AGG5740 – TEORIA DE INVERSÃO EM GEOFÍSICA
LISTA 1/2019 Entrega até 15/10/2019

<u>A SOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS É INDIVIDUAL!</u>

1) Entregar um relatório em papel, contendo todas as figuras e demais itens solicitados nos exercícios, bem como os scripts utilizados para a solução.

2) Enviar os scripts (apenas os scripts) como anexo de e-mail (enviar para calbertomc@usp.br).

A avaliação será feita considerando a metodologia, os resultados obtidos e a clareza da formulação, ajudada por comentários e explicações adequadamente inseridos nos scripts.

EXERCÍCIO 1 (5.0) – A finalidade deste exercício é investigar o comportamento de sistemas de equações no tocante à estabilidade da solução.

Seja um sistema linear

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \tag{1}$$

sendo matriz quadrada **A,** de ordem *n*, de posto completo. Do ponto de vista algébrico, se a matriz do sistema é quadrada e também é de posto completo, então ela é não singular e, portanto, admite uma inversa $\boldsymbol{A}^{-1}$**,** tal que $\boldsymbol{A}^{-1}.\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}$ e disso decorre que o sistema é possível e determinado, isto é, tem solução única dada por

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} \tag{2}$$

No entanto, do ponto de vista numérico, a matriz do sistema, mesmo sendo de posto completo, pode estar próxima da singularidade. Nessas condições, o sistema (1) diz-se numericamente *instável* ou *mal condicionado*. Considere que o vetor segundo membro seja perturbado de uma quantidade $\Delta\boldsymbol{b}$. Nessas condições, a solução do sistema será perturbada de uma quantidade $\Delta\boldsymbol{x}$, tal que

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} + \Delta\boldsymbol{b} \tag{3}$$

Esta é tipicamente a situação que se encontra em aplicações de modelagem de dados, onde o vetor segundo membro $\boldsymbol{b}$ é relacionado com dados experimentais e a perturbação $\Delta\boldsymbol{b}$ é efeito de erros me medida. Se o sistema for mal condicionado, então uma pequena perturbação do segundo membro causará uma grande perturbação da solução. Mais especificamente, a perturbação relativa do segundo membro $\frac{\|\Delta \boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}$ e a perturbação relativa da solução $\frac{\|\Delta \boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}$ são relacionadas pela desigualdade:

$$\frac{\|\Delta \boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq cond(\boldsymbol{A}) \frac{\|\Delta \boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} \tag{4}$$

onde $cond(\boldsymbol{A})$ é o *número de condição* da matriz do sistema, definido como:

$$cond(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}\| \left\|\boldsymbol{A}^{-1}\right\| \tag{5}$$

Quanto maior o número de condição, pior é o condicionamento do sistema linear. O número de condição é um fator multiplicativo em (4) e pode ser interpretado como um amplificador da perturbação do segundo membro em seu efeito sobre a perturbação da solução. A finalidade do presente exercício é a comprovação dos conceitos acima através da aplicação a casos concretos de sistemas lineares bem condicionados e mal condicionados.

Desenvolvimento do exercício

A partir do conjunto de dados apresentado abaixo, efetue os seguintes procedimentos para o sistema linear bem condicionado e para o sistema mal condicionado:

===================

Conjunto de dados 1

Sistema bem condicionado

Matriz do sistema

-4	-10	-9	7	50
-16	-37	18	27	-9
13	29	27	32	7
-18	13	-37	29	-10
45	-18	-16	13	-4

Segundo membro

1240
1162
878
-1882
2691

Sistema mal condicionado

Matriz do sistema

-5	-11	-12	-11	-12
-18	-41	-43	-42	-45
14	32	34	33	35
-20	14	11	13	6
50	-20	-12	-16	-1

Segundo membro

-2322
-8626
6759
2000
-1979

a) Determine o número de condição da matriz do sistema;

b) Determine a solução do sistema linear;

c) Aplique pequenas perturbações a cada componente individual do segundo membro e determine a correspondente solução perturbada. Por exemplo, perturbe o segundo membro utilizando:

$$\Delta\vec{b} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \Delta\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \Delta\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

Monte uma tabela mostrando a solução não perturbada obtida em (b) e as diversas soluções perturbadas, bem como as perturbações relativas $\frac{||\Delta\boldsymbol{b}||}{||\boldsymbol{b}||}$ e $\frac{||\Delta\boldsymbol{x}||}{||\boldsymbol{x}||}$;

d) Verifique que as perturbações relativas acima estão de acordo com a relação (4);

e) Simule um vetor perturbação $\Delta\boldsymbol{b}$ aleatório utilizando uma função randn ou equivalente (disponível no matlab, octave, python, C, etc..) e determine as perturbações relativas $\frac{||\Delta\boldsymbol{b}||}{||\boldsymbol{b}||}$ e $\frac{||\Delta\boldsymbol{x}||}{||\boldsymbol{x}||}$. Faça um total de 5000 simulações e verifique que as perturbações relativas estão de acordo com a relação (4) acima.

EXERCÍCIO 2 (5.0) – Um poço artesiano atravessa três aquíferos, e a água extraída do mesmo é uma mistura das águas provenientes de cada um desses aquíferos. A tabela abaixo fornece os resultados de análises químicas da água de cada um dos aquíferos, bem como da água extraída do poço. Sabe-se que a vazão do poço é V = 10000 litros/hora, sendo que cada aquífero contribui com vazões desconhecidas v_1, v_2 e v_3 para a vazão total do poço V.

Substância	Aqüífero			Poço
	1	2	3	
$CaSO_4$	9.9	14.2	8.9	10.6
$Ca(HCO_3)_2$	57.7	122.0	94.0	94.8
$Mg(HCO_3)_2$	22.8	31.4	26.3	27.3
Na(HCO3)	17.7	39.3	45.3	37.4
NaCl	6.9	10.0	15.0	12.0
KNO_3	6.5	12.0	4.6	7.1
SiO_2	3.0	8.7	6.2	6.4
CO_2	31.7	31.5	76.0	53.5

(Obs.: valores em miligrama/litro)

Nessas condições, pede-se:

(a) Mostre que a determinação das vazões v_1, v_2 e v_3 corresponde à solução de um problema de modelagem linear superdeterminado, sujeito a um vínculo linear;

(b) Determine as contribuições v_1, v_2 e v_3 de cada aquífero para a vazão do poço;

(c) Para cada uma das substâncias presentes na água do poço, determine qual fração (porcentagem) da mesma provém de cada aquífero.

Dica: Vazão (litros/hora) x Concentração (mg/litro)=fluxo (mg/hora)

As equações de observação devem exprimir a conservação de fluxo para cada substância da tabela.