

PMR3409 – CONTROLE E AUTOMAÇÃO II

EXPERIÊNCIA 4

IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS: O MÉTODO DE MÍNIMOS QUADRADOS

1. SISTEMA EM TEMPO DISCRETO

Praticamente todos os processos controlados em malha fechada são em tempo contínuo e atualmente os controladores são implementados via computador. A Figura 1 apresenta uma malha de controle implementada via computador.

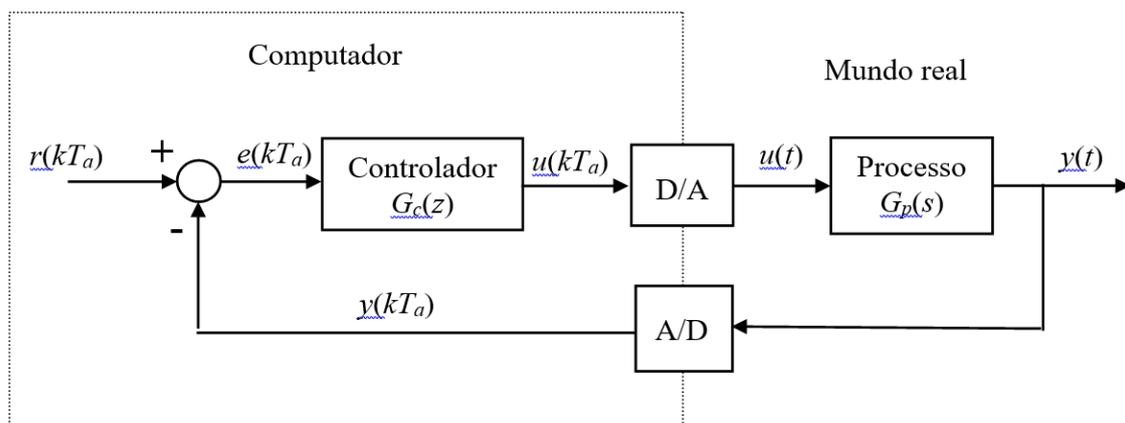


Figura 1. Esquema de uma malha de controle implementada via computador.

Como pode ser visto, parte da malha de controle da Figura 1 trabalha em tempo contínuo e parte em tempo discreto. A existência dos dois domínios em uma mesma malha dificulta a análise do sistema. Assim, é necessário transformar todas as variáveis, ou para tempo contínuo, ou para tempo discreto. Contudo, na medida em que é desejado projetar um controlador digital e tal controlador enxerga um sistema de tempo contínuo como se fosse de tempo discreto, a forma mais conveniente é transformar todas as variáveis para tempo discreto. Assim, para o projeto de controladores digitais (controlador implementado via computador) é interessante trabalhar como se os processos fossem todos em tempo discreto. A Figura 2 apresenta uma malha de controle em tempo discreto, onde o processo foi transformado de tempo contínuo para discreto.

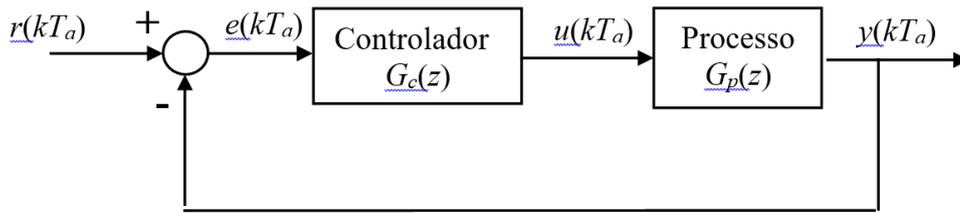


Figura 2. Esquema de uma malha de controle em tempo discreto.

Na transformação do processo de tempo contínuo para tempo discreto, incorporou-se ao processo a dinâmica dos conversores D/A e A/D, como mostra a Figura 3.

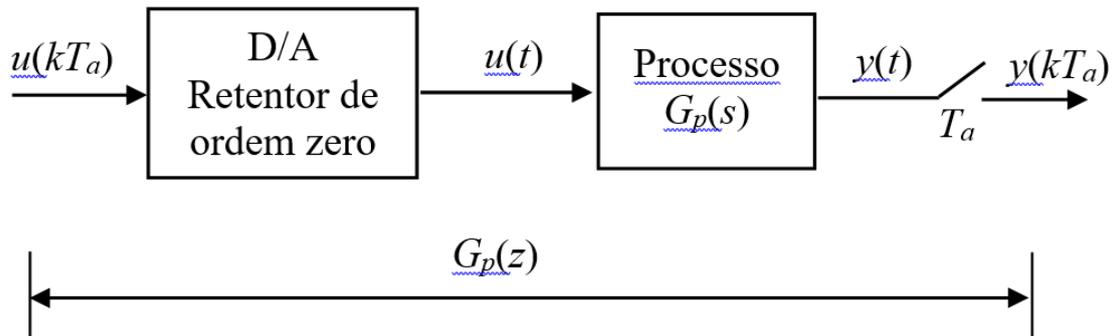


Figura 3. Discretização de um processo de tempo contínuo.

De acordo com o esquema da Figura 3, a função de transferência do processo em tempo discreto pode ser calculada através da seguinte expressão:

$$G_p(z) = \mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}\{H_{ROZ}(s)G_P(s)\}\} \quad (1)$$

Em que \mathcal{Z} representa a transformada \mathcal{Z} , \mathcal{L} representa a transformada de Laplace e $H_{ROZ}(s)$ é a função de transferência do conversor D/A (retentor de ordem zero), dada por:

$$H_{ROZ}(s) = \frac{1 - e^{-sT_a}}{s} \quad (2)$$

Substituindo-se a equação (2) na equação (1), obtém-se:

$$G_p(z) = \mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{G_P(s)\frac{1 - e^{-sT_a}}{s}\right\}\right\} \quad (3)$$

Como e^{-sT_a} representa, em tempo contínuo, um atraso de um período de amostragem, em tempo discreto o mesmo será igual a z^{-1} , portanto esse

tempo pode ser retirado das transformadas e a função de transferência do processo em tempo discreto fica sendo dada por:

$$G_p(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G_p(s)}{s}\right\}\right\} \quad (4)$$

Observe que a função de transferência de um sistema em tempo discreto, $G_p(z)$, não é igual à Transformada Z da resposta a impulso da função de transferência em tempo contínuo, $G_p(s)$, ou seja:

$$G_p(z) \neq \mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}\{G_p(s)\}\} \quad (5)$$

EQUAÇÃO DE DIFERENÇAS:

A função de transferência de um sistema em tempo discreto de ordem n genérico é dada por uma função racional na variável complexa z , de acordo com a seguinte expressão:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}, m \leq n \quad (6)$$

No domínio do tempo contínuo o equivalente no tempo à uma função de transferência na variável s , é uma equação diferencial. No domínio do tempo discreto o equivalente no tempo à uma função de transferência na variável z , é uma equação de diferenças.

Para obter a equação de diferenças a partir da função de transferência em tempo discreto, o primeiro passo é colocar a função $G(z)$ em função de potências negativas de z . Assim, dividindo-se a equação (6) em cima e em baixo por z^{-n} , e multiplicando-se $Y(z)$ pelo denominador e $U(z)$ pelo numerador, tem-se:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) = \frac{b_m z^{m-n} + b_{m-1} z^{m-1-n} + \dots + b_1 z^{1-n} + b_0 z^{-n}}{1 + a_{n-1} z^{-1} + \dots + a_1 z^{-(n-1)} + a_0 z^{-n}} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & Y(z) + a_{n-1} z^{-1} Y(z) + \dots + a_1 z^{-n} Y(z) \\ & = b_m z^{-(n-m)} U(z) + \dots + b_0 z^{-n} U(z) \end{aligned} \quad (8)$$

Analogamente ao fato de que no plano s (domínio de tempo contínuo) a variável s^n multiplicando $Y(s)$, significa no tempo a n -ésima derivada de $y(t)$, tem-se que no plano z (domínio de tempo discreto) a variável z^{-n} multiplicando $Y(z)$, significa no tempo a variável $y(kT_a)$ atrasada de nT_a segundos, onde T_a é o tempo de amostragem. Assim, calculando a Transformada Z Inversa da equação (8) obtém-se a seguinte equação de diferenças:

$$\begin{aligned} y(kT_a) &= -a_{n-1} y(kT_a - T_a) - \dots - a_1 y(kT_a - (n-1)T_a) \\ &\quad - a_0 y(kT_a - nT_a) + b_m u(kT_a - (n-m)T_a) \\ &\quad + b_{m-1} u(kT_a - (n+1-m)T_a) + \dots \\ &\quad + b_1 u(kT_a - (n-1)T_a) + b_0 u(kT_a - nT_a) \end{aligned} \quad (9)$$

Em que kT_a representa o tempo corrido. Esta equação representa uma fórmula de recorrência, onde conhecendo-se os valores passados de $y(kT_a)$ e os valores da entrada $u(kT_a)$ pode-se avançar no tempo com um processo marchante. Note que são necessárias n condições iniciais para a variável $y(kT_a)$, ou seja, $y(0)$, $y(T_a)$, $y(2T_a)$, ..., $y((n-1)T_a)$, para se iniciar o processo de marcha no tempo.

SISTEMAS DE 1ª ORDEM EM TEMPO DISCRETO

Um sistema em tempo discreto de 1ª ordem pode ser representado pela seguinte função de transferência:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) = \frac{b}{z - a} \quad (10)$$

Em que a é o polo do sistema no plano z e b é um coeficiente constante.

A equação de diferenças equivalente à esta função de transferência é dada por:

$$y(kT_a) = ay(kT_a - T_a) + bu(kT_a - T_a) \quad (11)$$

Assumindo a condição inicial $y(0) = y_0$, e conhecendo-se $u(kT_a)$ para todo kT_a , pode-se calcular $y(kT_a)$ para todo kT_a :

$$\begin{aligned} y(T_a) &= ay_0 + bu(0) \\ y(2T_a) &= ay(T_a) + bu(T_a) = a^2y_0 + abu(0) + bu(T_a) \\ y(3T_a) &= a^3y_0 + a^2bu(0) + bau(T_a) + bu(2T_a) \\ &\vdots \\ y(kT_a) &= a^k y_0 + \sum_{j=0}^{k-1} a^{k-j-1} bu(jT_a) \end{aligned} \quad (12)$$

Nesta última equação, o primeiro termo do lado esquerdo representa a resposta do sistema devido à condição inicial diferente de zero (resposta homogênea) e o segundo termo corresponde à resposta forçada devido à entrada do sistema.

Analisando-se somente o comportamento da resposta do sistema à condição inicial em função de vários valores de a , tem-se as seguintes possibilidades:

Caso 1: $0 < a < 1$

Neste caso o termo a^k tende a zero quando k tende a infinito, assim a saída tende a zero → **o sistema é estável.**

Caso 2: $-1 < a < 0$

Neste caso o termo a^k também tende a zero quando k tende a infinito, mas como $a < 0$, dependendo se k é par ou ímpar a resposta será negativa ou positiva, portanto a saída do sistema tenderá a zero mas de uma forma oscilatória → **o sistema é estável mas oscilatório.**

Caso 3: $a=1$

Neste caso o termo a^k é sempre igual 1, assim a resposta do sistema será igual a y_0 para qualquer instante de tempo → **o sistema é marginalmente estável.**

Caso 4: $a > 1$

Neste caso o termo a^k tende para infinito quando k tende a infinito e conseqüentemente a saída do sistema tende a infinito → **o sistema é instável.**

Caso 5: $a < -1$

Neste caso o termo a^k também tende a infinito quando k tende a infinito, mas como $a < 0$, dependendo se k é par ou ímpar a resposta será negativa ou positiva, portanto a saída do sistema tenderá para infinito mas de uma forma oscilatória → **o sistema é instável e oscilatório.**

Caso 6: $a = 0$

Neste caso o termo a^k é sempre igual a zero não importa o instante de tempo, assim, a saída do sistema salta do instante inicial do valor y_0 para 0 no instante T_a , ou seja, o sistema atinge o equilíbrio em apenas um período de amostragem.

É interessante realizar uma comparação entre o comportamento temporal de um sistema em tempo contínuo e de um sistema em tempo discreto. Para realizar esta comparação deve-se lembrar a relação entre os pólos de um sistema em tempo contínuo (plano s) e o seu equivalente em tempo discreto (plano z), dada por:

$$z = e^{sT_a} \quad (13)$$

$$\text{Ou } s = \frac{1}{T_a} \ln z \quad (14)$$

A partir da comparação do comportamento temporal de um sistema em tempo contínuo e o seu equivalente em tempo discreto chega-se às seguintes conclusões:

1. A estabilidade de um sistema no domínio de tempo contínuo s está associada a posição dos seus polos no lado esquerdo do plano complexo s , enquanto que a estabilidade de um sistema no domínio de tempo discreto está associada à localização dos seus polos no plano z dentro do círculo unitário. A Figura 4 mostra esquematicamente a região de estabilidade para os polos de um sistema em tempo discreto no plano z .

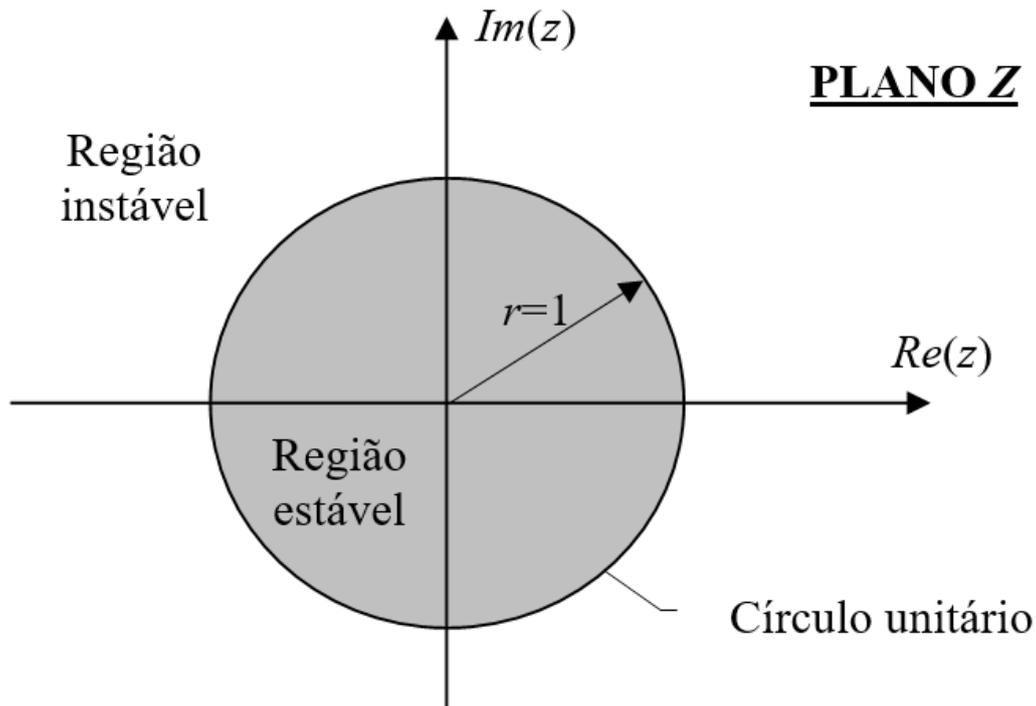


Figura 4. Região de estabilidade para os polos de sistemas em tempo discreto.

2. Existem sistemas em tempo discreto que não tem equivalente em tempo contínuo. Nesta condição tem-se os casos 2 e 5, ou seja, sistemas em tempo discreto com polos no eixo real negativo não possuem correspondente em tempo contínuo. Isto é fácil de ser observado através da equação (14), que para um número real menor do que zero a função \ln não é definida.
3. Um sistema em tempo discreto com polo na origem ($z = 0$) equivale, segundo a equação (14), à um sistema em tempo contínuo com pólo em $-\infty$, ou seja, um sistema que responde instantaneamente à mudanças na

entrada ou à uma condição inicial diferente de zero, o que na realidade não existe.

2. IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS EM TEMPO DISCRETO

O processo de identificação de sistemas consiste na abordagem experimental da modelagem de sistemas. O processo de identificação de sistemas incluiu as seguintes etapas:

- Planejamento experimental;
- Seleção da estrutura do modelo;
- Estimativa dos parâmetros;
- Validação.

Nesta experiência você estará identificando o modelo do motor CC descrito na apostila da Experiência 2. Utilizando a resposta temporal do sistema amostrado, a partir de uma estrutura do modelo obtida pelo conhecimento do mesmo, ajusta-se um modelo a esta resposta e assim calcula-se os coeficientes da função de transferência em tempo discreto do sistema.

A abordagem em tempo discreto exige apenas que se conheça a ordem do modelo e tem a grande vantagem de não necessitar de entradas com formas bem definidas. Contudo o significado físico dos parâmetros do modelo obtido é difícil de ser determinado, dificultando, assim, uma avaliação precisa do modelo e exigindo uma validação extensiva do modelo para permitir a sua aplicação em condições diferentes das quais o modelo foi obtido.

A maioria dos métodos clássicos de identificação de sistemas em tempo contínuo depende basicamente da forma do sinal de entrada no sistema. Em geral é difícil e caro realizar experimentos em processos industriais e mais difícil ainda gerar sinais de entrada de uma forma precisa. Portanto é desejável ter-se métodos de identificação de sistemas que não requerem sinais de entrada especiais. O processo de identificação de sistemas em tempo discreto não exige nenhum sinal de entrada especial, o único requisito é que o sinal de entrada “excite” todos os “modos” de interesse do processo que se deseja

identificar. Uma forma de conseguir tal sinal é somar ao sinal de entrada do sistema, que pode estar operando normalmente, um ruído “branco”. Ruído branco é um sinal aleatório cujo espectro de frequência é uma reta horizontal, ou seja, contém igualmente todas as frequências.

A estrutura do modelo deve ser obtida através de conhecimento prévio do sistema e das perturbações envolvidas. Em geral sistemas lineares são utilizados para descrever a dinâmica do sistema em uma determinada condição de operação. Um exemplo de uma estrutura de modelo a ser identificado é a seguinte:

$$y(kT_a) = \sum_{i=1}^n a_i y((k-i)T_a) + \sum_{j=0}^n b_j u((k-j)T_a) \quad (15)$$

Em que y é a saída do sistema, u pode representar a entrada do sistema e/ou as perturbações, T_a é o período de amostragem, kT_a é o tempo presente, a_i e b_j são coeficientes constantes, n é um número inteiro que representa a ordem do sistema (por exemplo se $n = 2$ o sistema é de 2ª ordem) e m é um número inteiro que representa o atraso existente entre a entrada (ou perturbações) e a saída do sistema. Neste modelo os coeficientes a_i e b_j são considerados parâmetros desconhecidos e portanto a serem identificados.

Após a obtenção do modelo, que no exemplo anterior consiste no cálculo dos parâmetros a_i e b_j , é necessário e mandatório verificar o modelo. Essa verificação, em geral, é realizada através de simulações do modelo a partir de diversos tipos de sinais de entrada.

CÁLCULO DOS PARÂMETROS DO MODELO

O método mais simples que pode ser utilizado para o cálculo dos coeficientes do modelo é o Métodos dos Mínimos Quadrados. A única exigência para a utilização deste método é que o modelo seja linear nos parâmetros. Nota-se que um modelo linear nos parâmetros não significa necessariamente um modelo linear, pois mesmo um modelo não linear pode ser transformado em um modelo linear nos parâmetros desconhecidos que devem ser calculados.

A Equação (15) consiste de uma equação de recorrência para um sistema de ordem n , que pode ser utilizada para calcular (estimar) a nova saída do sistema conhecendo-se n saídas passadas, a entrada presente e m entradas passadas, ou seja:

$$\begin{aligned} \bar{y}(kT_a) = & a_1y((k-1)T_a) + a_2y((k-2)T_a) + \dots + a_ny((k-n)T_a) + \\ & + b_0u(kT_a) + b_1u((k-1)T_a) + \dots + b_mu((k-m)T_a) \end{aligned} \quad (16)$$

Em que $\bar{y}(kT_a)$ é uma estimativa da saída presente calculada pelo modelo do sistema.

Para exemplificar o método de cálculo será utilizado um sistema de 2ª ordem sem atraso na entrada. Assim, aplicando-se a equação anterior, iniciando-se no instante $2T_a$ e avançando no tempo até o tempo NT_a , obtém-se $(N-2)$ equações da seguinte forma:

$$\begin{cases} y(2T_a) = a_1y(T_a) + a_2y(0) + b_0u(2T_a) + b_1u(T_a) + b_2u(0) \\ y(3T_a) = a_1y(2T_a) + a_2y(T_a) + b_0u(3T_a) + b_1u(2T_a) + b_2u(T_a) \\ y(4T_a) = a_1y(3T_a) + a_2y(2T_a) + b_0u(4T_a) + b_1u(3T_a) + b_2u(2T_a) \\ y(5T_a) = a_1y(4T_a) + a_2y(3T_a) + b_0u(5T_a) + b_1u(4T_a) + b_2u(3T_a) \\ \vdots \end{cases} \quad (17)$$

Nestas equações todas as saídas e as entradas do sistema são conhecidas e os coeficientes do modelo, ou seja, a_1, a_2, b_0, b_1 e b_2 são desconhecidos. Portanto, estas equações formam um sistema de $N-2$ equações e 5 incógnitas, que pode ser resolvido pelo método dos mínimos quadrados. Se a dinâmica do sistema apresentasse um atraso na entrada, este atraso seria facilmente introduzido pela utilização de entradas em outros instantes de tempo.

Definem-se os seguintes vetores e matrizes:

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}^T &= [a_1 \quad a_2 \quad b_0 \quad b_1 \quad b_2] \\
\mathbf{y}^T &= [y(2T_a) \quad y(3T_a) \quad y(4T_a) \quad y(5T_a) \quad \dots \quad y(NT_a)] \\
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} y(T_a) & y(0) & u(2T_a) & u(T_a) & u(0) \\ y(2T_a) & y(T_a) & u(3T_a) & u(2T_a) & u(T_a) \\ y(3T_a) & y(2T_a) & u(4T_a) & u(3T_a) & u(2T_a) \\ y(4T_a) & y(3T_a) & u(5T_a) & u(4T_a) & u(3T_a) \\ \vdots & & & & \\ y(NT_a) & y((N-1)T_a) & u(NT_a) & u((N-1)T_a) & u((N-2)T_a) \end{bmatrix} \quad (18)
\end{aligned}$$

Em que $\mathbf{y}_{(N-2) \times 1}$ é o vetor com as saídas presentes, $\mathbf{p}_{5 \times 1}$ é o vetor de parâmetros do modelo e $\mathbf{A}_{(N-2) \times 5}$ é uma matriz que contém as saídas e as entradas passadas do sistema. Com essas definições, o conjunto de equações (17) pode ser escrito matricialmente da seguinte forma:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{p} \quad (19)$$

Os parâmetros do sistema podem ser calculados invertendo-se a matriz \mathbf{A} e multiplicando o resultado pelo vetor \mathbf{y} . Contudo, observa-se que a matriz \mathbf{A} em geral não é uma matriz quadrada e portanto não tem inversa. Portanto, no lugar da inversa da matriz \mathbf{A} utiliza-se a sua pseudo-inversa, que nesse caso, é dada pela seguinte expressão:

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \quad (20)$$

Nota-se que a dimensão da matriz \mathbf{A} é $(N-2) \times 5$ e a dimensão da matriz pseudo-inversa é $5 \times (N-2)$. A pseudo-inversa de uma matriz dada pela Equação (20) sempre existirá se as suas colunas forem linearmente independentes, que é o caso da matriz \mathbf{A} para modelos de qualquer ordem.

Assim, os parâmetros do modelo (vetor \mathbf{p}) podem ser calculados da seguinte forma:

$$\mathbf{p} = \mathbf{A}^+ \mathbf{y} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{y} \quad (21)$$

Observa-se que ao calcular os parâmetros do modelo segundo a equação anterior, está-se minimizando o quadrado do erro entre as saídas do sistema estimadas pelo modelo, segundo a Equação (16), e as saídas reais do

sistema obtidas no processo de amostragem, ou seja, minimiza-se a função custo $J(\mathbf{p})$, dada por:

$$J(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N [y(kT_a) - \bar{y}(kT_a)]^2 \quad (22)$$

Finalmente observa-se que existem muitos outros métodos para se identificar modelos de sistemas em tempo discreto, sendo que a maioria destes métodos é mais eficiente do que o método dos mínimos quadrados. Alguns métodos comumente utilizados são os seguintes: Mínimos Quadrados Estendido, Mínimos Quadrados Generalizados e Máxima Verossimilhança. Cada método de identificação de sistemas tem a sua aplicação, por exemplo, alguns métodos são adequados para identificação de sistemas não lineares nos parâmetros, como o Método do Filtro de Kalman. Maiores informações sobre este assunto podem ser obtidas em textos da área, pois detalhes sobre métodos avançados de identificação de sistemas não é escopo desta experiência.

3. MÉTODO EXPERIMENTAL

Somente o modelo da velocidade angular em função da tensão de entrada do motor será identificado em tempo discreto. Para realizar isso você deve seguir os seguintes passos:

1. *Obter a função de transferência entre a tensão de entrada e a velocidade angular do motor em tempo discreto*

Para obter a função de transferência entre a tensão de entrada e a velocidade angular do motor em tempo discreto, você deve utilizar a fórmula para obter a função de transferência em tempo discreto de um sistema em tempo contínuo, e a equação que fornece a função de transferência do motor em tempo contínuo. Assim, tem-se:

$$G_{\omega}(z) = (1 - z^{-1})Z \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K_{\omega}}{s(Ts + 1)} \right\} \right\} \quad (23)$$

A equação anterior deve ser calculada algebricamente e não numericamente. Resolvendo esta equação, você irá obter uma função de transferência em tempo discreto da seguinte forma:

$$G_{\omega}(z) = \frac{b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}} \quad (24)$$

2. *Obter a equação de diferenças equivalente à $G_{\omega}(z)$*

Para obter a equação de diferenças equivalente à $G_{\omega}(z)$ siga os passos da Equação (12). Ao fazer isso, você encontrará uma expressão do seguinte tipo:

$$\omega(kT_a) = a_1 \omega((k - 1)T_a) + b_1 e_V((k - 1)T_a) \quad (25)$$

Essa equação de diferenças servirá como a estrutura do modelo a ser identificado. A identificação desse modelo consiste no cálculo numérico dos coeficientes a_1 e b_1 .

3. *Calcular os coeficientes da equação de diferenças*

Para calcular os coeficientes da equação de diferenças, você deve utilizar dados da tensão de entrada e da velocidade angular do motor adquiridos com uma frequência de amostragem mais baixa que a utilizada no item anterior. Essa frequência deve ser da ordem de 10Hz a 50Hz. Estes dados devem estar em uma matriz.

Com estes dados monte a matriz A e o vetor de saídas y conforme descrito a Equação (18). A matriz A e o vetor y podem ser facilmente montados com os seguintes comandos do MATLAB:

```
n=length(data);  
A=[data(1:n-1,2) data(1:n-1,1)];  
Y=[data(2:n,2)];
```

Sendo que $Y[y(k)]$ é o vetor y e $A[y(k-1) \quad u(k-1)]$ a matriz A .

Os coeficientes do modelo são calculados segundo a Equação (21), que com comandos do MATLAB é implementada da seguinte forma:

```
p=pinv(A)*Y;
```

Onde `pinv` é o comando do MATLAB utilizado para calcular a pseudo-inversa de uma matriz e p é o vetor que contém os coeficientes da equação de diferenças do modelo, da seguinte forma: $p = [a_1 \ b_1]^T$.

4. Simulação do modelo em tempo discreto

Como no item anterior, após a identificação do modelo você deve realizar simulações para verificar o seu desempenho, ou seja, verificar se o modelo é capaz de fornecer resultados satisfatórios.

Novamente, essa simulação deve ser realizada com a mesma tensão de entrada utilizada para gerar os transitórios no sistema real. Assim, utilizando a tensão de entrada no motor amostrada, que deve estar na matriz de dados `data`, simule o modelo em tempo discreto para obter a estimativa da velocidade angular. Após isso, faça um gráfico com a velocidade angular calculada pelo modelo e a velocidade angular real amostrada. Para isso você pode usar os seguintes comandos do MATLAB:

```

num=[0 b1];
den=[1 -a1];
omegatd=dlsim(num,den,data(:,1));
n=length(omegatd);
t=[0:n-1]*Ta;
plot(t,data(:,2),t,omegatd,'o');grid
xlabel('Tempo segundos');
ylabel('Velocidade angular');
legend('Dados experimentais','Resultados do modelo');

```

Apresente em um mesmo gráfico as curvas simuladas e amostradas da velocidade do motor. Compare a resposta do modelo com os resultados experimentais e analise os resultados obtidos.

5. Verificação do pólo e do ganho do sistema identificado

Como você conhece o pólo e o ganho da função de transferência entre a tensão de entrada e a velocidade do sistema em tempo contínuo, você pode utilizar estes dados para verificar o modelo em tempo discreto identificado.

Para isso, calcule o polo e o ganho do sistema em tempo discreto. O polo é dado diretamente pelo coeficiente a_1 e o ganho é dado pela relação entre b_1/a_1 . Observa-se que o ganho é calculado através do teorema do valor final para uma entrada na forma de degrau, que em tempo discreto para um sistema de 1ª ordem é dado por:

$$K_D = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})Y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}} = \frac{b_1}{1 - a_1} \quad (26)$$