Capítulo 3

Integração numérica

Os alunos de engenharia certamente estão familiarizados com conceitos de cálculo como limite, derivada e integral. Vamos falar um pouco sobre o cálculo de integrais, como:

$$\int_0^2 x^3 + 8 \, dx$$

Aprendemos que para computar o valor dessa integral, basta fazermos

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$$

onde $F(x)$ corresponde à antiderivada de $f(x)$. Ou no nosso caso,

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 + 8x$$

$$\int_0^2 x^3 + 8dx = F(2) - F(0) = 20,0$$

Nesse caso bastou-nos computar a antiderivada da função, e conseguimos calcular o valor exato da integral. Porém, nem sempre é fácil computar a antiderivada e nesses casos precisamos apelar para métodos numéricos para achar o valor da integral.

Sabemos, também, que computar essa derivada é o mesmo que achar a área sob a curva, no intervalo que desejamos. Na Figura 3.1 vemos a curva da função $f(x) = x^3 + 8$ e, no intervalo [0,2], a área sob a curva, preenchida em cinza, corresponde à integral $\int_0^2 x^3 + 8dx$.

Então, a solução é tentar computar, de forma aproximada, a área sob a curva, e daí obter o valor da integral. Existem vários métodos para fazermos isso. Nas duas próximas seções vamos estudar dois deles.

3.1 O método dos trapézios

Nesse método, buscamos achar uma reta que interpole, ou represente da melhor maneira possível, a curva entre os dois pontos, inicial e final do intervalo de interesse. Como conhecemos apenas dois pontos, essa reta passa por esses dois

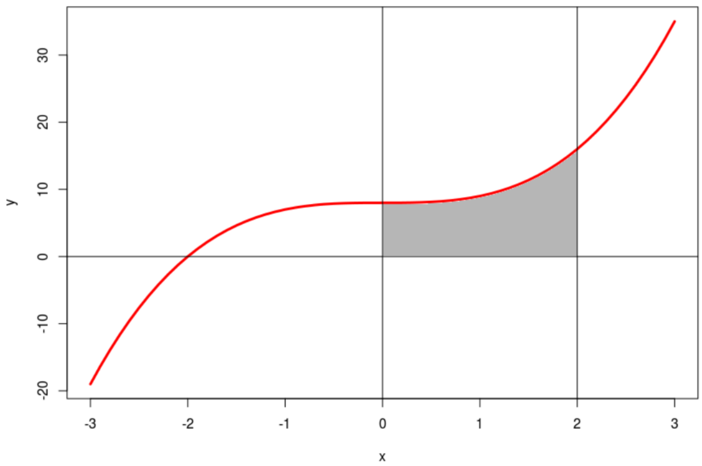

Figura 3.1: Representação da área sob a curva de $x^3 + 8$

pontos, como mostrado na Figura 3.2a. Computamos, então, a área sob a reta, que como indica o nome do método, forma um trapézio. O tamanho de uma das bases do trapézio é dado por $f(a)$ e o da outra por $f(b)$. A área, então, é $\frac{f(a)+f(b)}{2} \times (b - a)$, já que a altura do trapézio é $b - a$.

Essa aproximação não é nada boa. O valor exato para a integral do nosso exemplo, como vimos, é 20.0 e o valor aproximado computado pelo método é 24. Porém, podemos melhorar esse resultado dividindo o intervalo $[a, b]$ em subintervalos menores e calcular a área de cada um deles, usando o mesmo método dos trapézios. A Figura 3.2b mostra o intervalo dividido em quatro subintervalos, e os trapézios por eles determinados. Computando as áreas de cada um deles, obtém-se uma soma de 20.25, mais próximo do resultado esperado. Quanto mais subintervalos tivermos, maior será a precisão da resposta. Por exemplo, com 40 intervalos, temos a aproximação de 20.0025. Com 500 intervalos teremos 20.00001600000001.

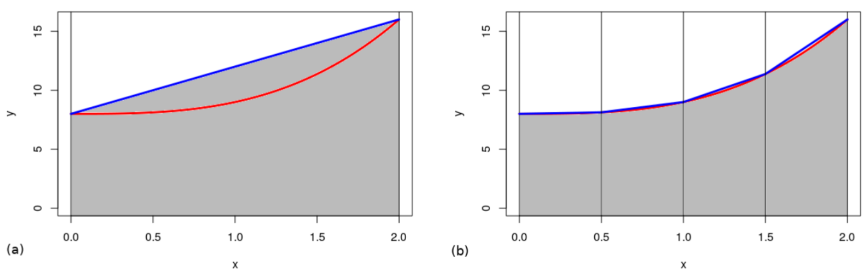

Figura 3.2: O método de quadratura dos trapézios para $f(x) = x^3 + 8$

Então, podemos descrever o algoritmo dos trapézios, informalmente, da seguinte forma, considerando $f(x)$ e o intervalo $[a, b]$:

1. determinamos n, o número de subintervalos que queremos usar;
2. computamos o tamanho de cada subintervalo, $h = (b - a)/n$;
3. computamos a área de cada subintervalo A_i;
4. computamos a área total $A = \sum_{i=1}^{n} A_i$.

3.2 O método de Simpson

Este método busca usar um polinômio de grau dois para interpolar três pontos da função que queremos computar a integral. No caso, os pontos a, b e o ponto médio. Da mesma forma, utilizando um único intervalo pode não gerar bons resultados, assim, dividimos o intervalo em subintervalos e então aplicamos o método.

Se dividirmos o intervalo em n subintervalos, obtemos uma sequência de valores $a, x_1, , x_2, ..., x_{n-1}, b$, que utilizaremos para computar a integral. Com um pouco de manipulação matemática, que não faremos aqui, obtém-se uma maneira bastante simples de computar a integral:

1. determinamos n, o número de subintervalos que queremos usar. n deve ser par;
2. computamos o valor $h = (b - a)/n$;
3. para cada x_i, em que i é impar, adicionamos $4f(x_i)$ ao valor da integral;
4. para cada x_i, em que i é par, adicionamos $2f(x_i)$ ao valor da integral;
5. adicionamos $f(a)$ e $f(b)$ ao valor da integral;
6. multiplicamos esse valor por $h/3$, que nos dá a resposta que queremos.

Para polinômios de grau até três, o método apresenta resultado exato com apenas dois subintervalos. Por isso, vamos utilizar como exemplo a função da Figura 2.4, $f(x) = xe^{-x^2}$. No intervalo $(0, 2)$, obtemos, com 40 subintervalos, o valor 0.4908423652668696 e no intervalo $(-2, 2)$ obtemos $2.868076146948321e-17$, valor muito próximo de zero, que seria o valor exato esperado.