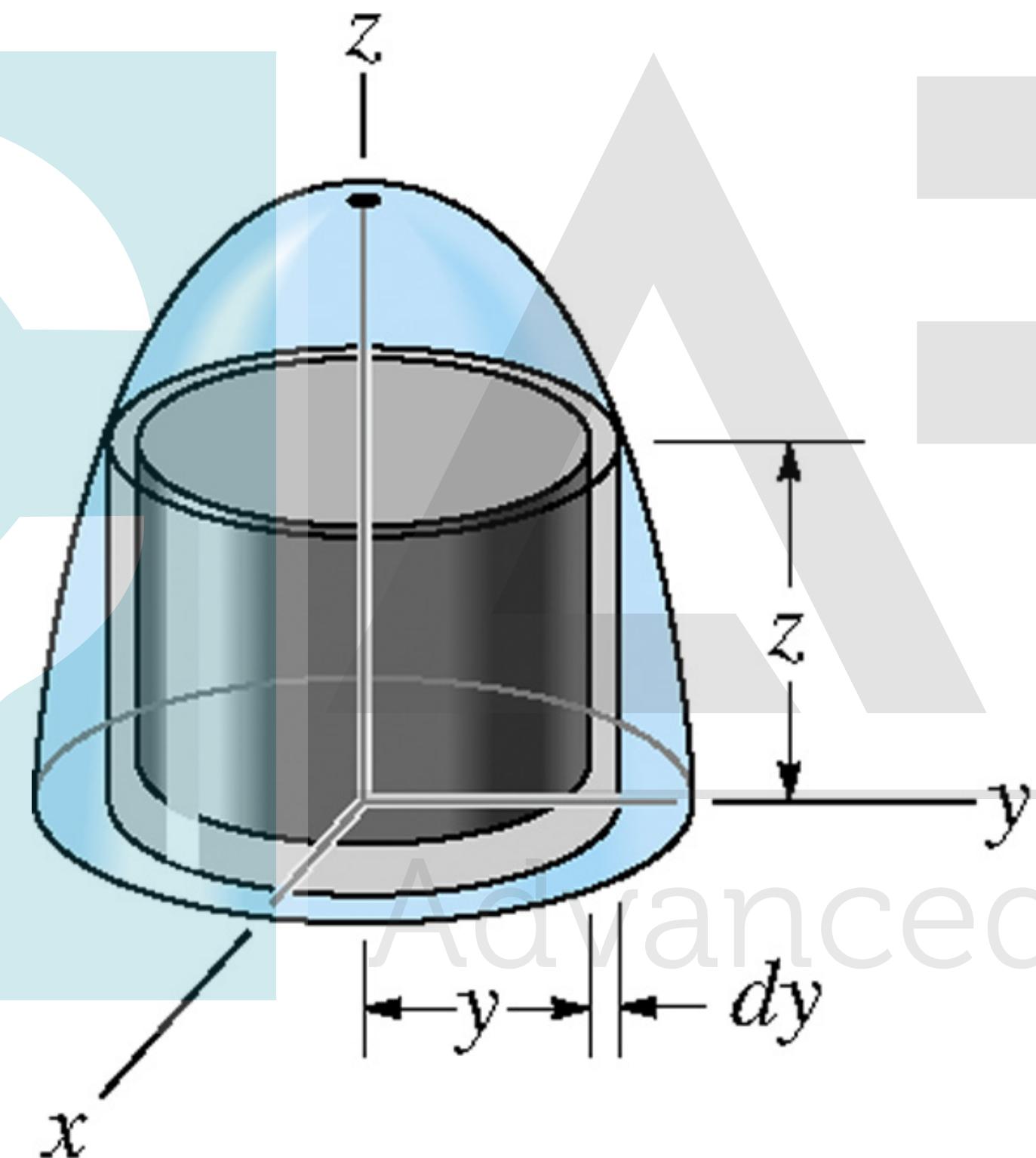
$$I = \rho_c \int_v r^2 dv$$

Elemento de casca

Coordenadas
cilíndricas

Momento
de Inércia

Conclusão



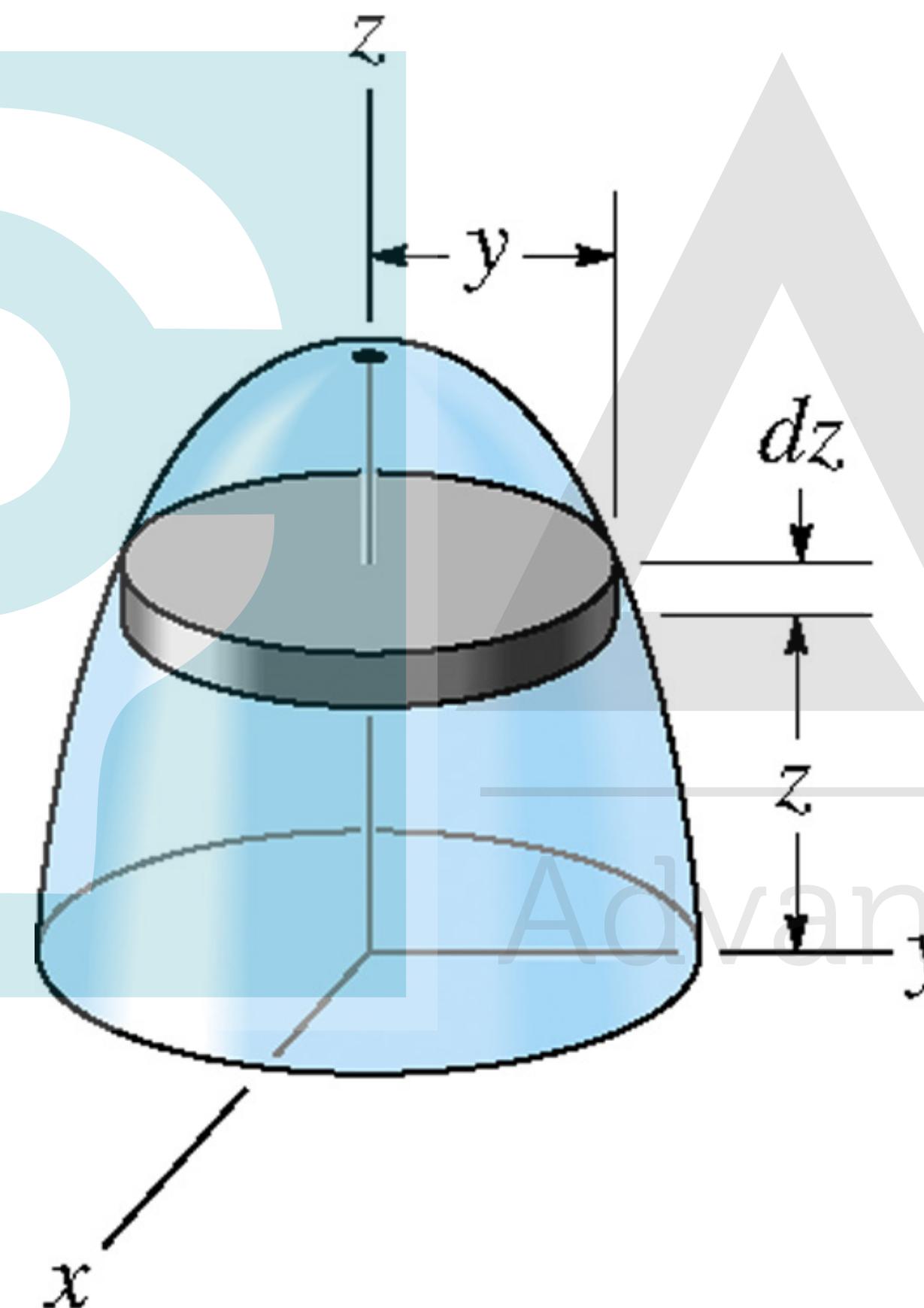
$$dV = (2\pi y)(z)dy$$

Elemento de disco

Coordenadas
cilíndricas

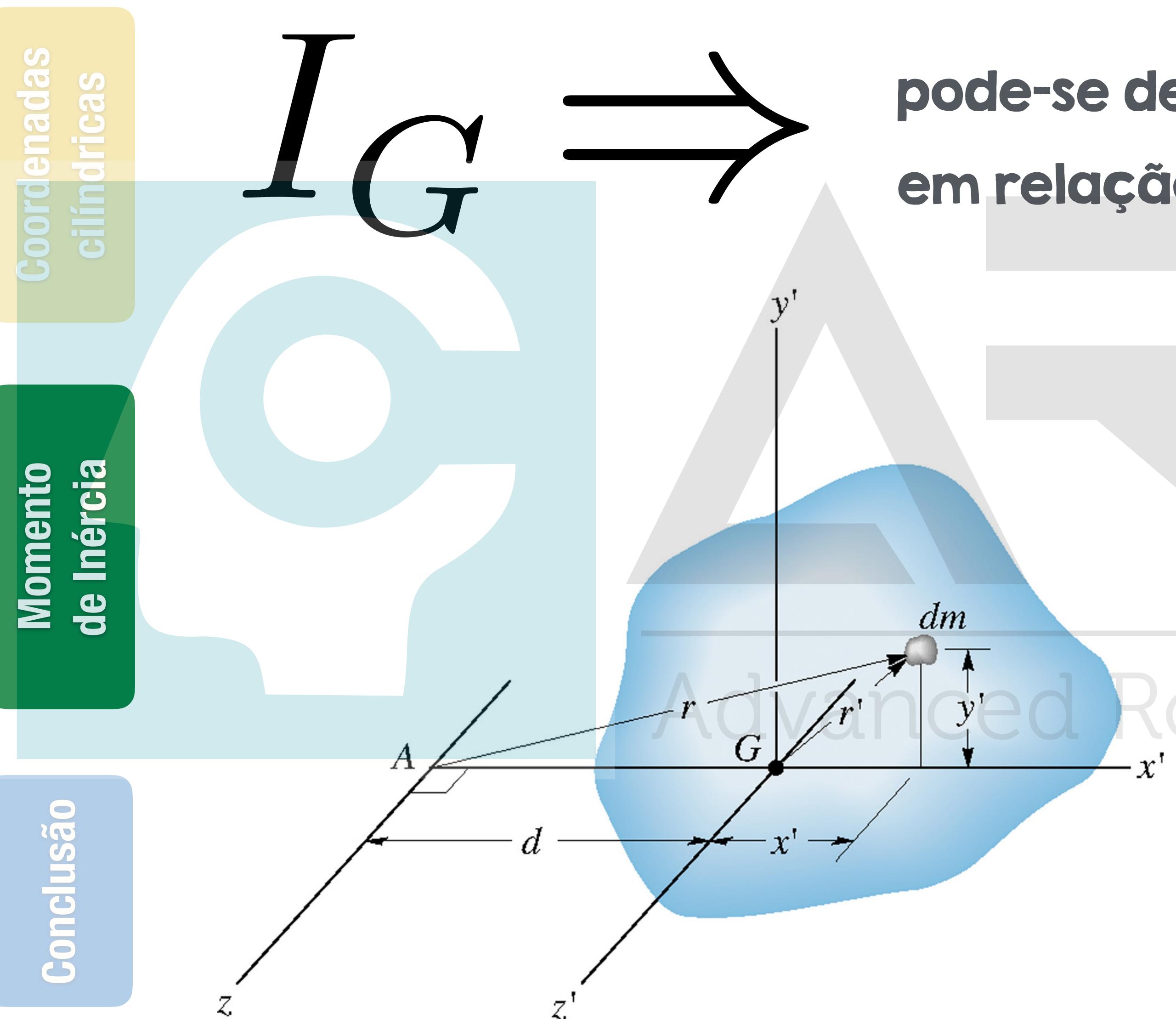
Momento
de Inércia

Conclusão



$$dV = (\pi y^2) dz$$

Teorema dos eixos paralelos



pode-se determinar o momento de inércia
em relação a um eixo paralelo

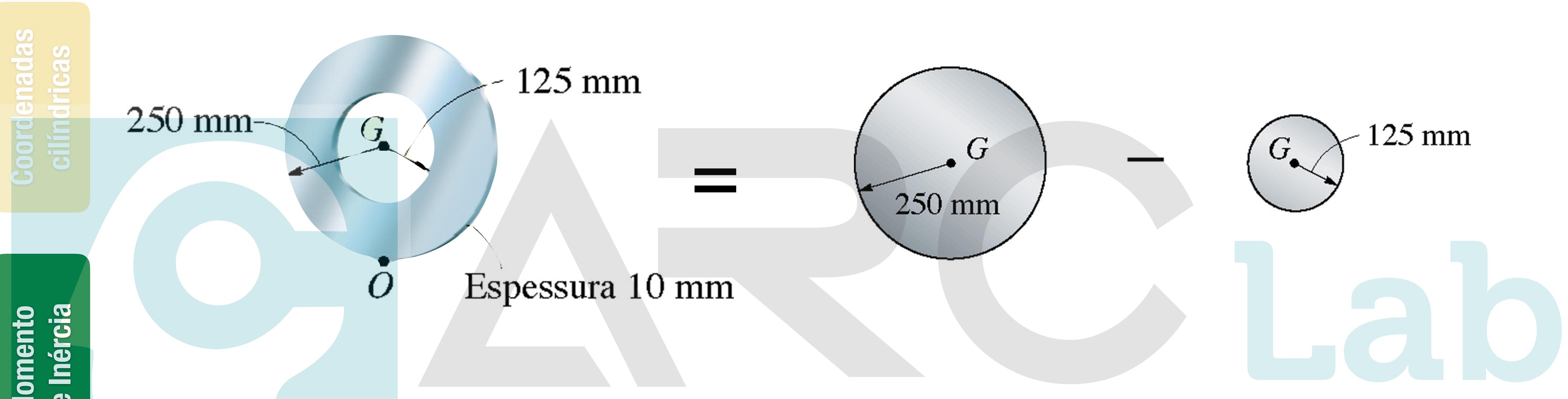
$$I = I_G + md^2$$

Coordenadas
cilíndricas

Momento
de Inércia

Conclusão

Corpos compostos



Advanced Robotics Control Laboratory

$$I = \sum (I_G + md^2)$$

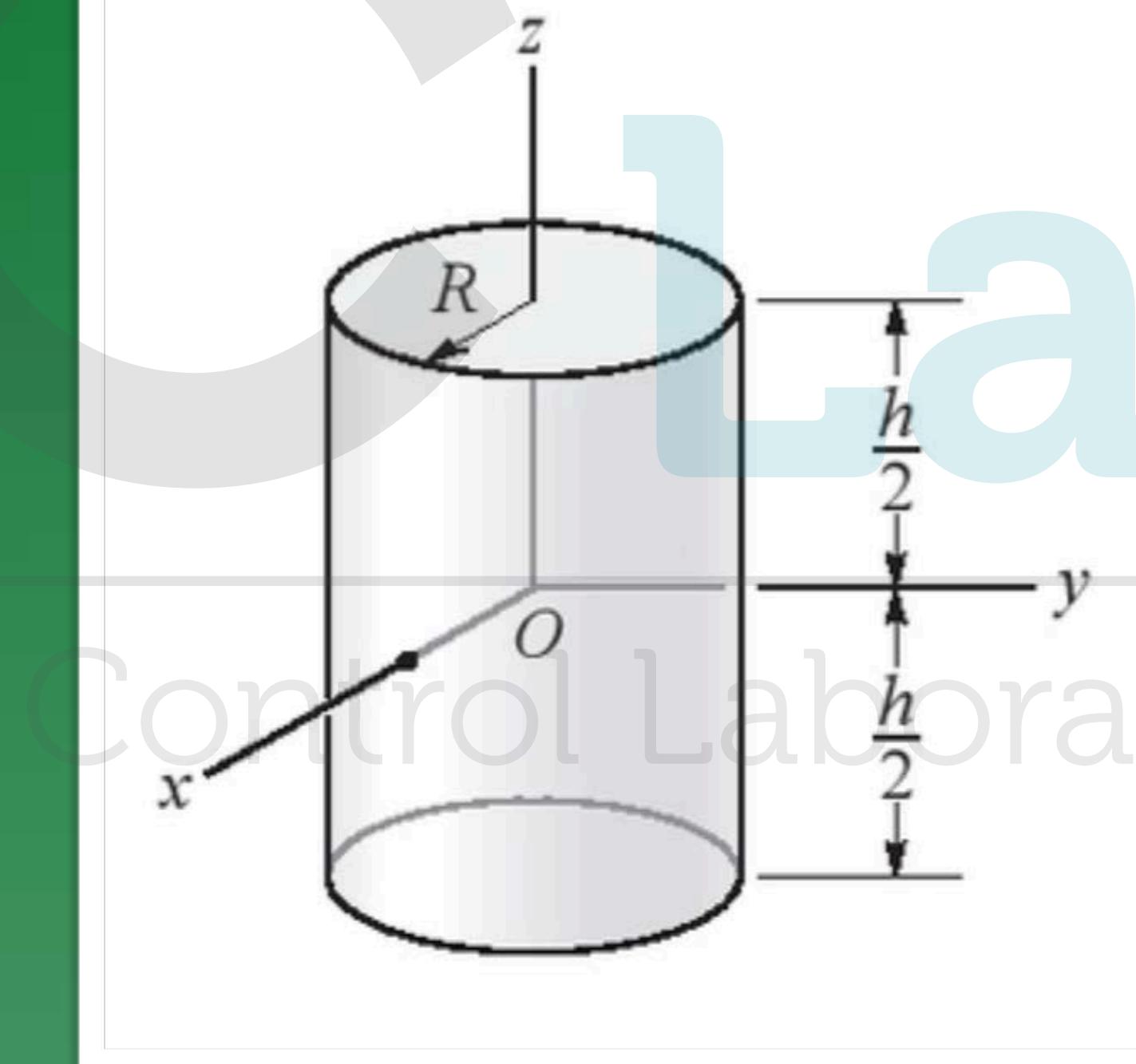
Exemplo 17.1

Coordenadas
cilíndricas

Momento
de Inércia

Conclusão

Determine o momento de inércia do cilindro mostrado na Figura 17.3a em relação ao eixo z . A densidade do material, ρ , é constante.



Problema 17.1

Coordenadas
cônicas

Momento
de Inércia

Conclusão

- 17.1. Determine o momento de inércia I_y para a barra fina. A densidade da barra ρ e a área de seção transversal A são constantes. Expressse o resultado em termos da massa total m da barra.

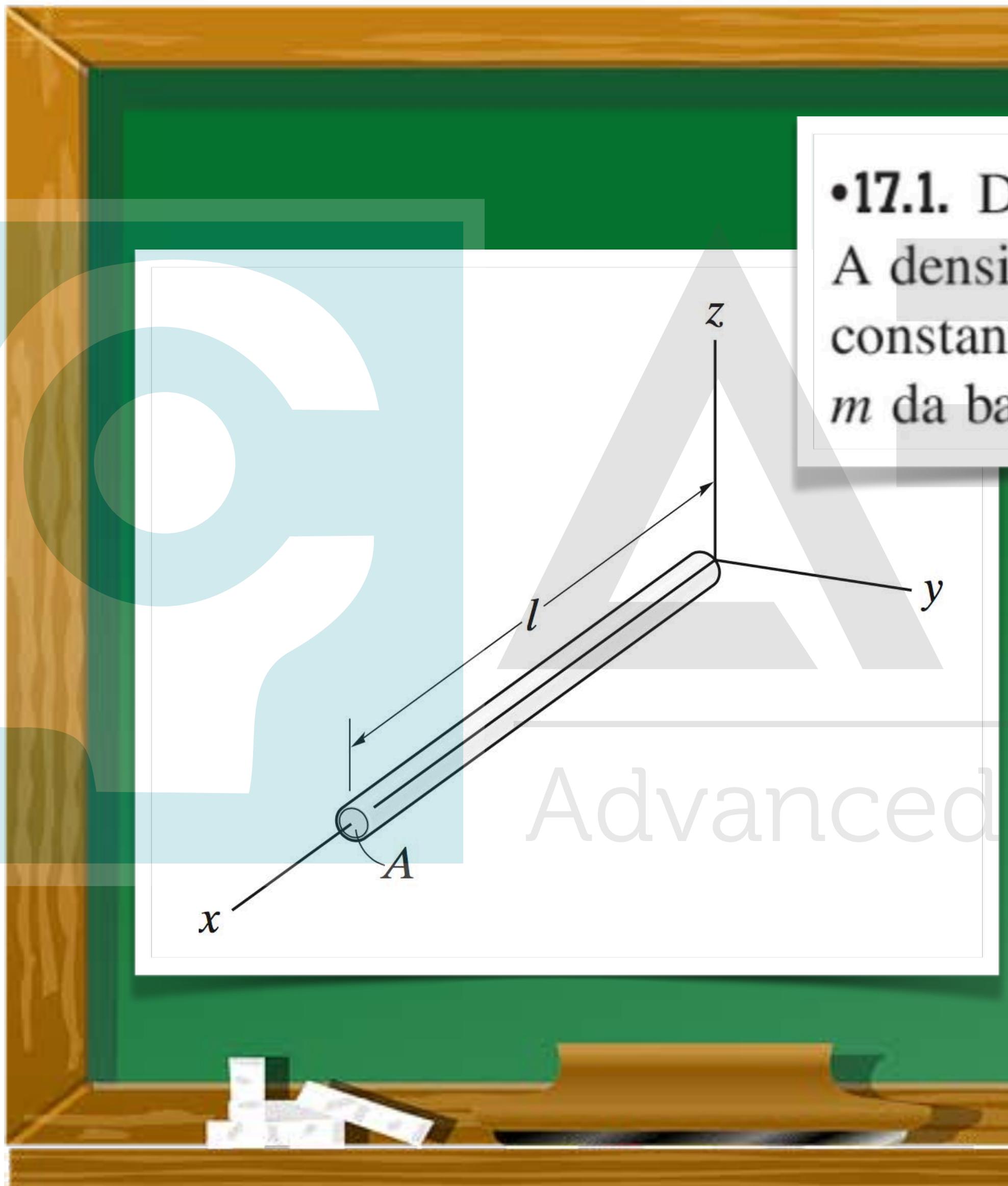


Tabela - Momento de Inércia

Coordenadas
cilíndricas

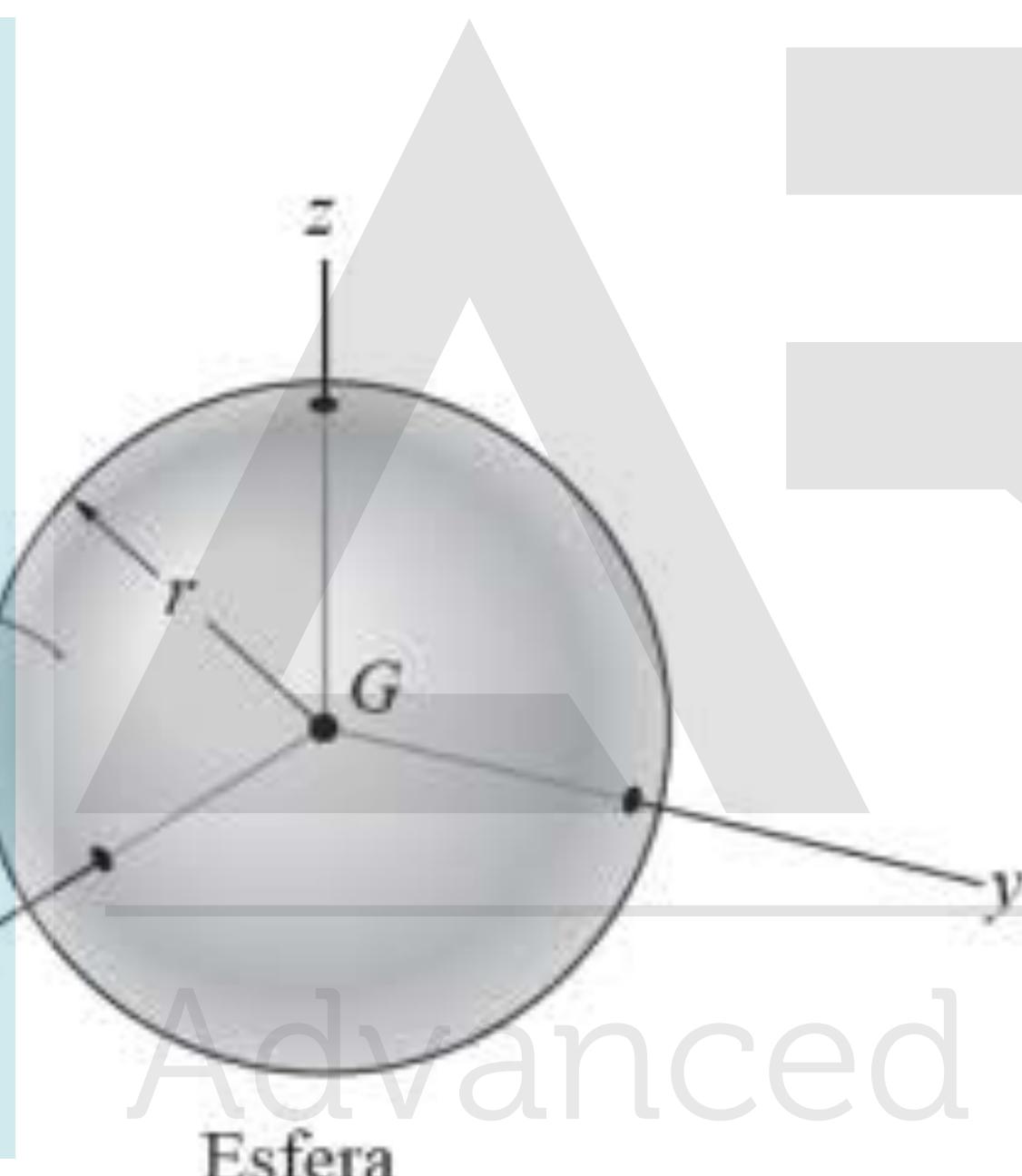
Momento
de Inércia

Conclusão

E.5 Centro de Gravidade e Momento de Inércia da Massa de Sólidos Homogêneos

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$x$$



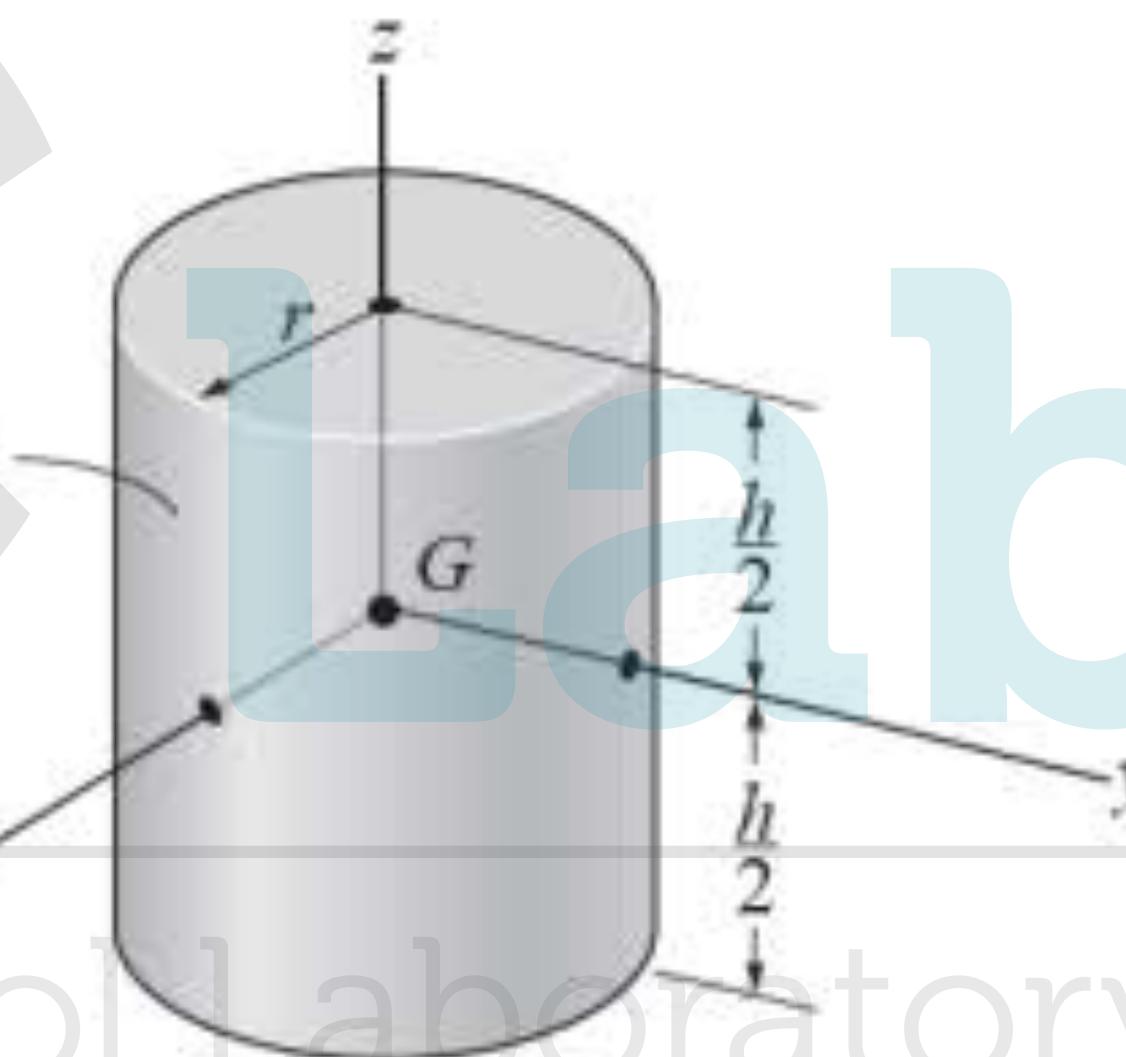
$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{5}mr^2$$

Esféra

$$V = \pi r^2 h$$

$$x$$

$$y$$



Cilindro

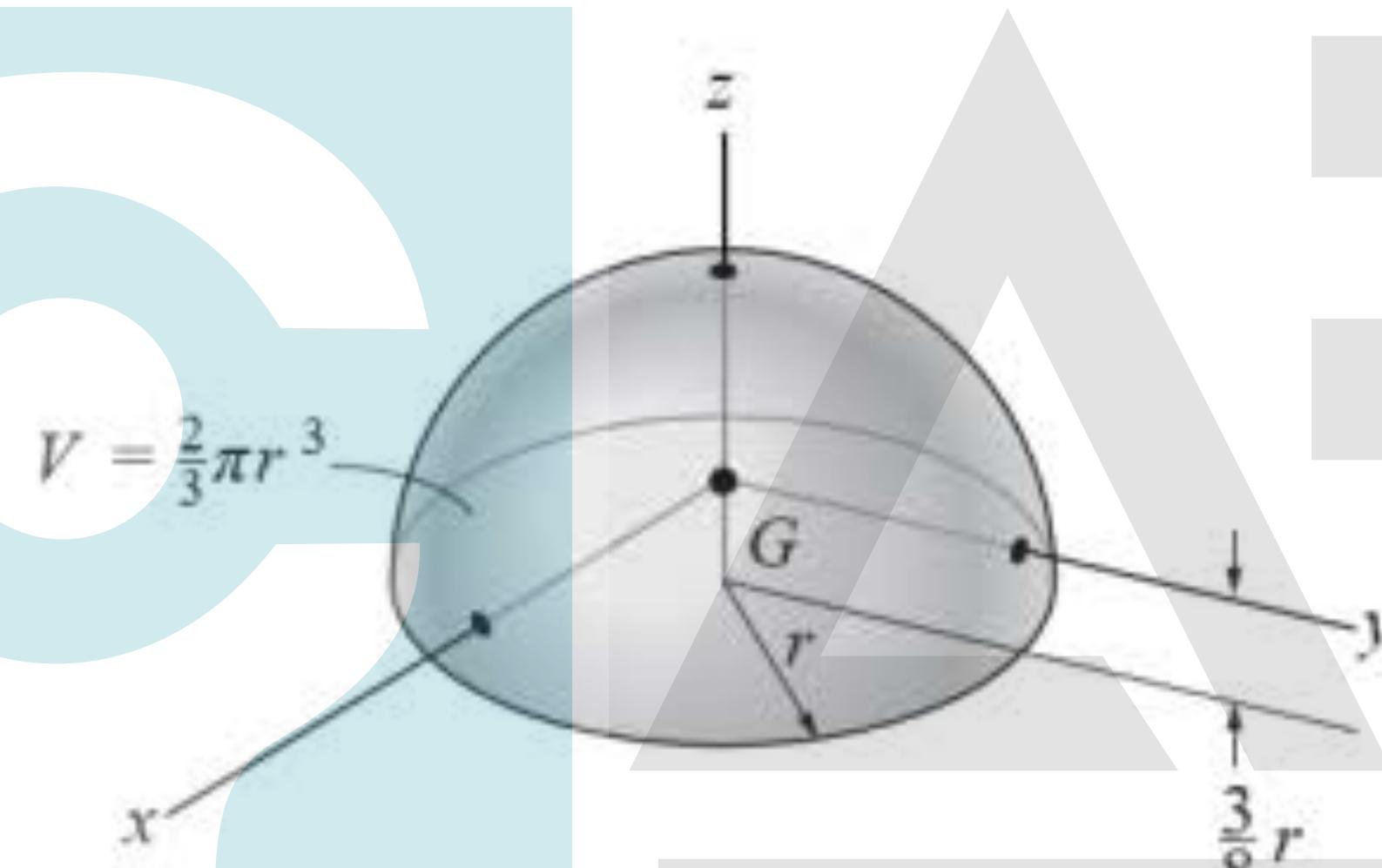
$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{12}m(3r^2 + h^2) \quad I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2$$

Tabela - Momento de Inércia

Coordenadas
cilíndricas

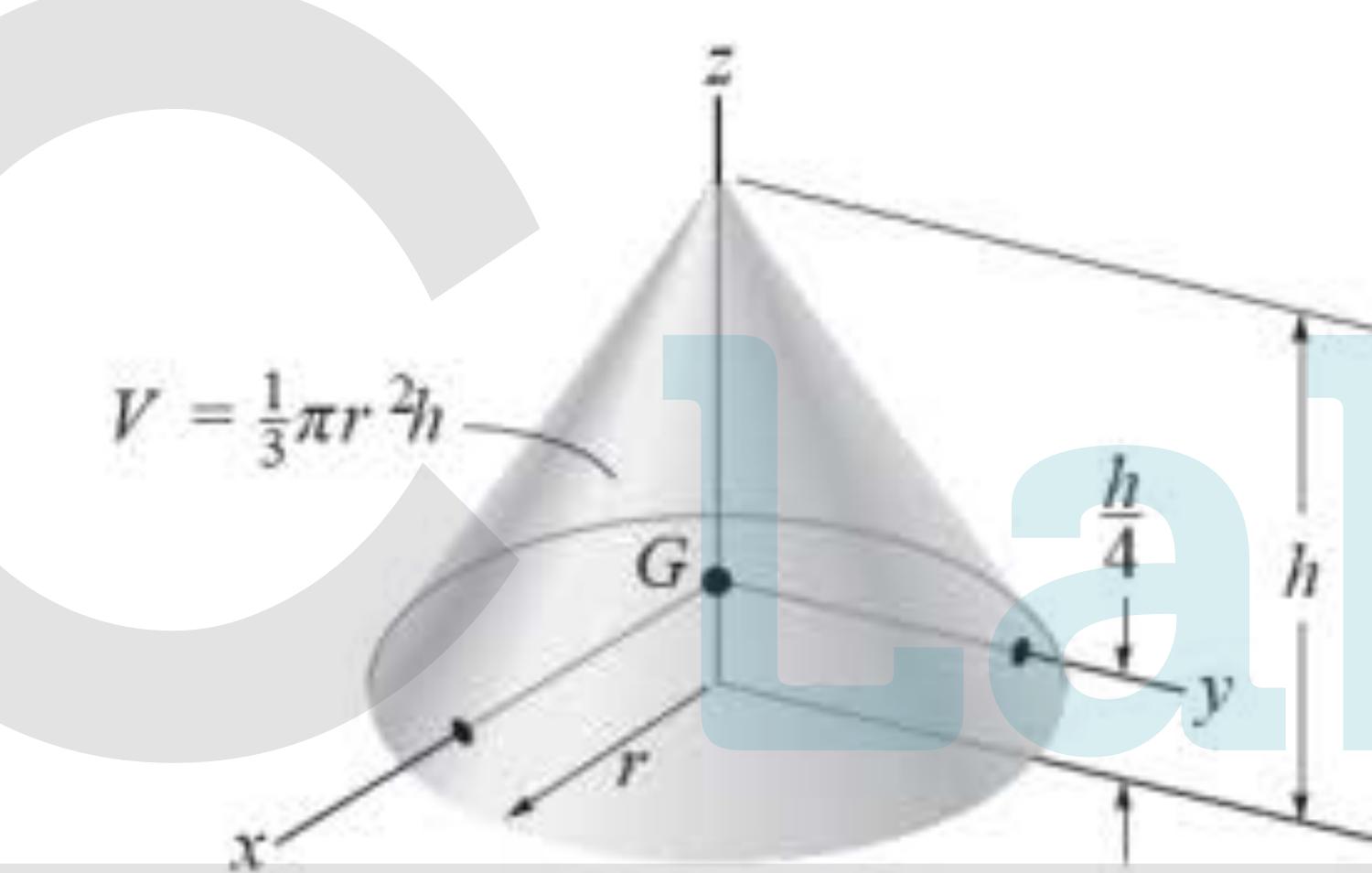
Momento
de Inércia

Conclusão



Hemisfério

$$I_{xx} = I_{yy} = 0.259mr^2 \quad I_{zz} = \frac{2}{5}mr^2$$



Cone

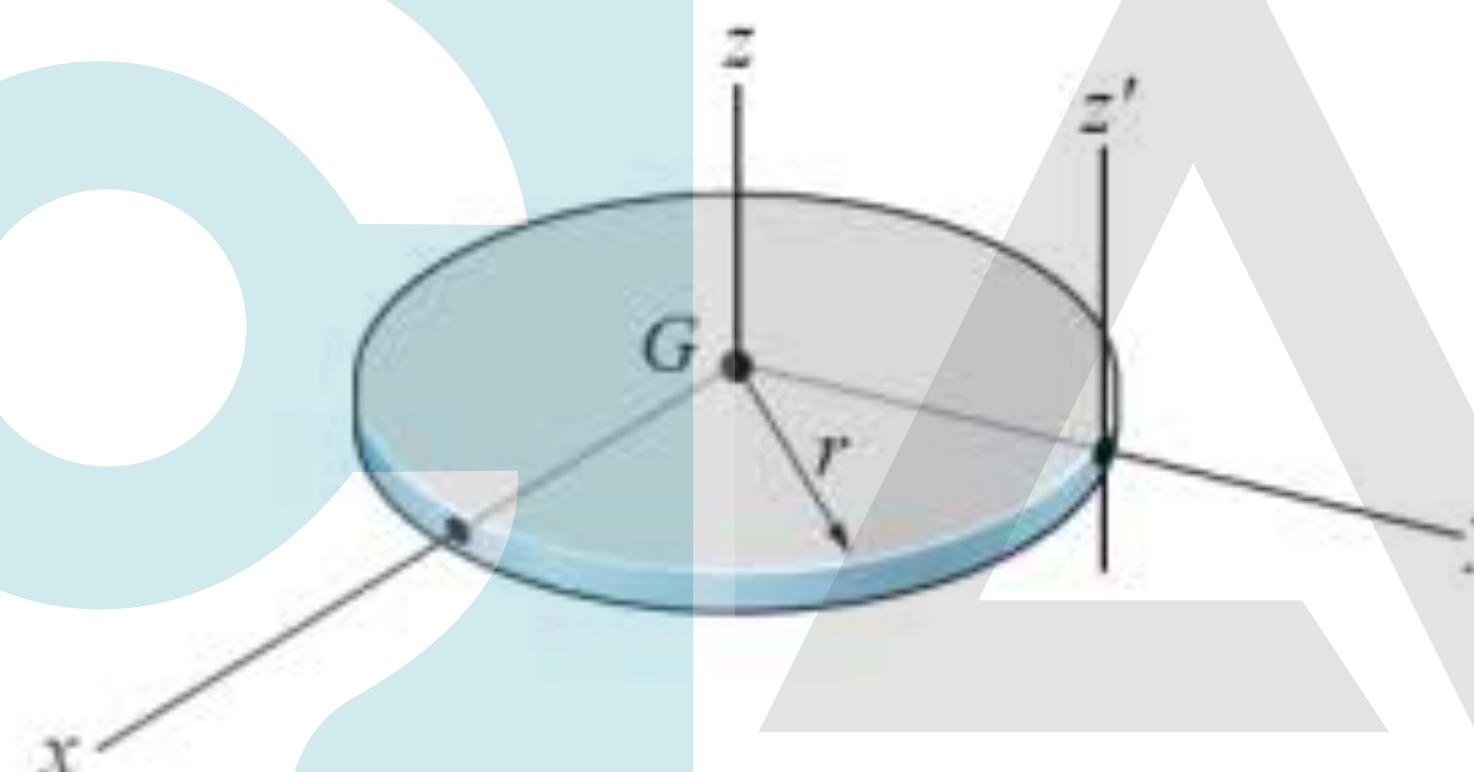
$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{3}{80}m(4r^2 + h^2) \quad I_{zz} = \frac{3}{10}mr^2$$

Tabela - Momento de Inércia

Coordenadas
cilíndricas

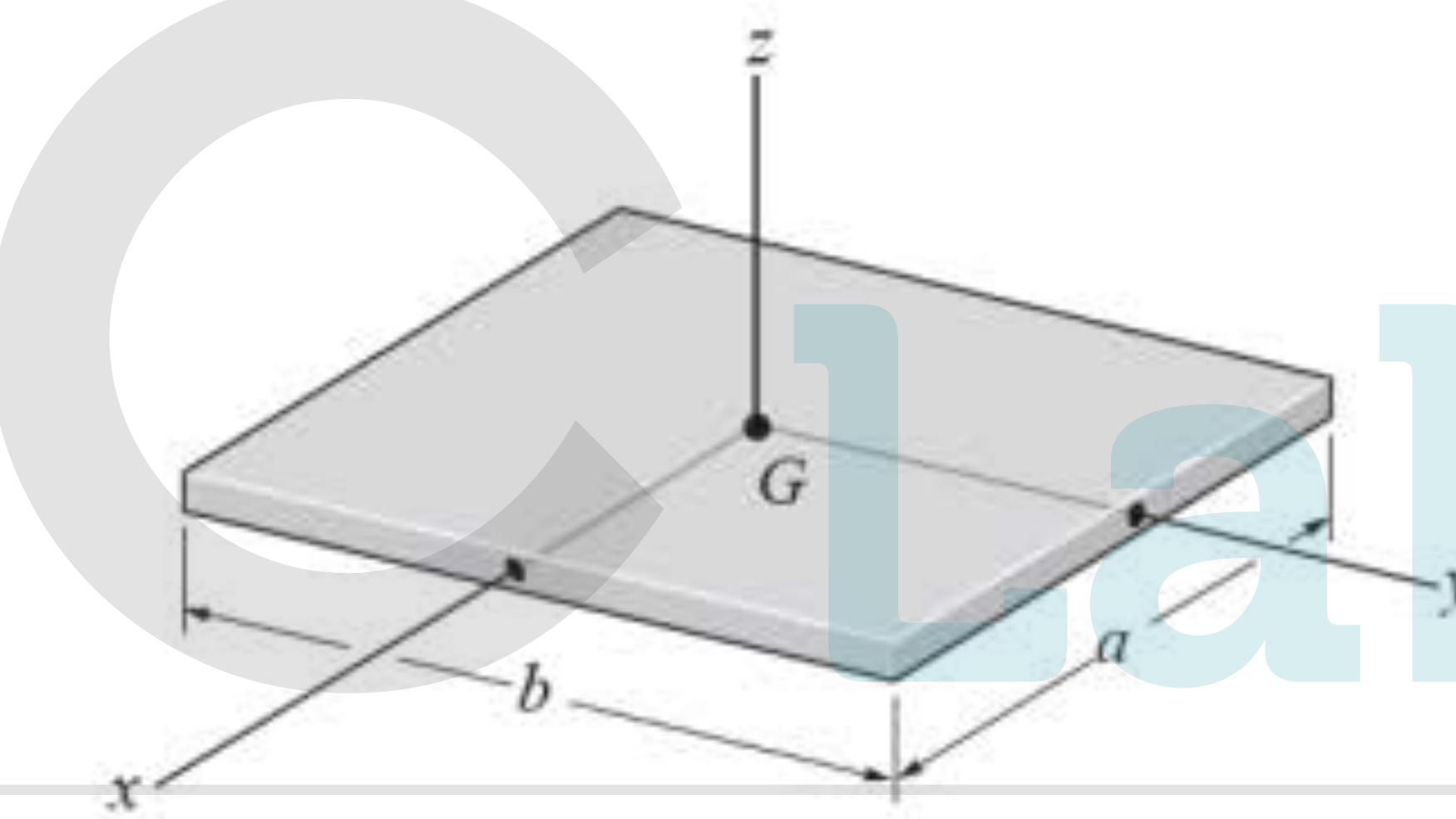
Momento
de Inércia

Conclusão



Disco circular fino

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{4}mr^2 \quad I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2 \quad I_{zz'} = \frac{3}{2}mr^2$$



Placa fina

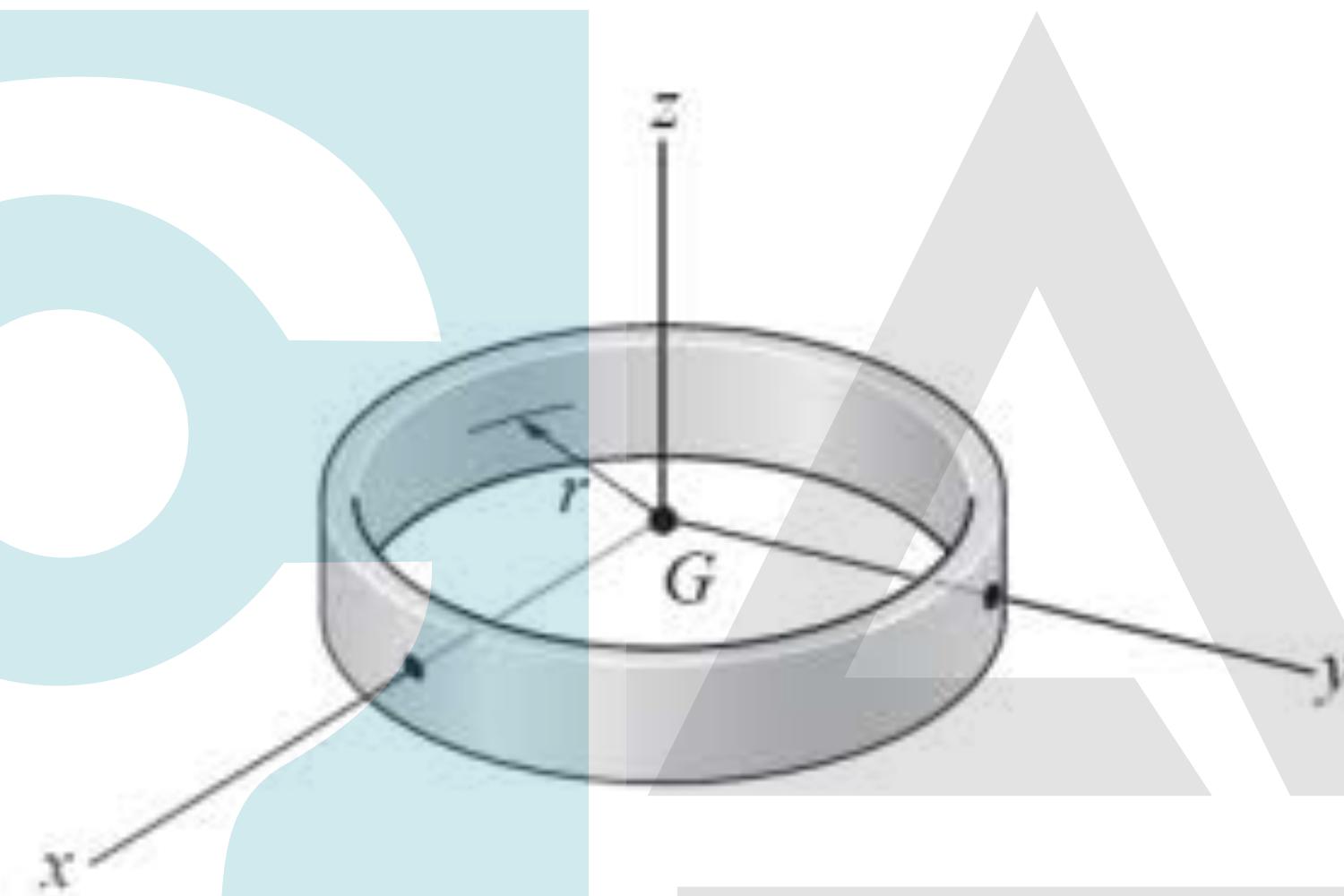
$$I_{xx} = \frac{1}{12}mb^2 \quad I_{yy} = \frac{1}{12}ma^2 \quad I_{zz} = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$$

Tabela - Momento de Inércia

Coordenadas
cônicas

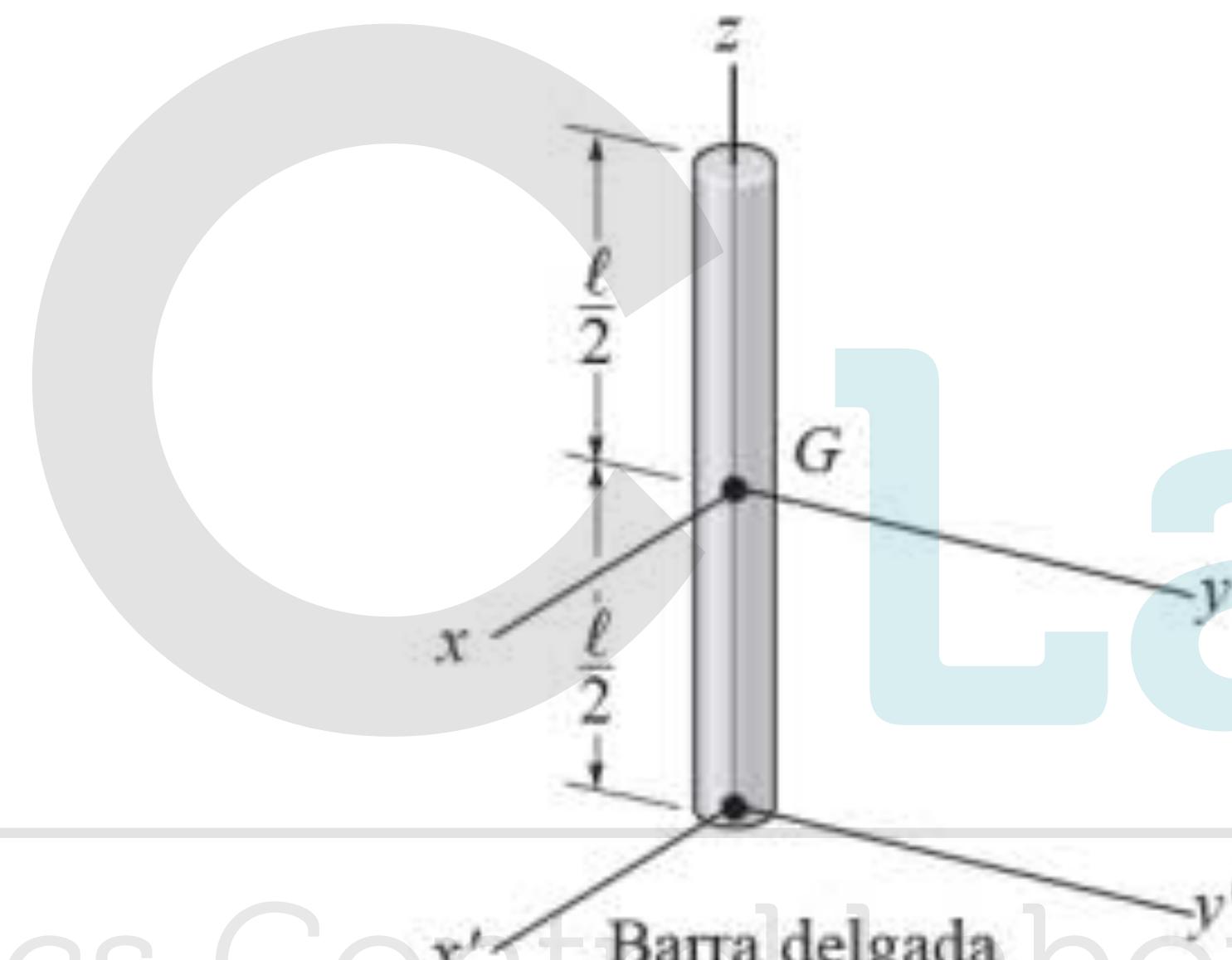
Momento
de Inércia

Conclusão



Anel fino

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2} mr^2 \quad I_{zz} = mr^2$$



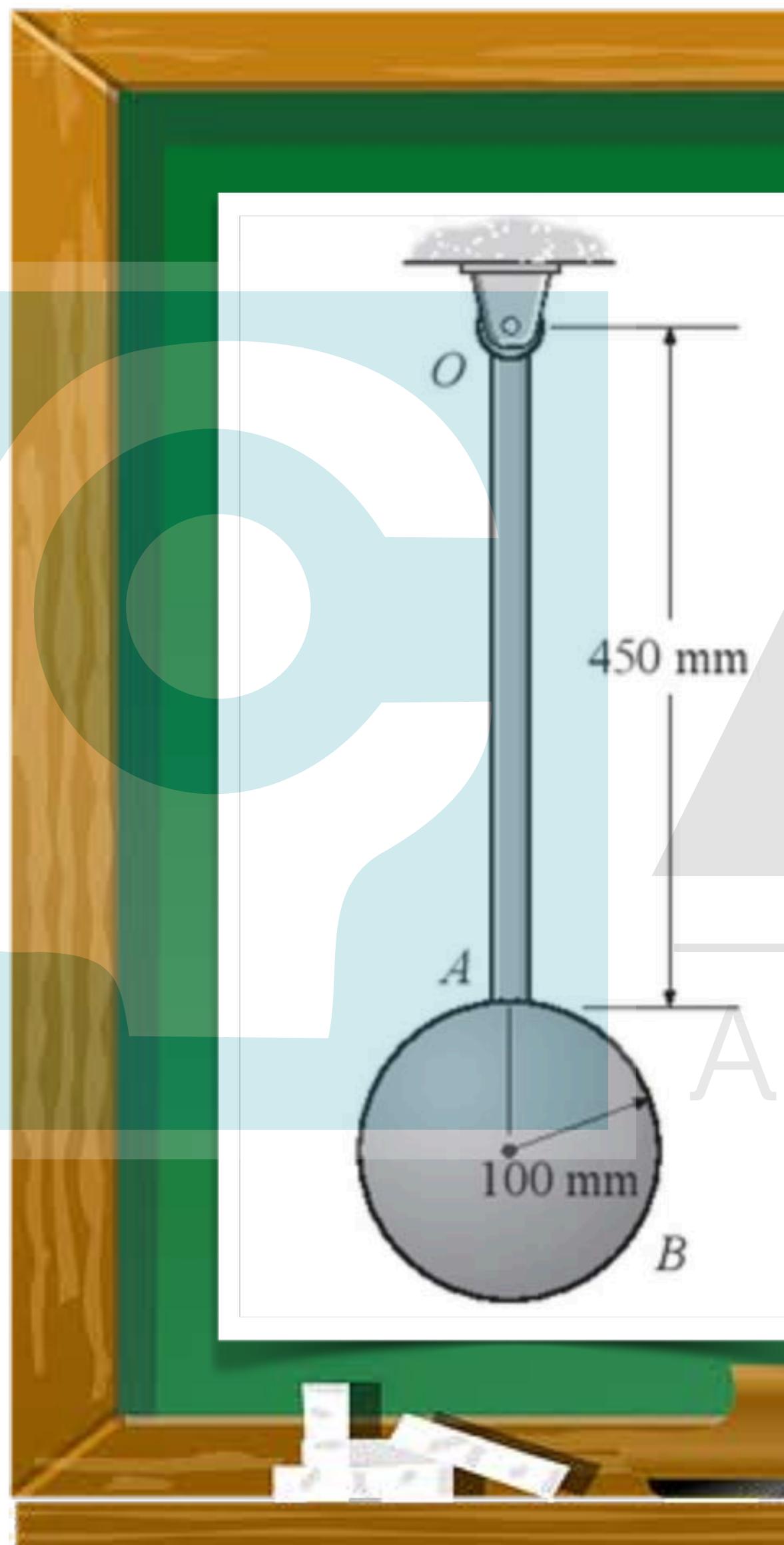
$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{12} m\ell^2 \quad I_{x'x'} = I_{y'y'} = \frac{1}{3} m\ell^2 \quad I_{z'z'} = 0$$

Problema 17.21

Coordenadas
cônicas

Momento
de Inércia

Conclusão

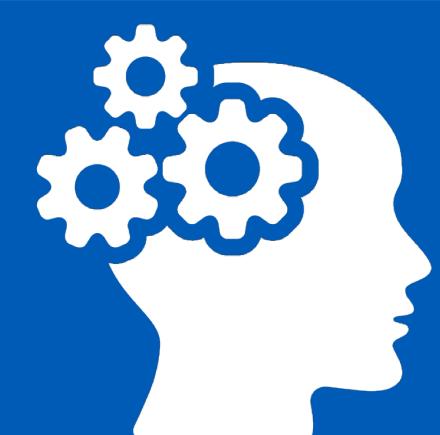


- 17.21. Determine o momento de inércia de massa do pêndulo em relação a um eixo perpendicular à página e passando pelo ponto O . A barra fina tem uma massa de 10 kg e a esfera tem uma massa de 15 kg.

Conteúdo



Advanced Robotics Control Laboratory



- “Take-home messages”
- Próxima aula

Conclusão

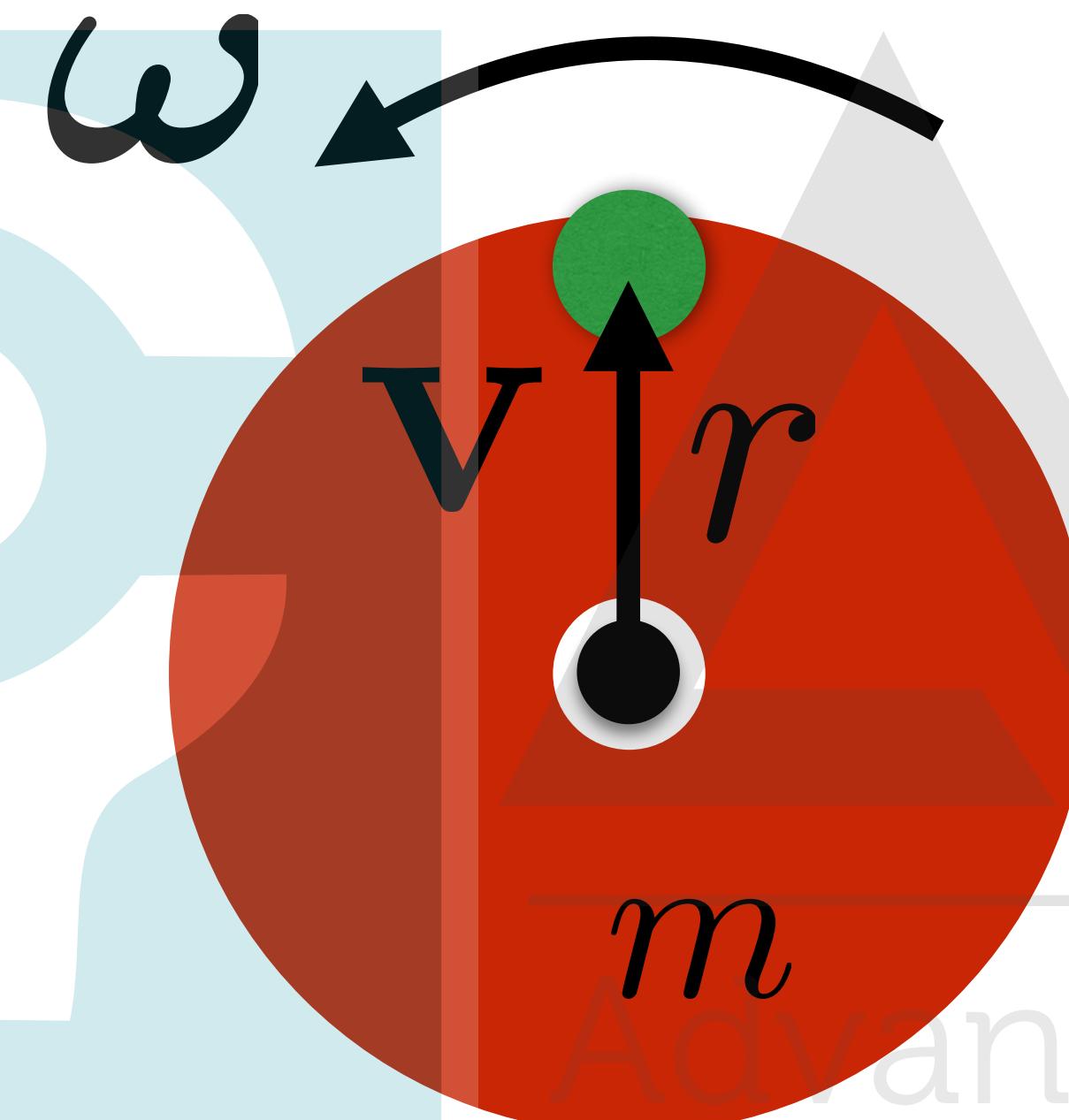
“Take-home messages”

Momento angular:

$$\mathbf{H} = I\boldsymbol{\omega}$$

**medida da resistência
de um corpo a uma**

aceleração angular



Coordenadas
cilíndricas

Momento
de Inércia

Conclusão

Próxima aula

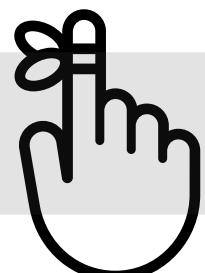
Coordenadas
cônicas

Momento
de Inércia

Conclusão

Equação de movimento

translacional



$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{F}_R = \frac{d(\mathbf{L})}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}$$

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Equação de movimento

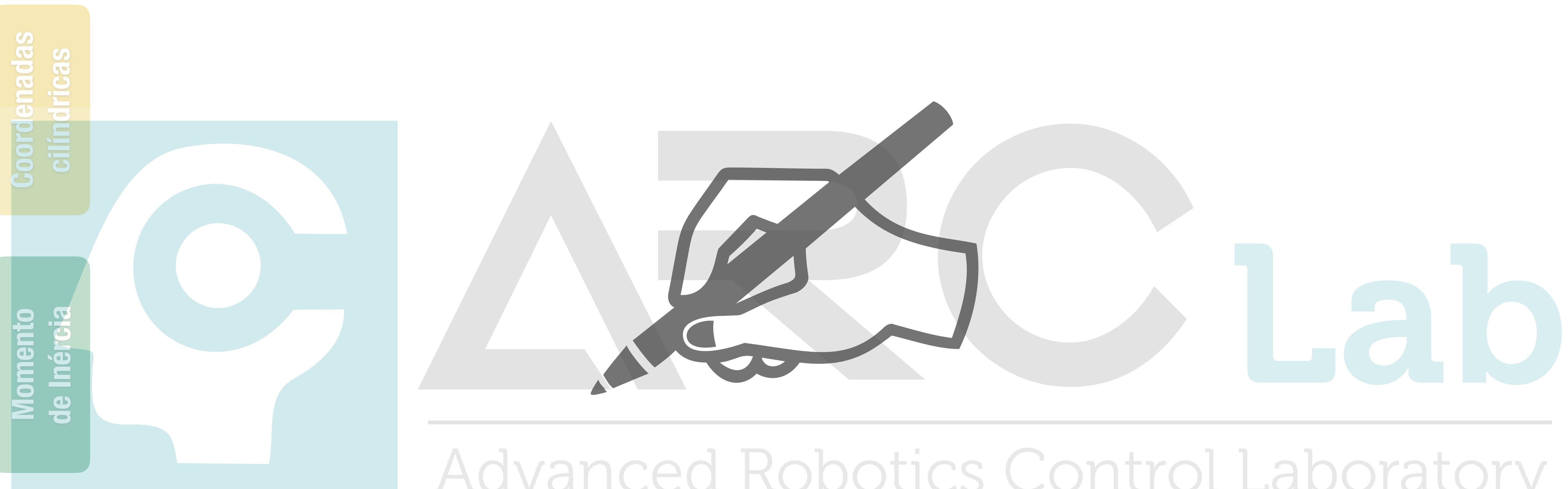
rotacional

(Cap. 17.2 e 17.3)

$$\sum \mathbf{M} = \frac{d(\mathbf{H})}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt}$$

$$\sum \mathbf{M} = I\alpha$$

Lista de exercícios para próxima aula...



17.2, 17.4, 17.12, 17.19, 17.23

That's all folks!

Advanced Robotics Control Laboratory