



PMR 3306

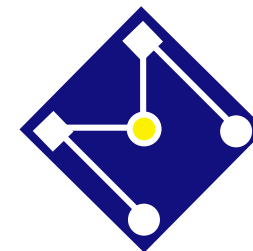
Sistemas Dinâmicos II

PARTE II:
SINAIS

Larissa Driemeier

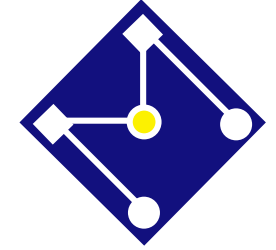
driemeie@usp.br

3091 5756



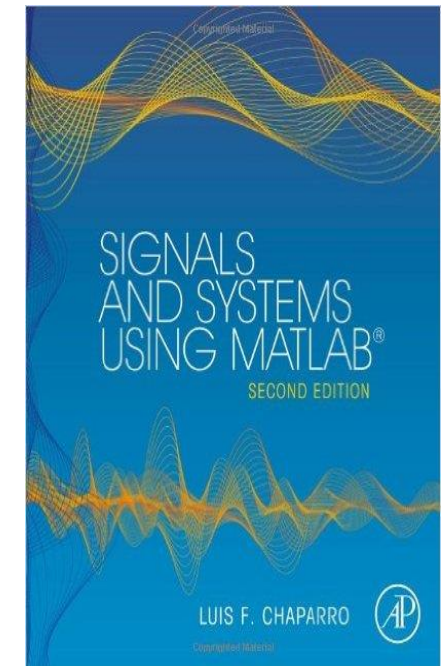
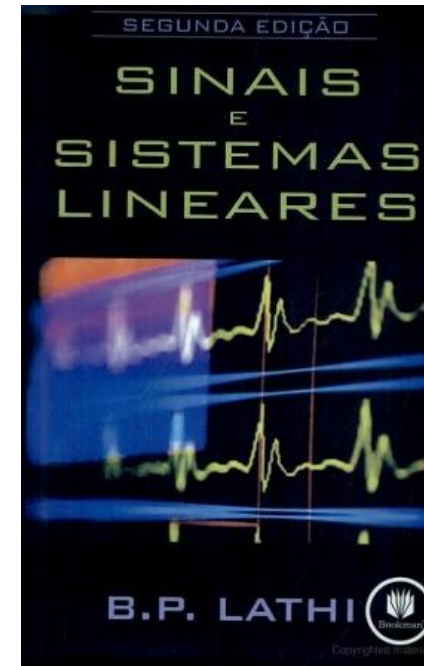
NOSSO CALENDÁRIO

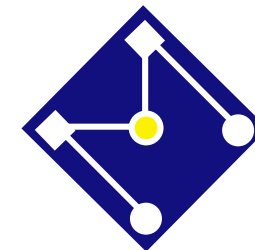
Aula	Data	Tema	Professor
13	24/09	Introdução da disciplina / Recordação parte 1	Larissa
14	25/09	Recordação parte 2 – Série de Fourier	Larissa
14	01/10	Transformada de Fourier	Larissa
16	02/10	Transformada de Fourier	Larissa
17	08/10	Diagrama de Bode	Larissa
18	09/10	Diagrama de Bode	Larissa
19	15/10	Diagrama de Bode	Larissa
20	16/10	Diagrama de Bode	Larissa
34	04/12	P2	Ettore
35	10/12	SUB	Marcilio
	Fev/2020	Rec	



BIBLIOGRAFIA

- **BÁSICA:**
- Notas de Aula
- **AVANÇADA:**
- Sinais e Sistemas Lineares, B P Lathi
- Signals and Systems using MatLab, L P Chaparro

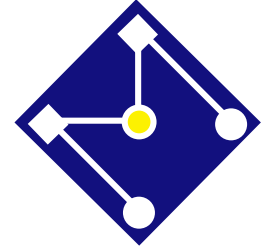




Listas de exercícios, mudança da programação, comunicados gerais serão por meio do e-disciplinas. Por favor, verifique semanalmente o site.

SINAIS

Introdução

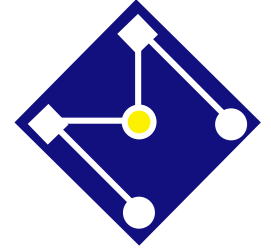


SINAIS

Matematicamente falando, um sinal é apenas uma função.

Em engenharia é entendido como sinal qualquer evento que carregue informação.

Os *sinais* podem ser descritos de muitas maneiras: através de *números*, *gráficos*, de uma *sequência de dígitos (bits)*, etc.



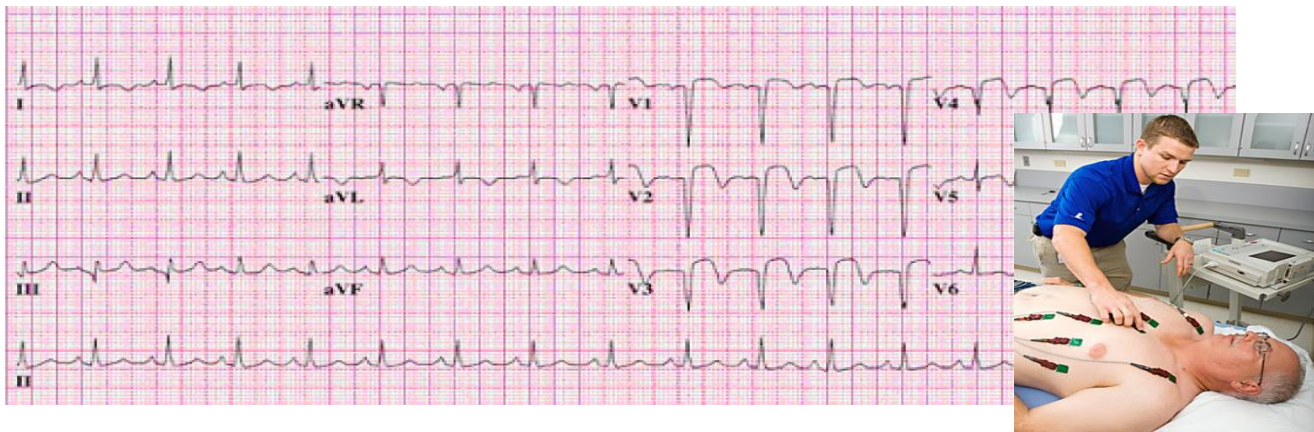
EXEMPLO DA SIRENE DE POLÍCIA...

Uma sirene de um carro de polícia **se aproximando** produz uma pressão acústica variável no tempo que nossos ouvidos percebem como som. Uma representação simplificada do sinal de sirene é

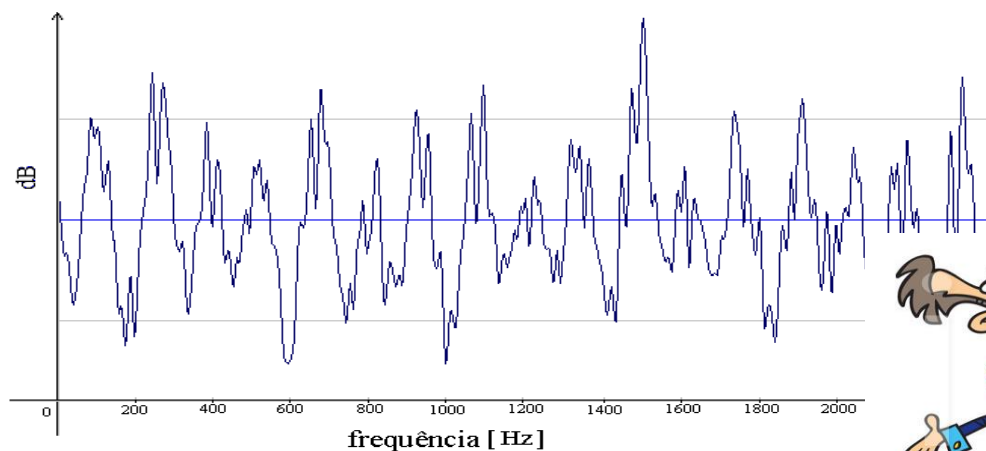
$$s(t) = (1 + t) \sin[2\pi * 1000 + 10 * t + 300 * \sin(2\pi * 2t)]$$

```
dt=1/44100;  
Fs=44100;  
t=0:dt:10;  
f_c=1000;  
beta=300;  
f_m=2*pi;  
  
sirene=(1 + t).* sin(2*pi*f_c+10.*t -  
beta*sin(2*f_m*pi*t))  
sound(sirene,Fs);  
wavwrite(sirene, Fs, 16,'sirene.wav');
```





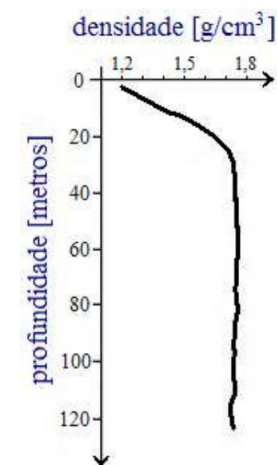
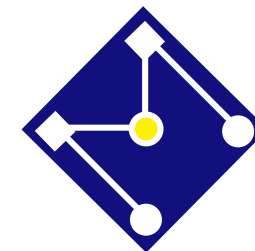
Sinal biomédico: – Eletrocardiograma (ECG) de um paciente



Sinal de voz, obtido com o uso de um microfone.



©Ron Leishman * IllustrationsOf.com/439451

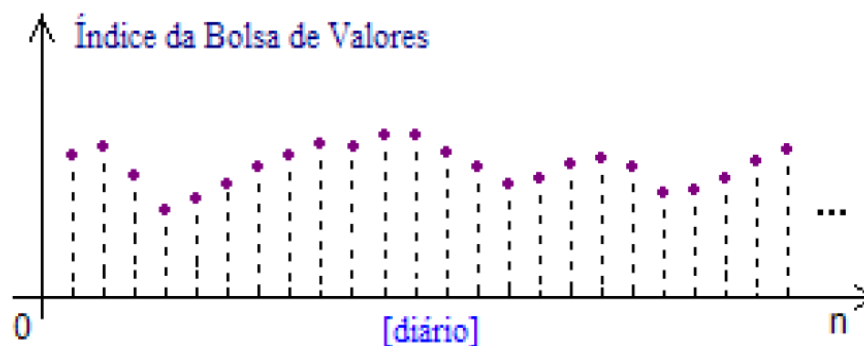
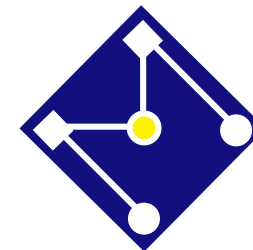


Em geofísica, sinais que representam variações de quantidades físicas do solo.



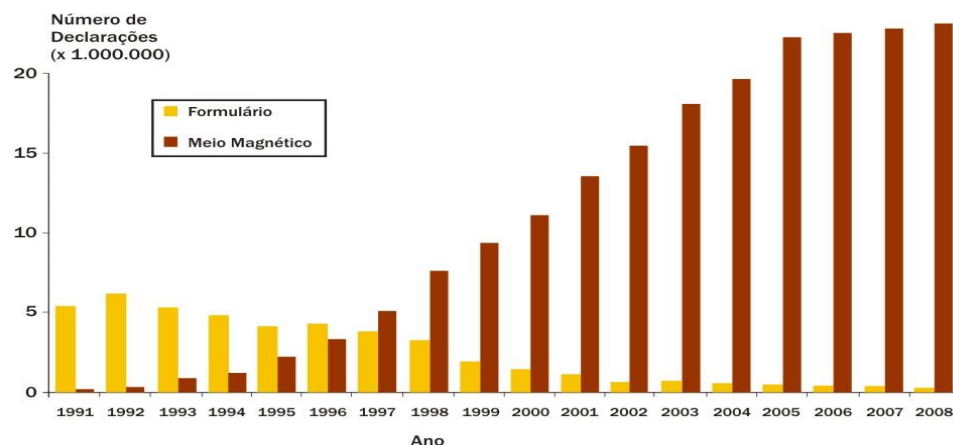
Sinal dos níveis de cinza dos pixels da imagem

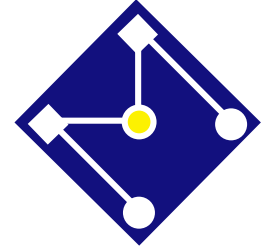
120	138	120	151	139
110	129	129	139	146
150	138	137	138	129
137	129	129	128	137
146	145	131	132	145



Sinal do índice da bolsa de valores

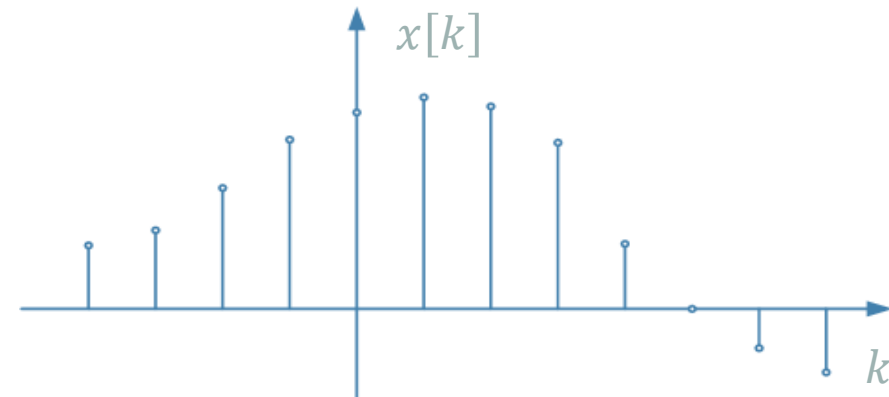
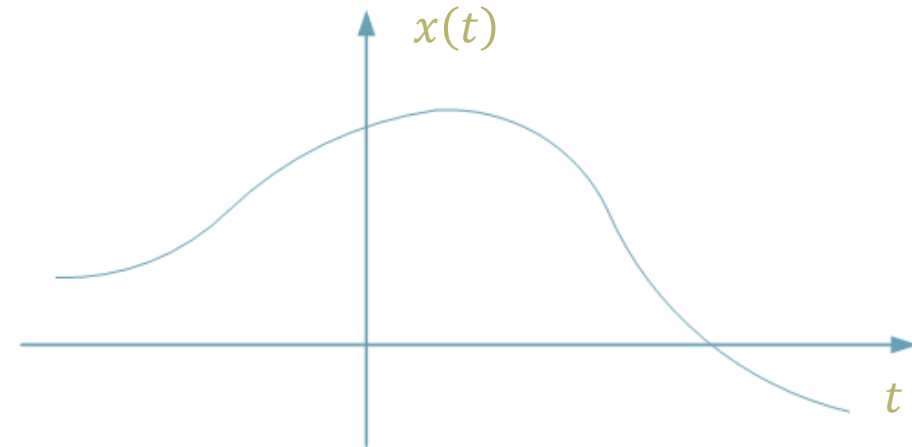
Sinal do número de declarações do IR por formulário e meio magnético

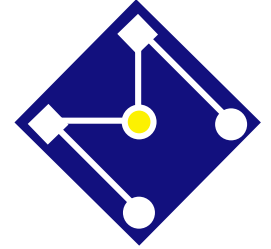




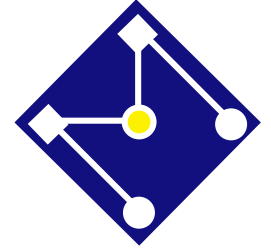
SINAIS DISCRETOS VS CONTÍNUOS

- A maioria dos **sinais** físicos são **contínuos**, p.ex., posição e velocidade de um corpo, fala ou música captada por um microfone, tensão ou corrente num circuito elétrico...
- Só os **sinais discretos** podem ser armazenados e processados em computadores digitais.





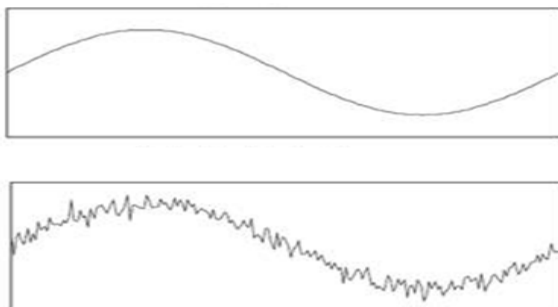
- Assim, sinais que são naturalmente contínuos no tempo tornam-se sinais discretos para este propósito. Por exemplo:
 - No caso de sistemas digitais de áudio
 - a voz;
 - a música;
 - o som em geral;
 - No caso de sistemas digitais de imagem
 - as fotografias que aparecem nos jornais e livros;
 - as imagens de um filme gravado em DVD;
 - No caso do piloto automático digital
 - a posição da aeronave;
 - a velocidade da aeronave;
 - a direção da aeronave.



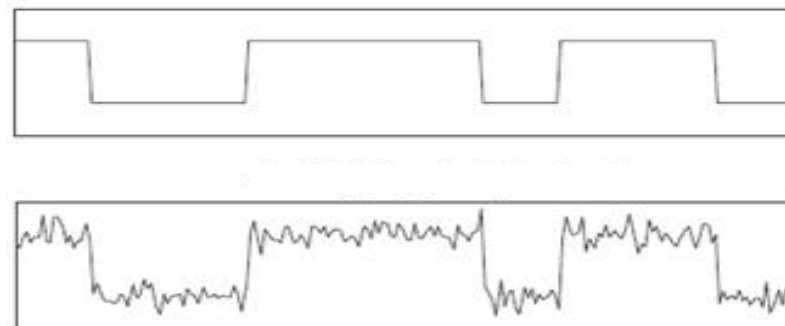
SINAL ANALÓGICO E DIGITAL

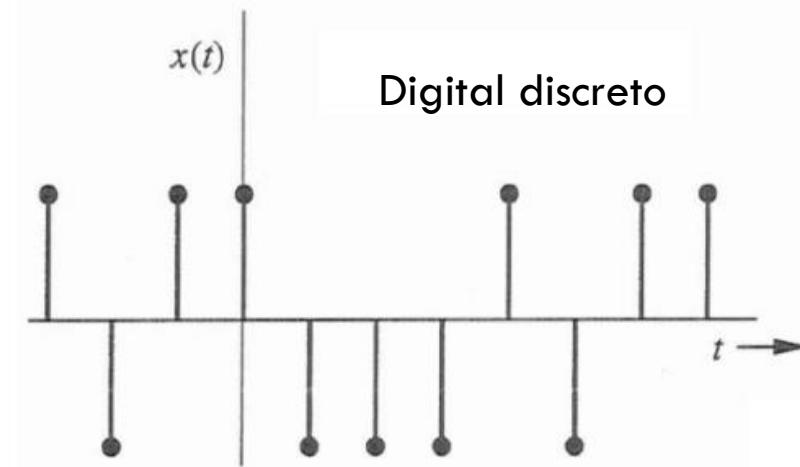
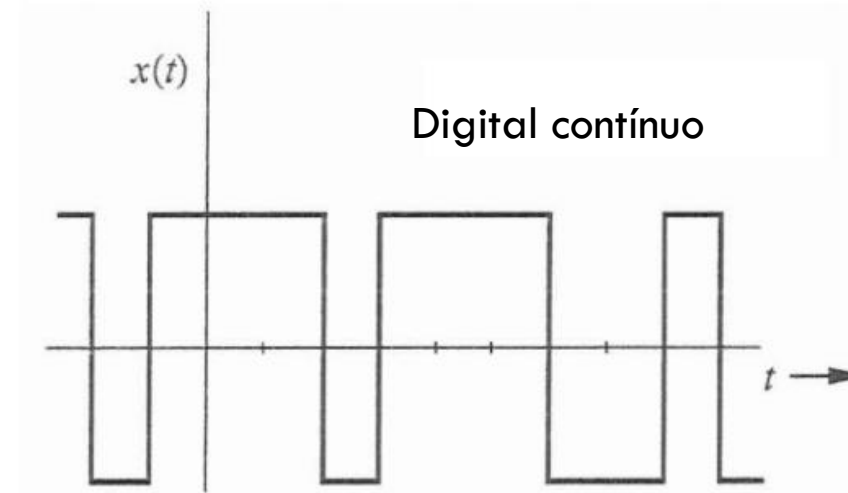
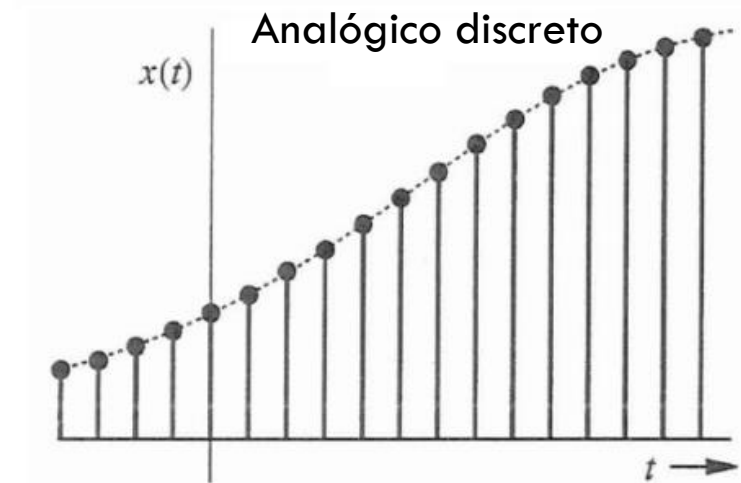
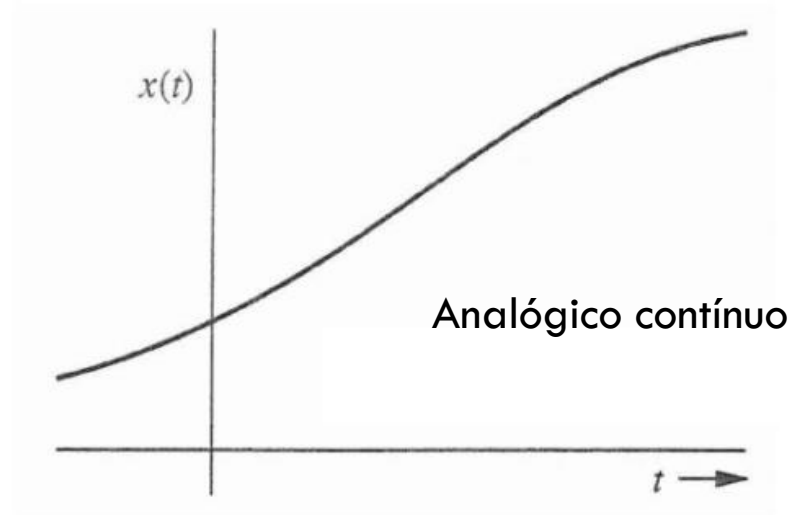
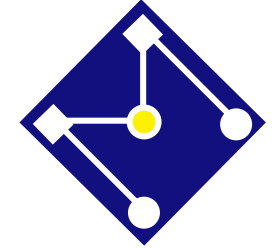
- **Sinal analógico** – caracterizado por variações suavizadas entre máximo e mínimo de sua amplitude, como ondas senoidais.
- **Sinal digital** – caracterizado por variações bruscas, como uma onda quadrada, que pode ser traduzida em código binário.

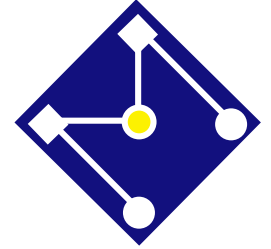
Sinal analógico



Sinal digital



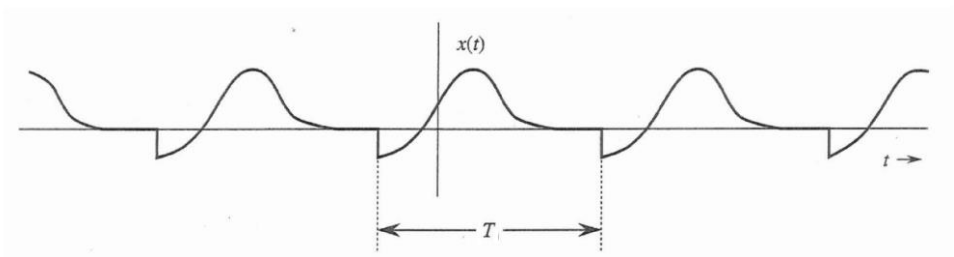




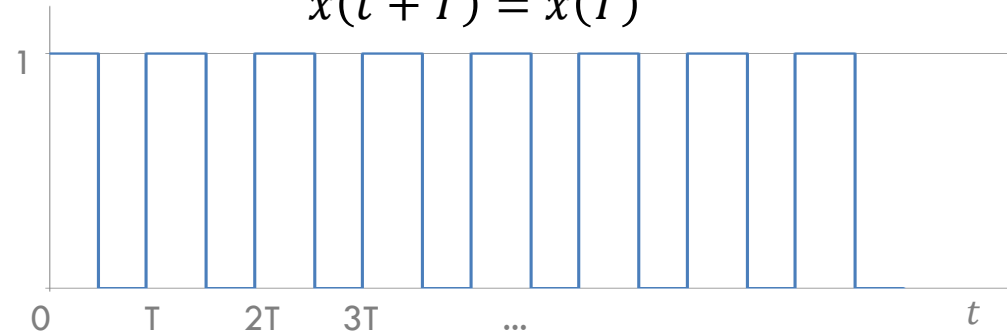
SINAIS PERIÓDICOS

- Um sinal é periódico de período T caso se mantenha inalterado por um deslocamento temporal de T .

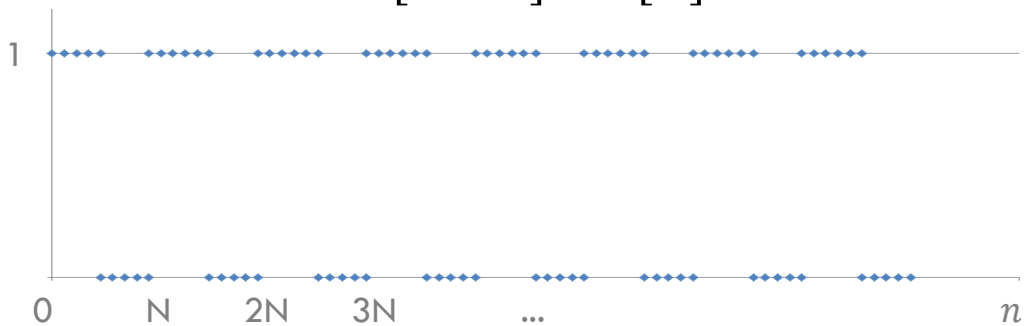
N, T representam o **período fundamental do sinal** (menor valor de intervalo que satisfaça à condição de periodicidade).

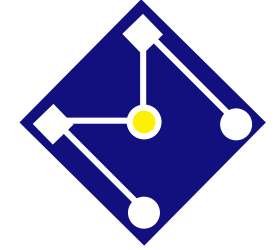


$$x(t + T) = x(t)$$



$$x[k + N] = x[k]$$

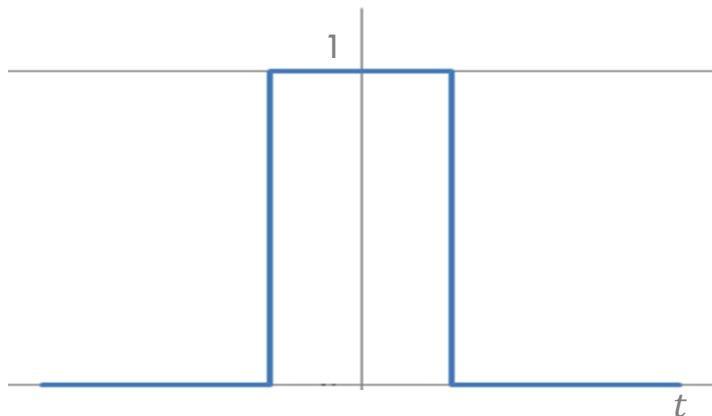




SINAIS NÃO-PERIÓDICOS

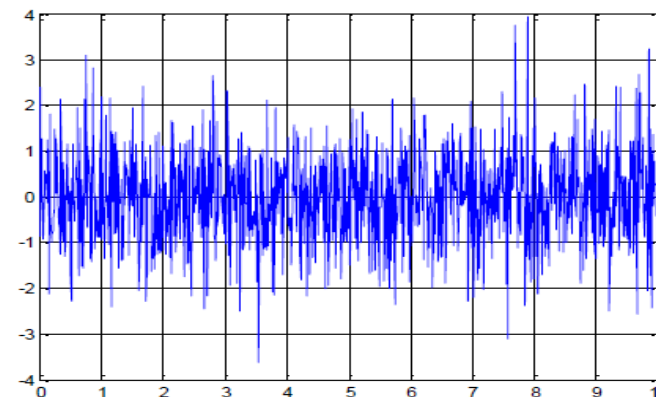
Determinísticos

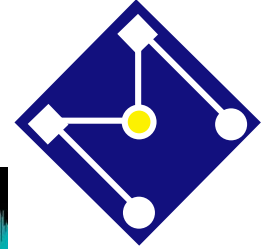
- Seu valor pode ser determinado em qualquer instante de tempo.
- Ex. Sinal pulso



Aleatórios

- Há incertezas associadas ao seu valor em qualquer instante de tempo.
- Ex. ruído branco





DIMENSÃO

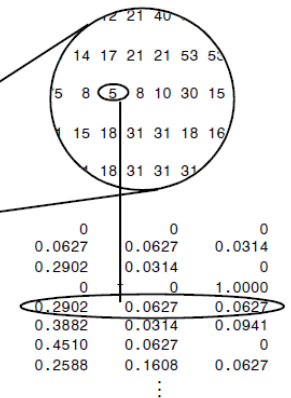
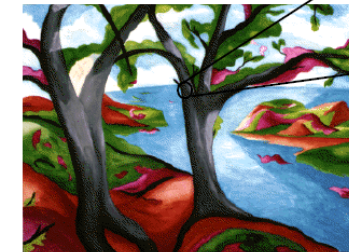
•Sinais 1D

- Um sinal de áudio é um sinal unidimensional, ou 1D, uma vez que é somente função do tempo, $f(t)$.



•Sinais 2D

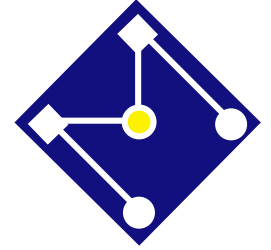
- Uma fotografia colorida é um sinal bidimensional (2D), uma vez que é uma função de duas coordenadas espaciais, $f(x, y)$.



•Sinais 3D

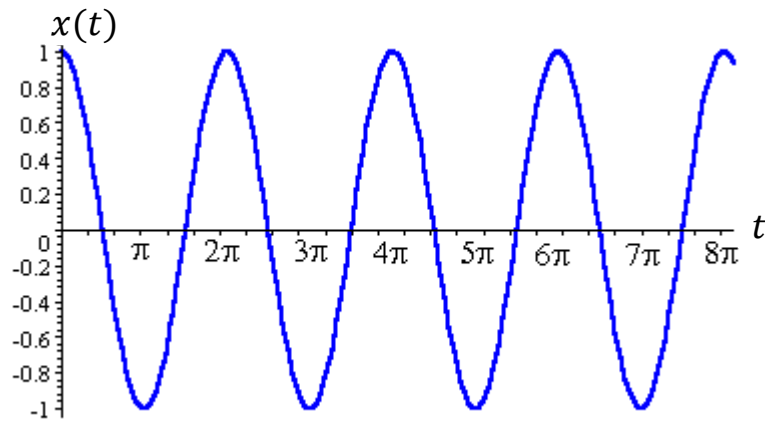
- Um filme preto e branco é uma sequência de imagens com variação no $f(x, y, t)$.





SIMETRIA DE SINAIS

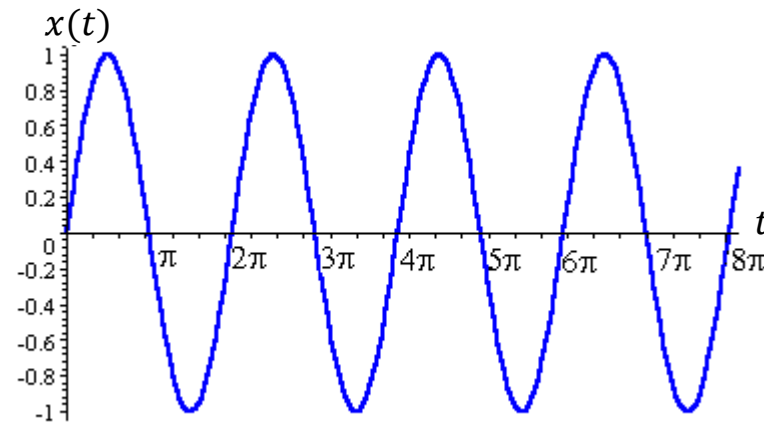
Par



$$x(-t) = x(t)$$

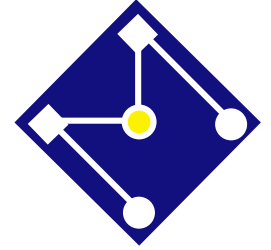
Ex.: $x(t) = \cos t$

Ímpar



$$x(-t) = -x(t)$$

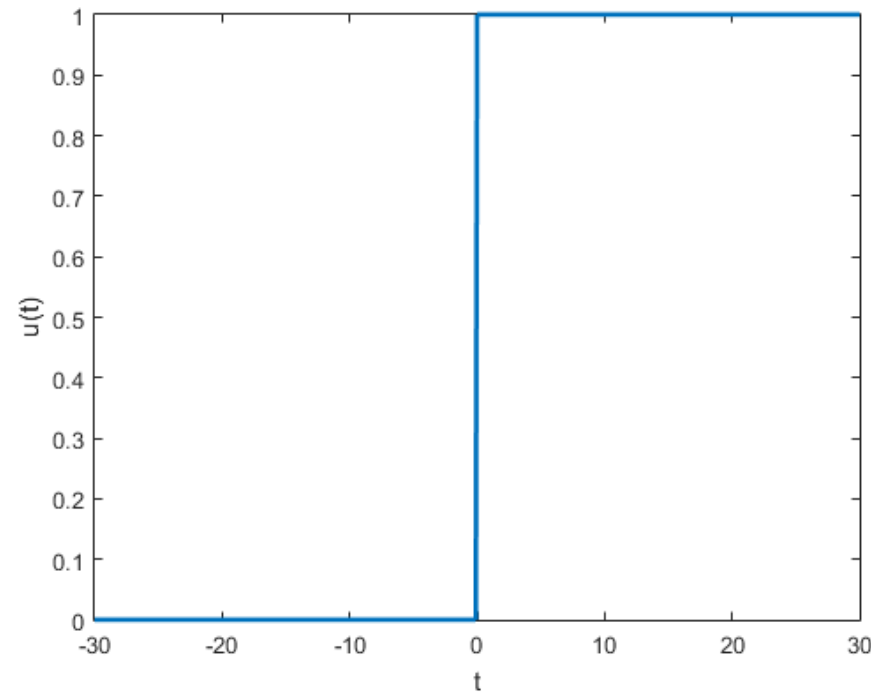
Ex.: $x(t) = \sin t$

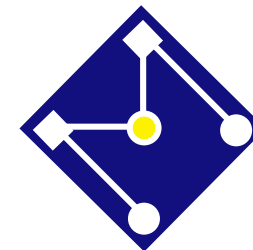


ALGUNS SINAIS IMPORTANTES...

Degrau unitário,

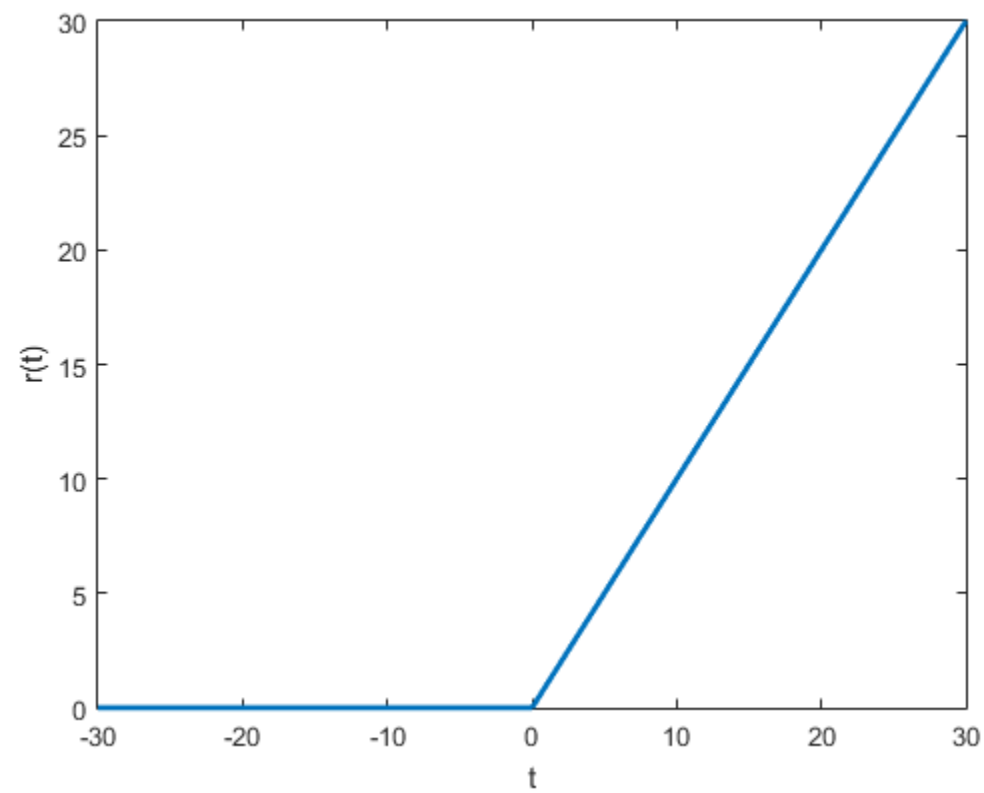
$$u_1(t) = u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

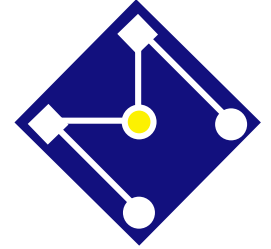




Rampa unitária,

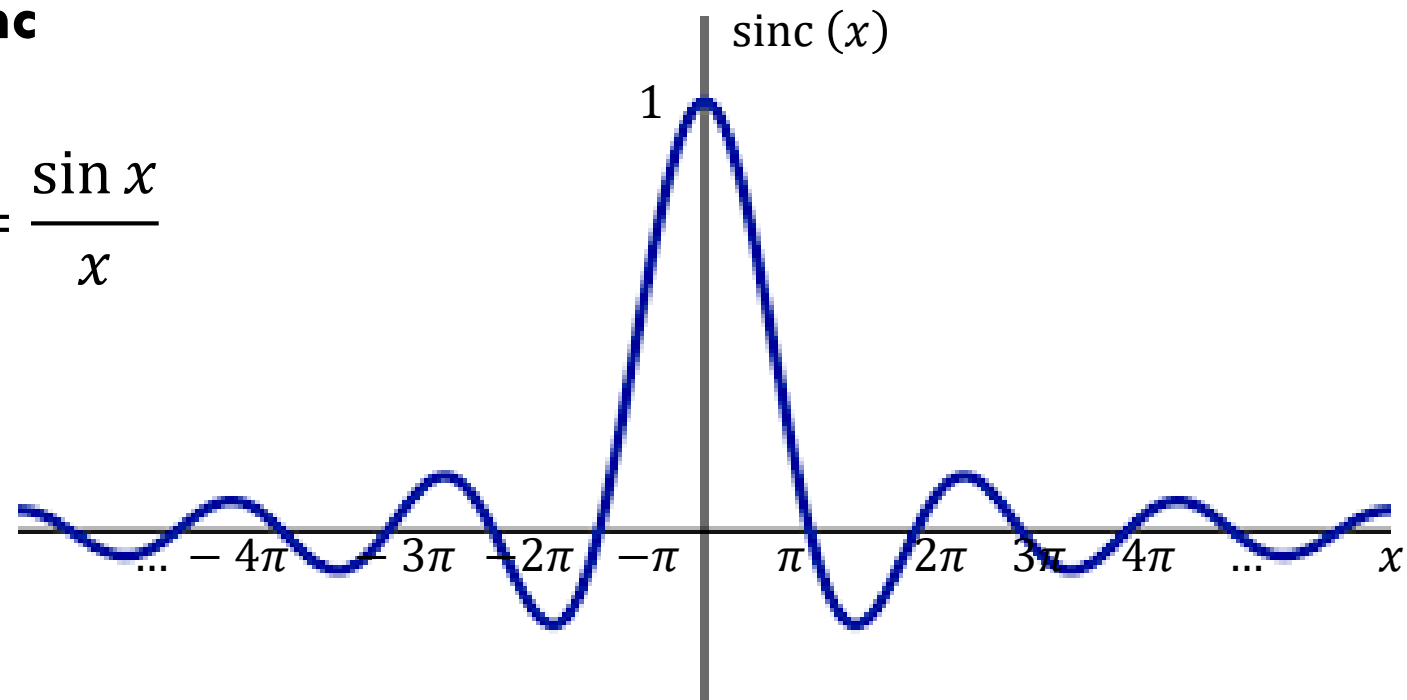
$$r(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

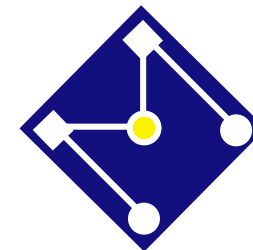




Função sinc

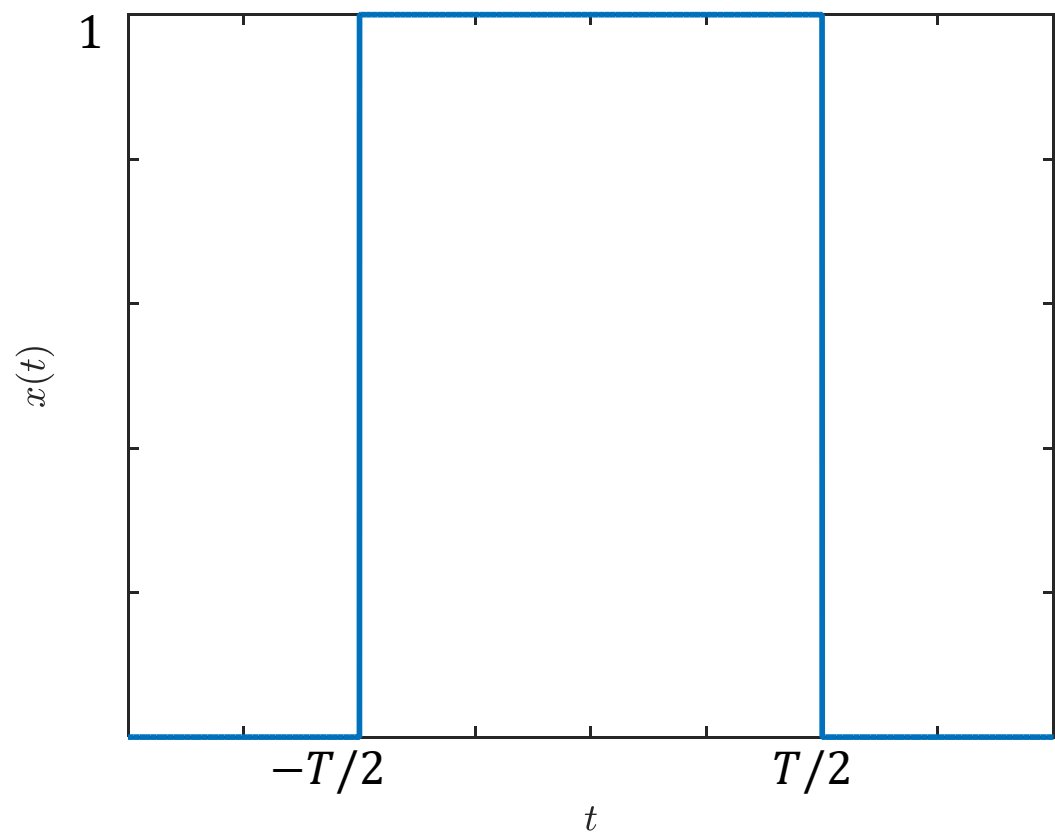
$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$$

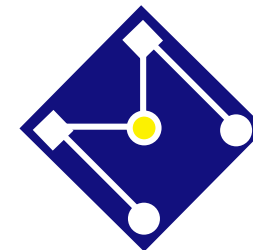




Retangular

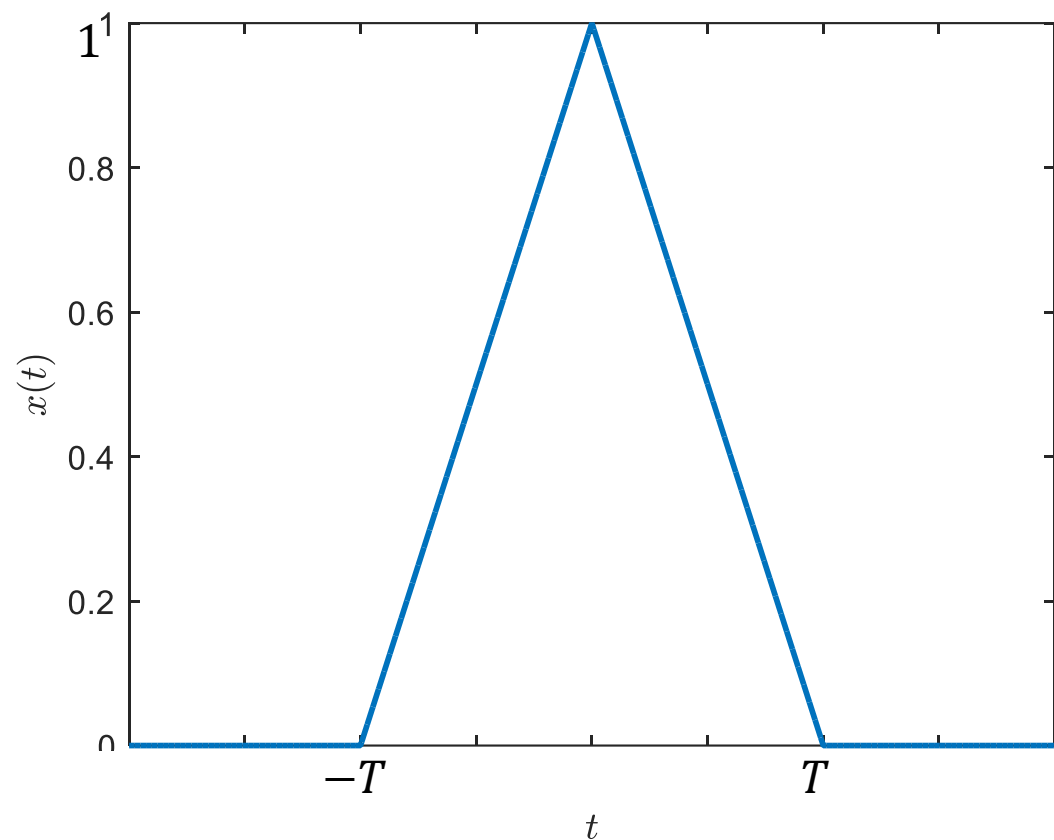
$$\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T/2 \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases}$$

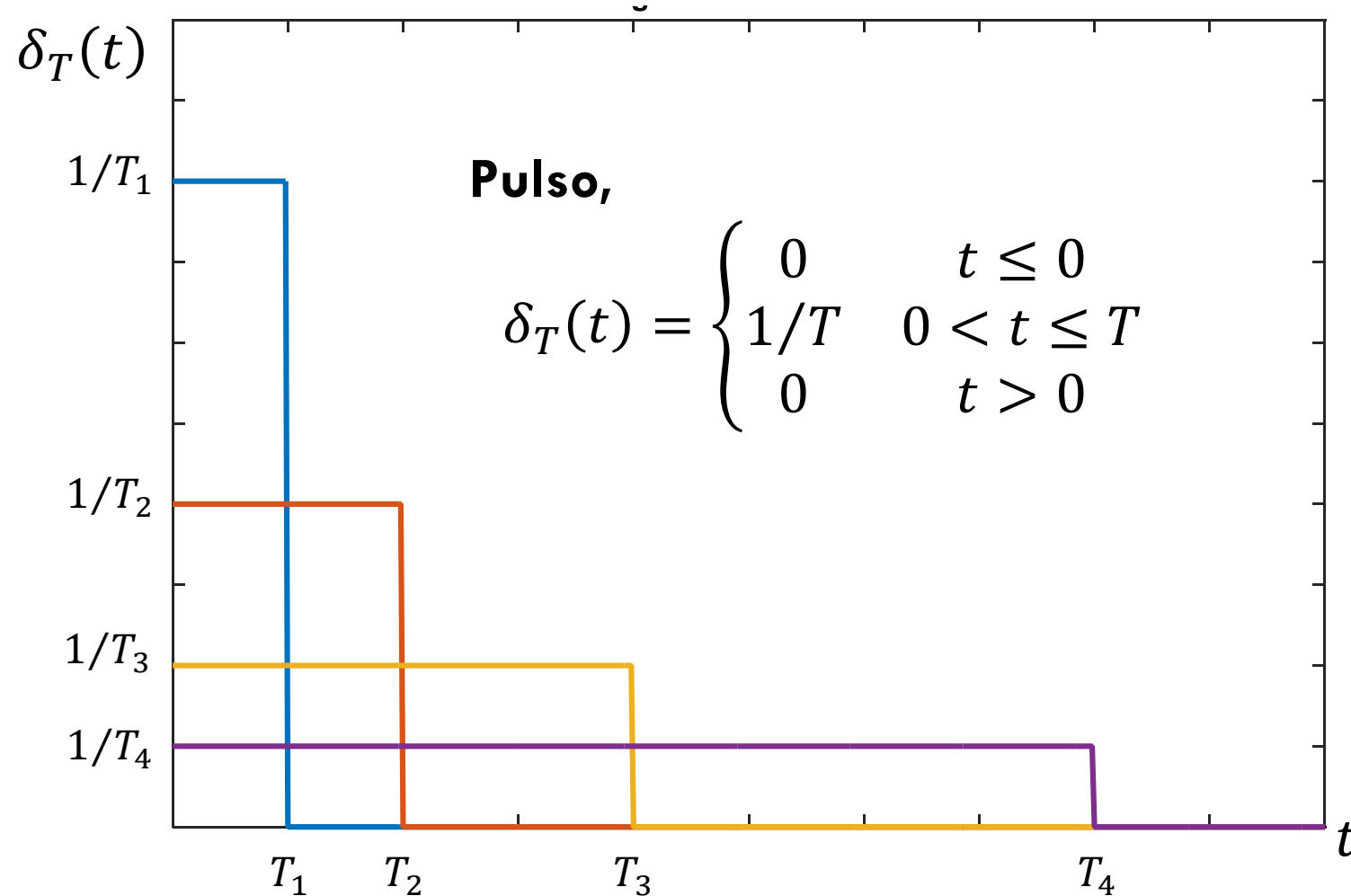
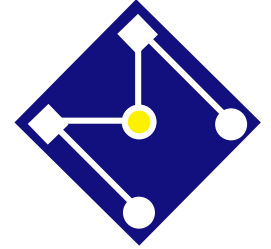




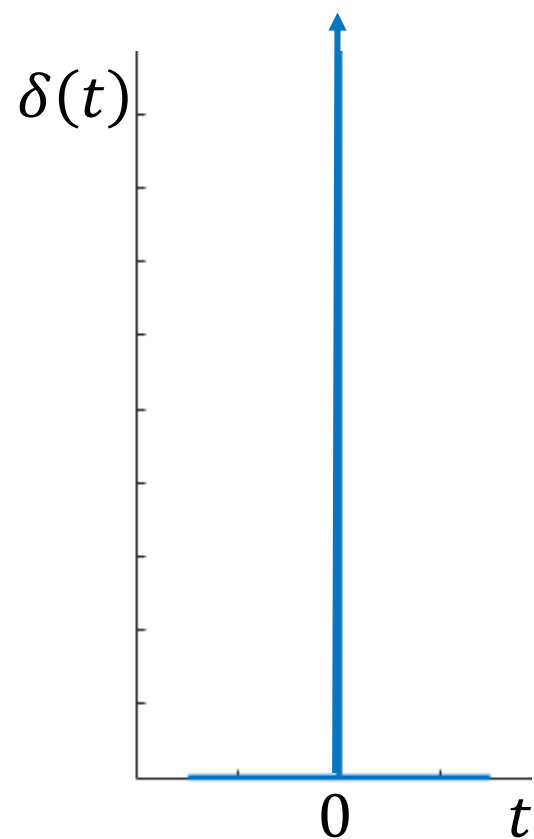
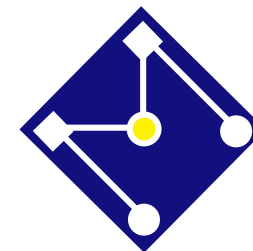
Triangular

$$\text{triang}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T} & |t| \leq T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$





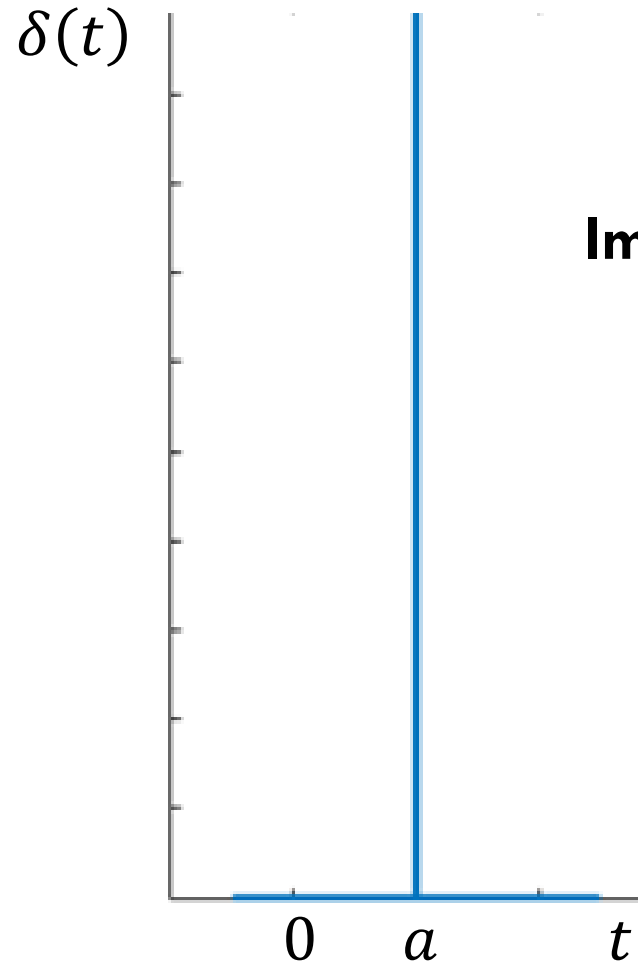
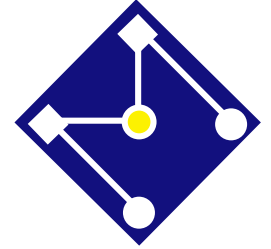
Nos preparamos para próxima definição... $\delta(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \delta_T(t)$



Impulso unitário,

$$\delta(t) = \begin{cases} \text{indef}, & t = 0 \\ 0 & , \quad t \neq 0 \end{cases}$$

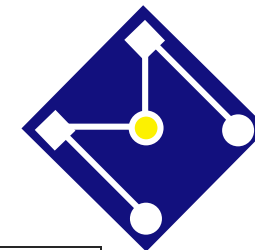
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$



Impulso unitário deslocado,

$$\delta(t - a) = \begin{cases} \text{indef}, & t = a \\ 0, & t \neq a \end{cases}$$

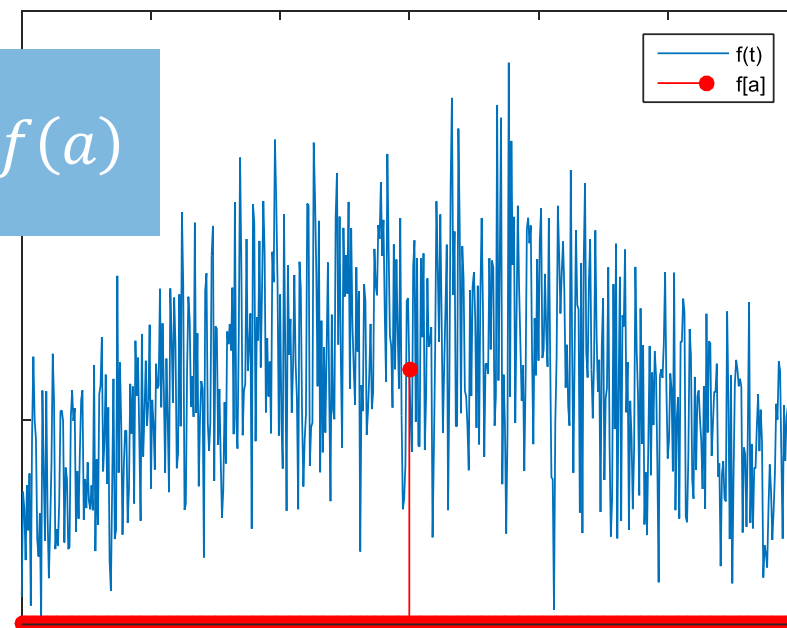
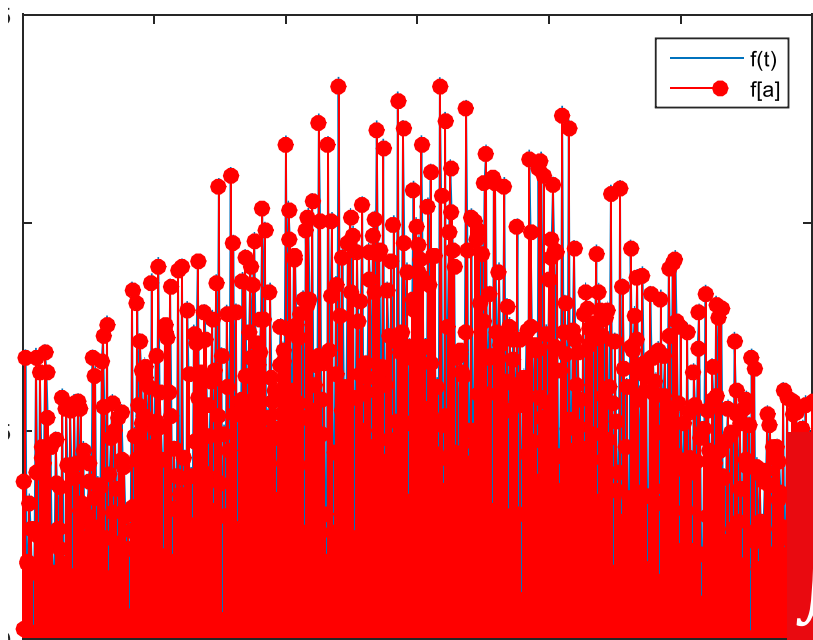
$$\int_{\alpha}^{\beta} \delta(t - a) dt = 1, \text{ desde que } \alpha < a < \beta$$



PROPRIEDADE *AMOSTRAGEM* OU *SIFTING* DA FUNÇÃO IMPULSO

REPRESENTANDO QUALQUER SINAL COM A FUNÇÃO IMPULSO

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)dt = f(a)$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-na)dt = f(na), \quad -\infty < n < \infty$$

SISTEMAS

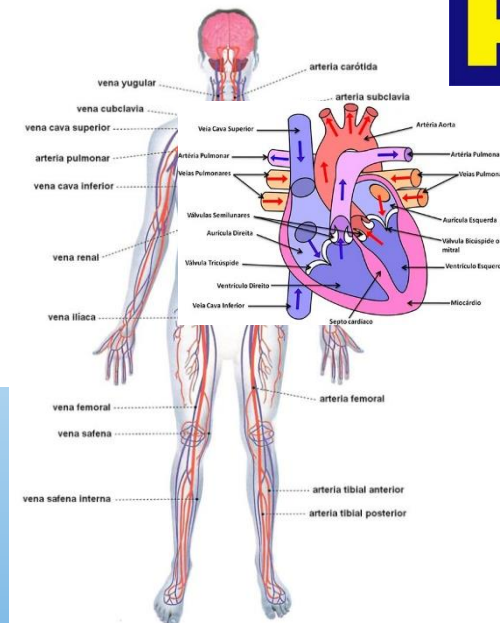
SLIT

O QUE É SISTEMA?



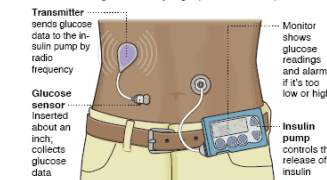
24-25 de Setembro de 2019

Sistema: Conjunto de componentes interconectados, que apresentam certas relações de causa e efeito e que atuam como um todo, com um determinado objetivo.



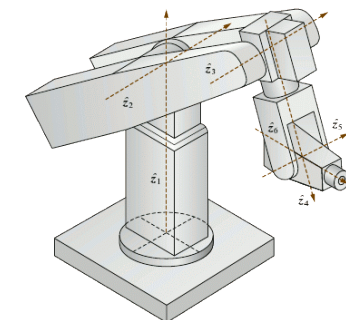
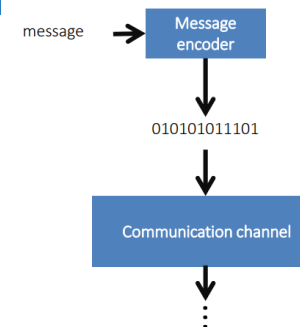
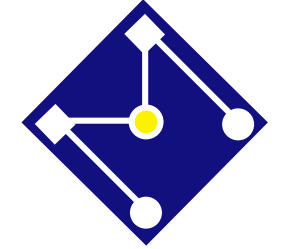
Devices ease monitoring blood sugar

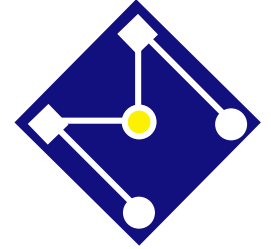
New sensors help diabetics track glucose levels around the clock, closer monitoring than standby finger-prick blood tests provide.



NOTE: The glucose monitor must be replaced every three days. Another sensor works for seven days, but does not have an insulin pump.

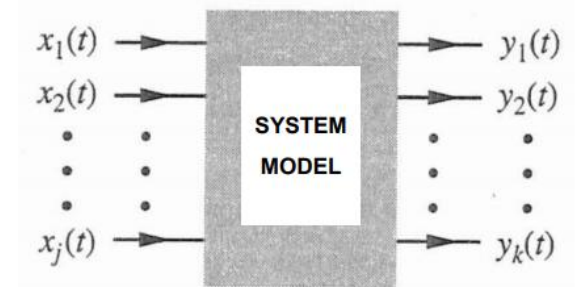
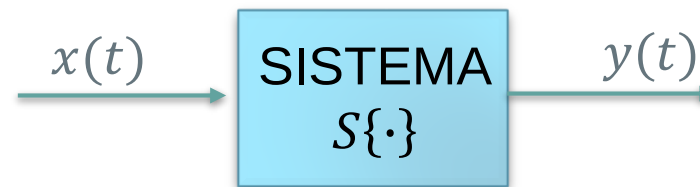
SOURCES: Medtronic; Juvenile Diabetes Research Foundation

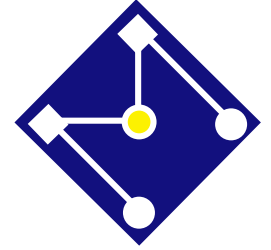




SINAIS E SISTEMAS

- Os sinais DE ENTRADA E SAÍDA de um sistema .
- Eles podem representar:
- a **entrada** de um sistema (*input*): às vezes também é chamado de *controle* ou mesmo a *excitação* do sistema
- **saída** do sistema (*output*): às vezes também é chamado de *resposta* ou *observação* do sistema.





SISTEMA CAUSAL E NÃO CAUSAL

Sistema causal: o/p do sistema não dependente de valores futuros do i/p.

Ex.:

- i. $y(t) = x(t)$
- ii. $y(t) = x(t) + x(t - 1)$

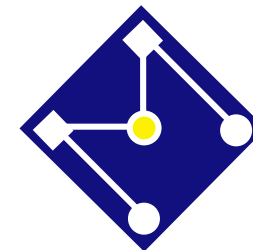
Sistemas fisicamente
factíveis são causais!!!!

Sistema não causal: o/p do sistema dependente de valores futuros do i/p a qualquer instante de tempo.

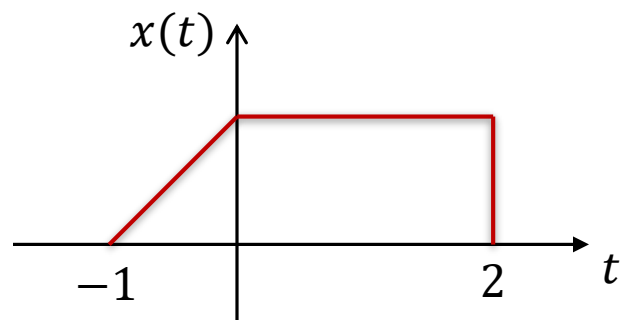
Ex.:

- i. $y(t) = x(t + 2)$
- ii. $y(t) = x(t) + x(t - 1) + x(t + 1)$

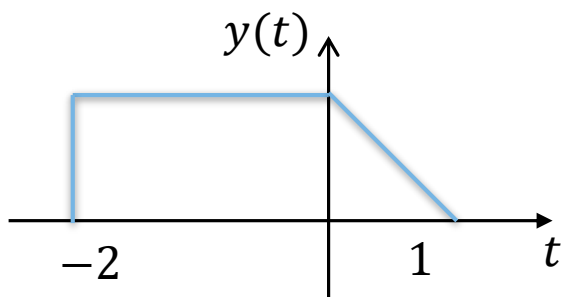
Anti-causal: o/p depende APENAS valores futuros de i/p



EXEMPLO



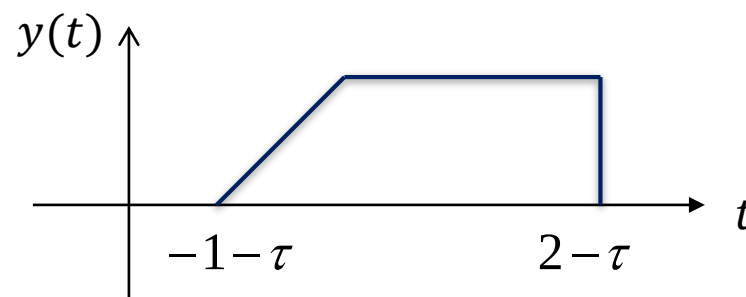
$$y(t) = x(-t)$$



$t \leq -1, x(t) = 0$, mas $y(t) \neq 0$

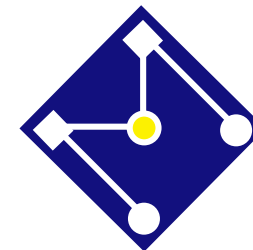
Sistema Não Causal

$$y(t) = x(t - \tau), \tau \geq 0$$



Sistema com delay...

Sistema Causal



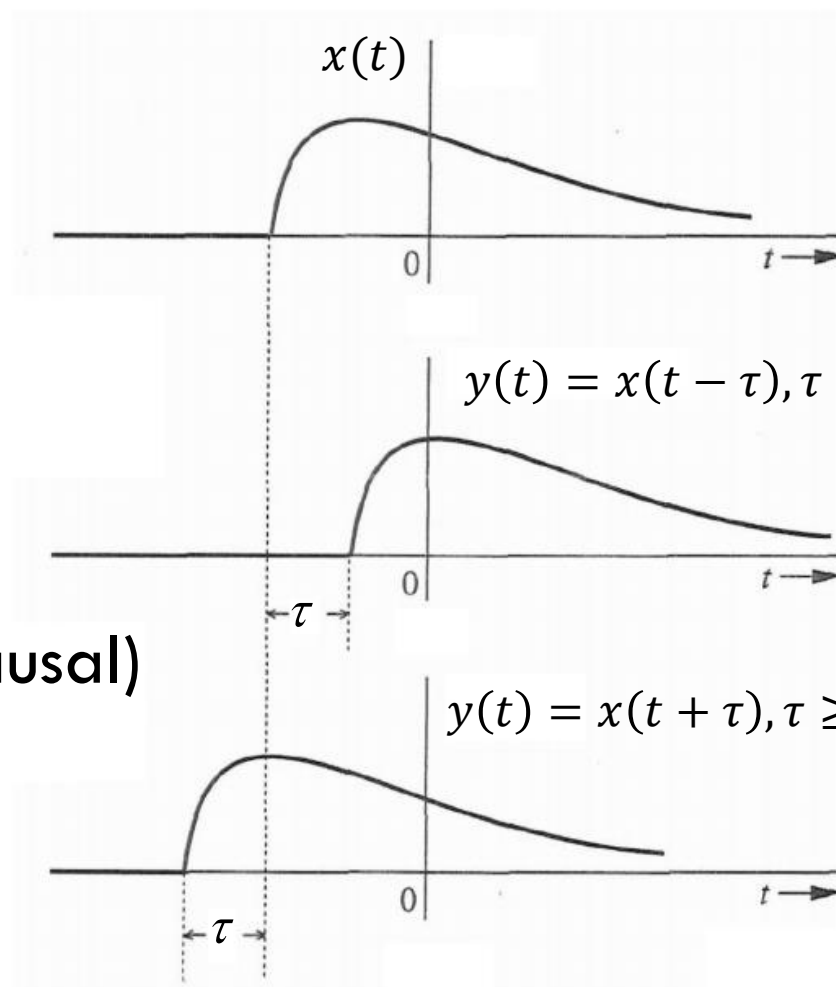
SINAL COM ATRASO OU AVANÇO

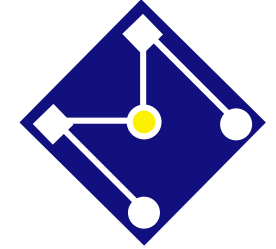
Atraso (causal)

$$y(t) = x(t - \tau), \tau \geq 0$$

Avanço (não causal)

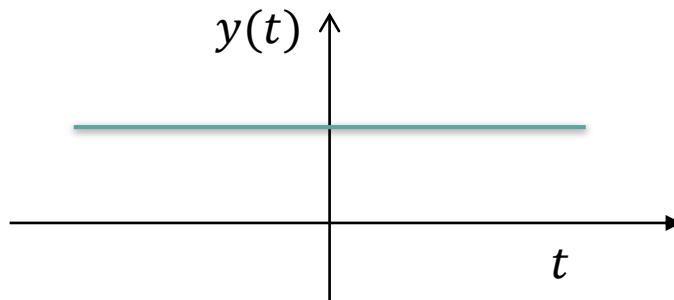
$$y(t) = x(t + \tau), \tau \geq 0$$





MAIS EXEMPLOS...

$$y(t) = x(t^2), \text{ onde } x(t) = u(t).$$



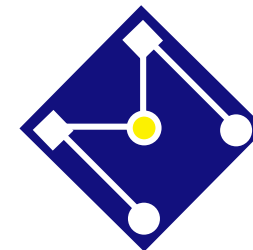
$$t \leq 0, x(t) = 0, \text{ mas } y(t) \neq 0$$

Sistema Não Causal

$$y(t) = \sin(t + 1)x(t - 1)$$

Coeficiente...

Sistema Causal



EXERCÍCIOS

Verifique se cada sistema abaixo é causal ou não causal.

i. $y(t) = x(2t)$

ii. $y(t) = \begin{cases} x(2t) & t < 0 \\ x(t-1) & t \geq 0 \end{cases}$

iii. $y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} x[n-1]$

iv. $y(t) = \sin t x(t)$

v. $y(t) = x(e^t)$

vi. $y(t) = x(\sin t)$

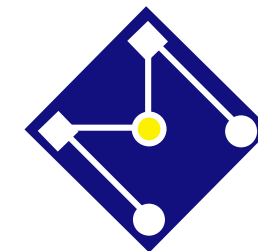
vii. $y(t) = x(t/4)$

viii. $y(t) = e^t x(t-1)$

ix. $y(t) = \int_{-\infty}^t x(t) dt$

SLIT - SISTEMAS LINEARES E INVARIANTES NO TEMPO

LTI SYSTEMS (LINEAR AND TIME INVARIANT SYSTEMS)



sistema *linear*

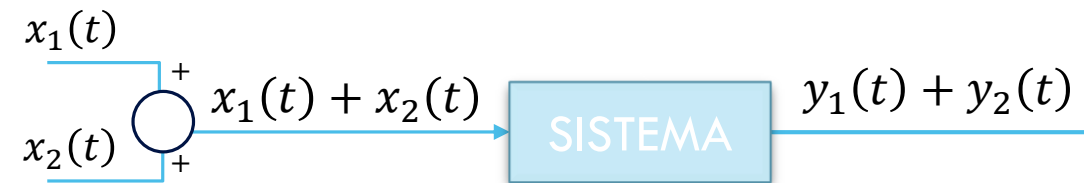
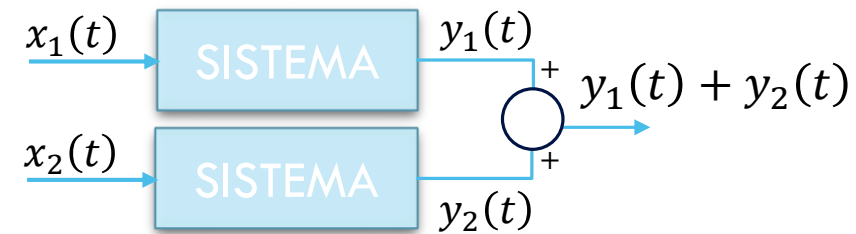
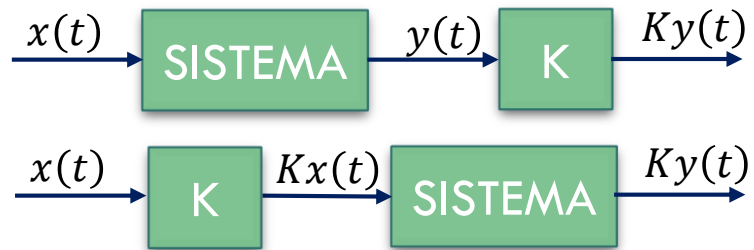
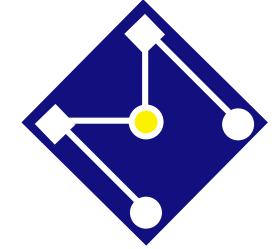
Sistemas contínuos são lineares se satisfazem duas propriedades:
homogeneidade e aditividade (superposição)

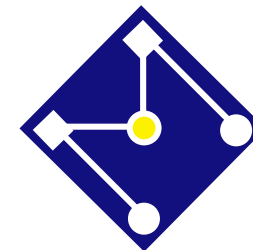
$$x(t) \rightarrow y(t) \rightarrow Kx(t) \rightarrow Ky(t)$$

$$\begin{array}{l} x_1(t) \rightarrow y_1(t), \\ x_2(t) \rightarrow y_2(t) \end{array} \rightarrow x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t)$$

Isto é,

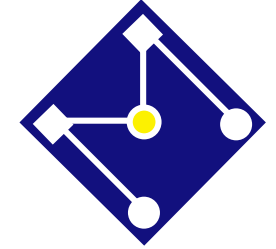
$$K_1x_1(t) + K_2x_2(t) \rightarrow K_1y_1(t) + K_2y_2(t)$$





EXEMPLOS...

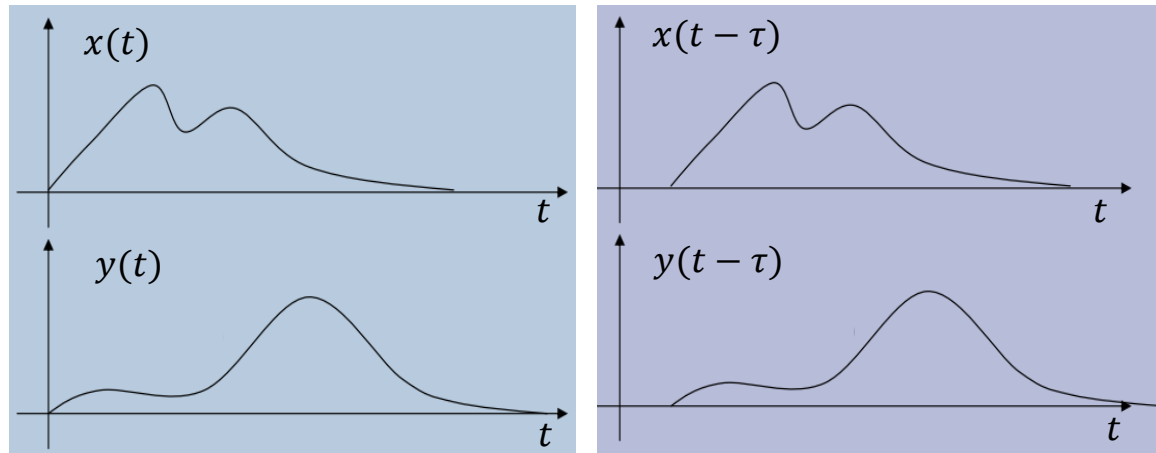
- i.* $y(t) = x(\sin t)$
- ii.* $y(t) = x(t^2)$
- iii.* $y(t) = x(\log t)$
- iv.* $y(t) = [x(t)]^2$
- v.* $y(t) = \sin t x(t)$
- vi.* $y(t) = e^2 x(t)$



SLIT - SISTEMA LINEAR E INVARIANTE NO TEMPO

LTI SYSTEMS (LINEAR AND TIME INVARIANT SYSTEMS)

sistema invariante no tempo



é aquele cujos
parâmetros
não mudam
com o tempo



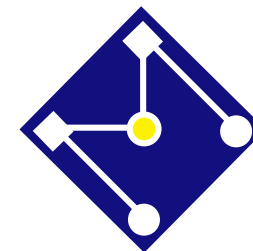
Um sistema é dito invariante no tempo se um deslocamento no tempo do sinal de entrada (retardo ou avanço) implicar em um deslocamento temporal idêntico no sinal de saída:

$$x(t) \rightarrow y(t) \Rightarrow x(t - \tau) \rightarrow y(t - \tau)$$

Sistemas invariante e variante no tempo, respectivamente:

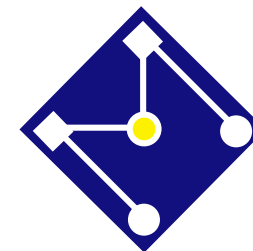
$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} - y = \frac{dx}{dt} + 3x$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 6t \frac{dy}{dt} + y = \frac{dx}{dt} - (t - 4)x$$



QUAIS SISTEMAS ABAIXO SÃO SLIT_s?

- i.* $y(t) = x(t + 1)$
- ii.* $y(t) = 1/x(t)$
- iii.* $y(t) = 3\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) - x(t)$
- iv.* $y(t) = \sin t x(t)$
- v.* $y(t) = x(t) + 2$
- vi.* $y(t) = \cos 2\pi x(t)$
- vii.* $y(t) = (\log t + 3t^2)x(t)$
- viii.* $y(t) = u(t)t x(t)$

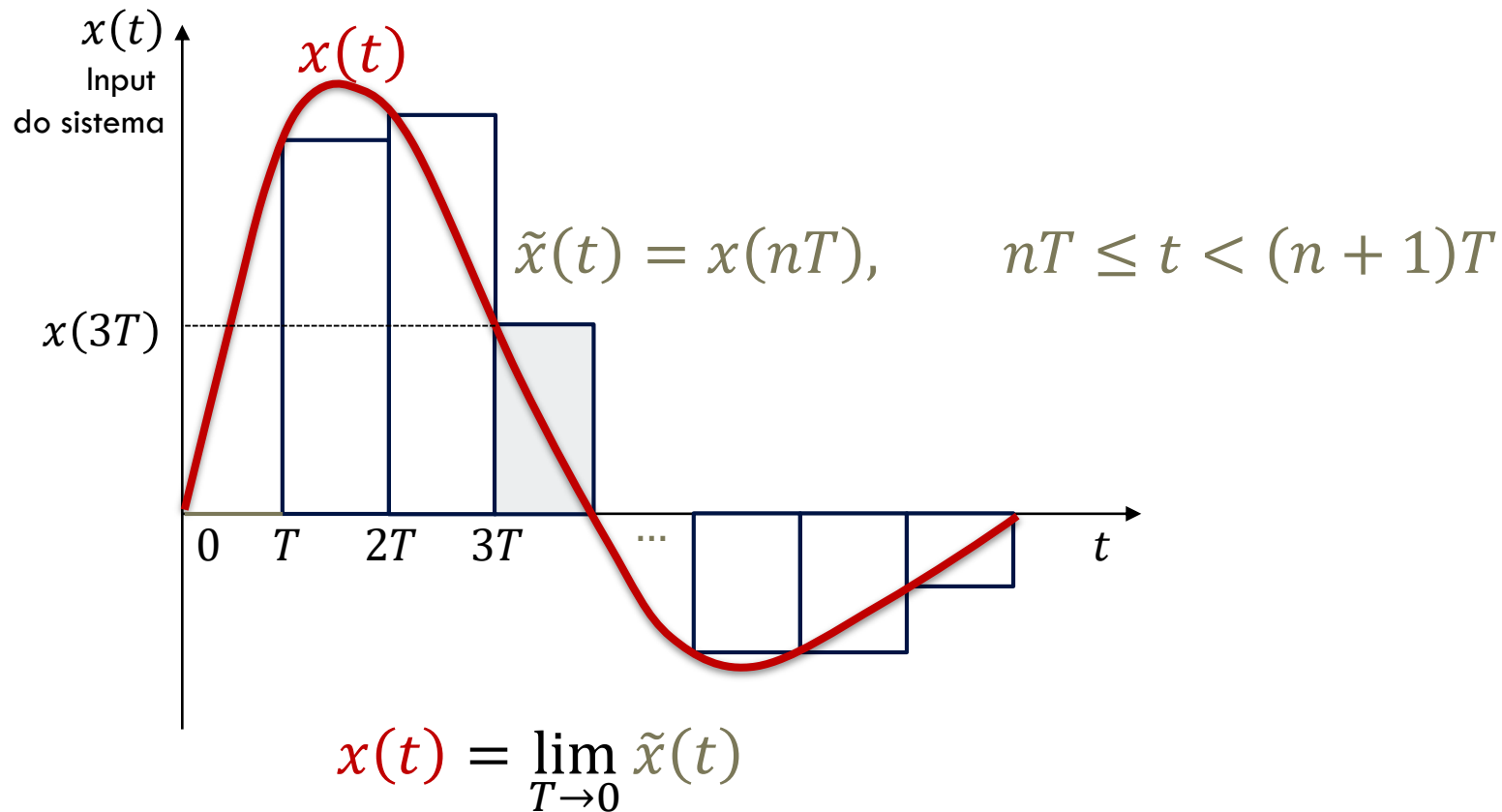
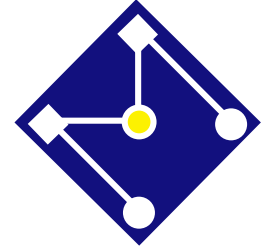


MOTIVAÇÃO PARA O ESTUDO DE SISTEMAS LINEARES

1. Boa parte dos fenômenos físicos podem ser descritos aproximadamente por comportamentos lineares, ao menos em torno de pontos de operação especificados.
2. Poderosas ferramentas para análise e síntese de comportamentos lineares estão disponíveis. Particularmente, existem soluções genéricas e em forma fechada para sistemas lineares.

CONVOLUÇÃO

Sistemas SLIT



Pulso (ver slides anteriores),

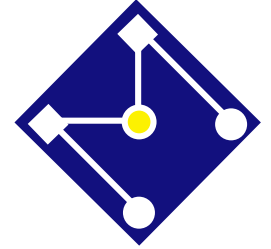
$$\delta_T(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1/T & 0 < t \leq T \\ 0 & t > 0 \end{cases}$$

Cada pulso

$$p_n(t) = \begin{cases} x(nT) \delta_T(t - nT)T & nT \leq t < (n+1)T \\ 0 & \text{cc} \end{cases}$$

Trem de pulsos

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta_T(t - nT)T$$

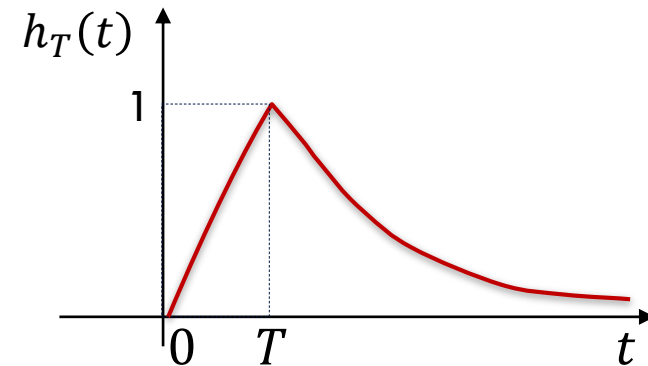
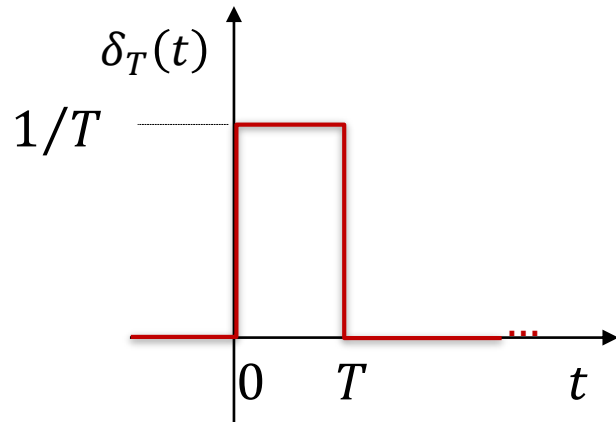


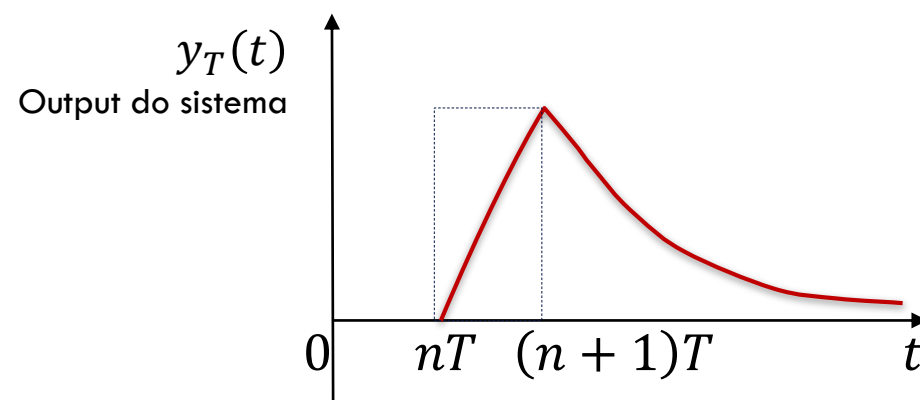
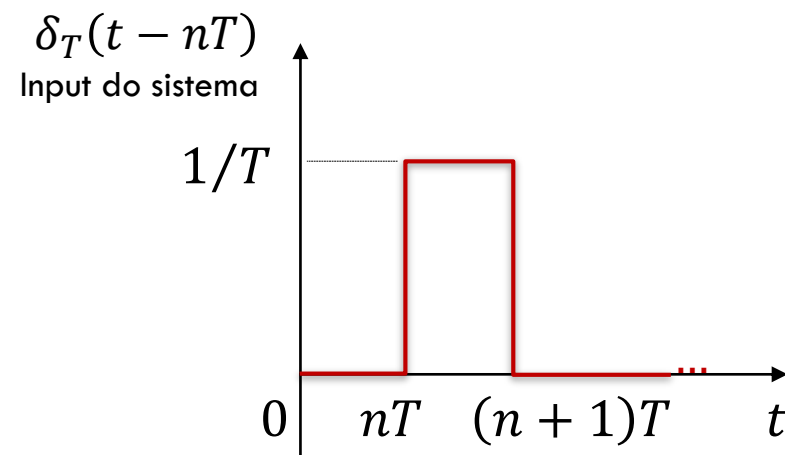
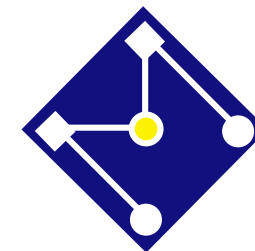
Vamos supor que conhecemos a saída

$$y(t) = h_T(t)$$

para uma entrada pulso

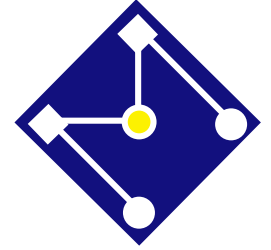
$$x(t) = \delta_T(t)$$



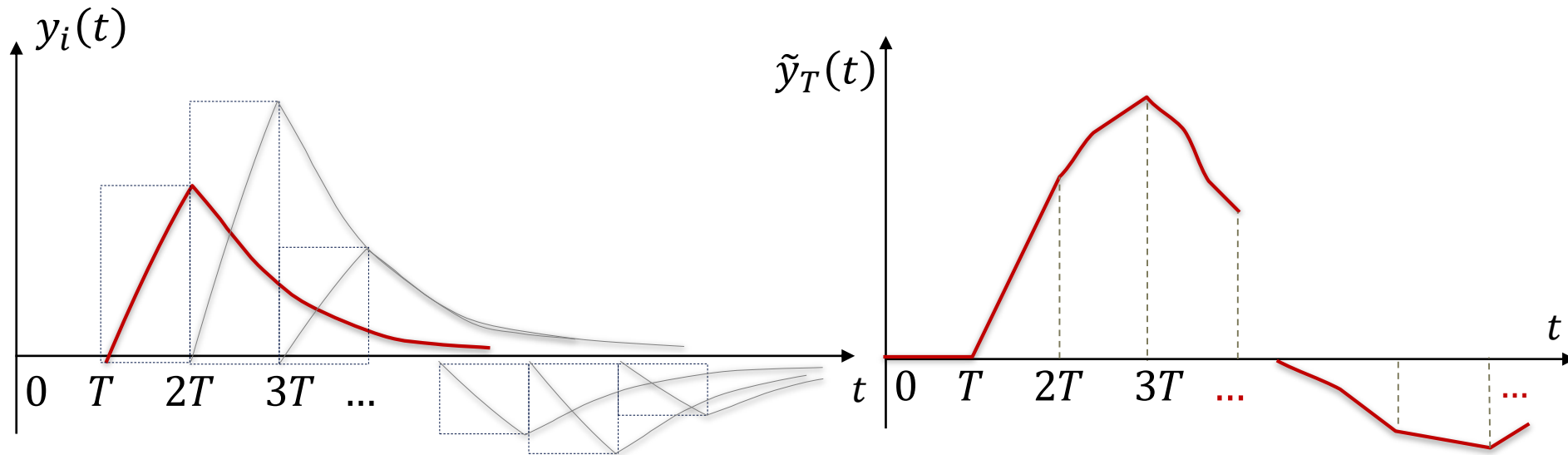


Se o Sistema é **SLIT** então, $y_n(t) = h_T(t - nT)$

SLIT: permite que a resposta total do sistema à entrada $\tilde{x}(t)$ seja escrita como a soma das respostas de todas as componentes do pulso,

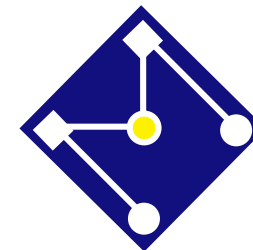


$$\tilde{y}_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)h_T(t - nT)T$$



$$\tilde{y}_T(t) = \sum_{n=-\infty}^N x(nT)h_T(t - nT)T$$

$$NT \leq t < (N + 1)T$$



$$\delta(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \delta_T(t) \quad h(t) = \lim_{T \rightarrow 0} h_T(t)$$

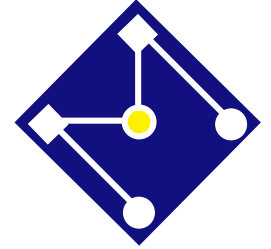
$$nT \rightarrow \tau$$

$$T \rightarrow d\tau$$

$$y(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^N x(nT) h_T(t - nT) T = \int_{-\infty}^t x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

Teorema da convolução!!



COMPREENDENDO GRAFICAMENTE CONVOLUÇÃO

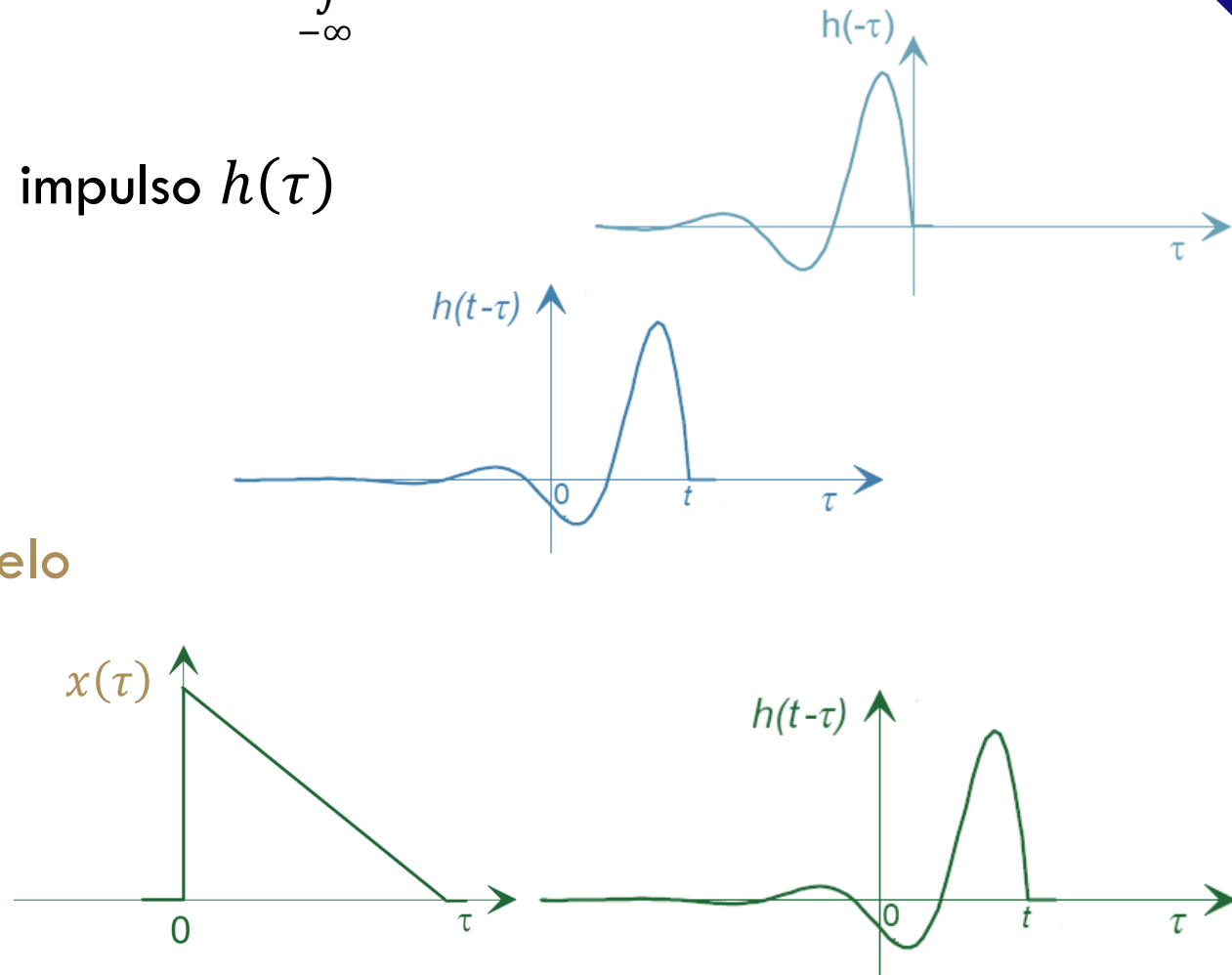
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)h(t - \tau) d\tau$$

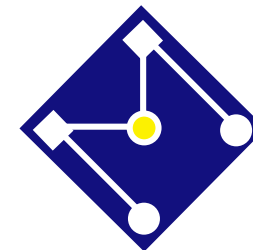
Resposta do Sistema à função impulso $h(\tau)$

Reverter no tempo $h(-\tau)$

Shifting no tempo $h(t - \tau)$

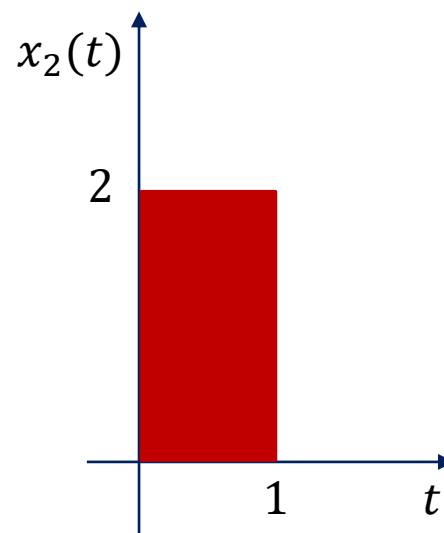
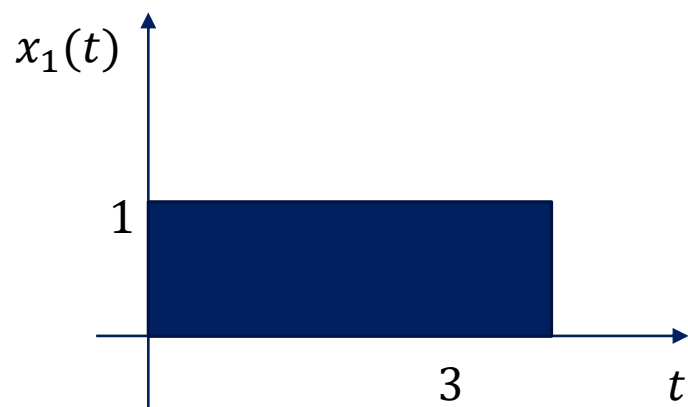
Multiplicar o sinal resultante pelo
input do sistema $x(\tau)$

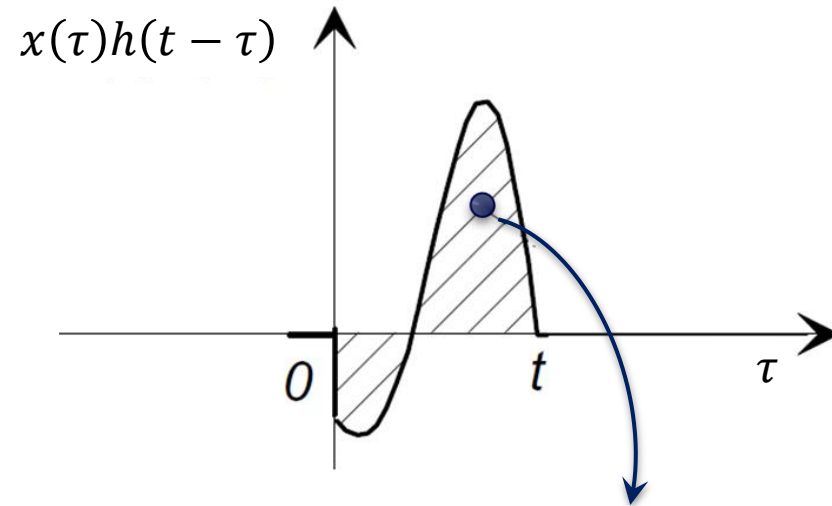
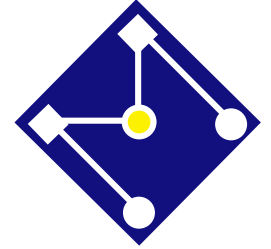




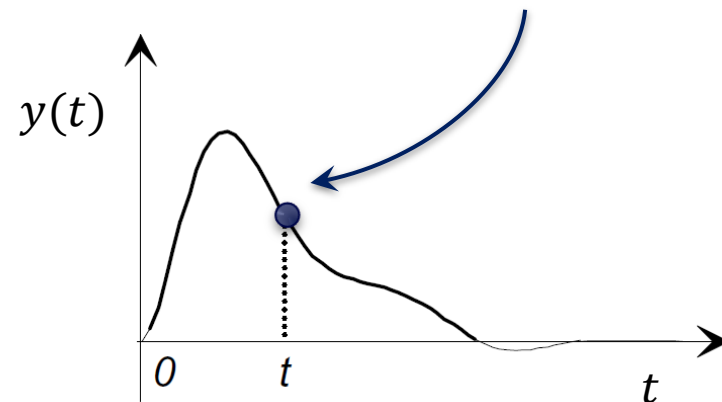
EXEMPLO

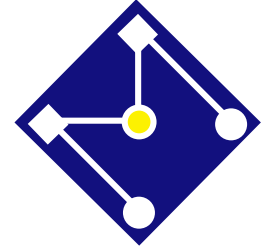
Encontre $x_1(t) * x_2(t)$ para os 2 pulsos retangulares,





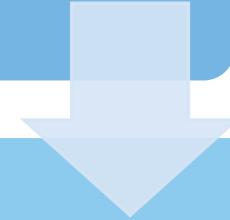
Resposta no
instante t é
definido pela
área sob a
curva





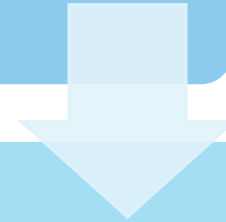
Sistema invariante no tempo

$$\mathcal{H}\{\delta(t + \tau)\} = h(t + \tau)$$



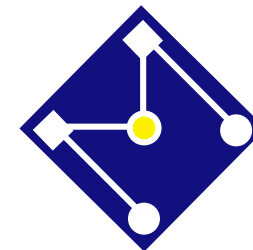
Linearidade

$$\mathcal{H}\{x(t)\} = x_1 h(t + \tau_1) + x_2 h(t + \tau_2)$$



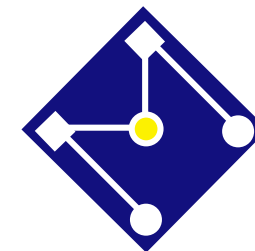
Estendendo com a propriedade de amostragem:
convolução

$$\mathcal{H}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = x(t) * h(t)$$



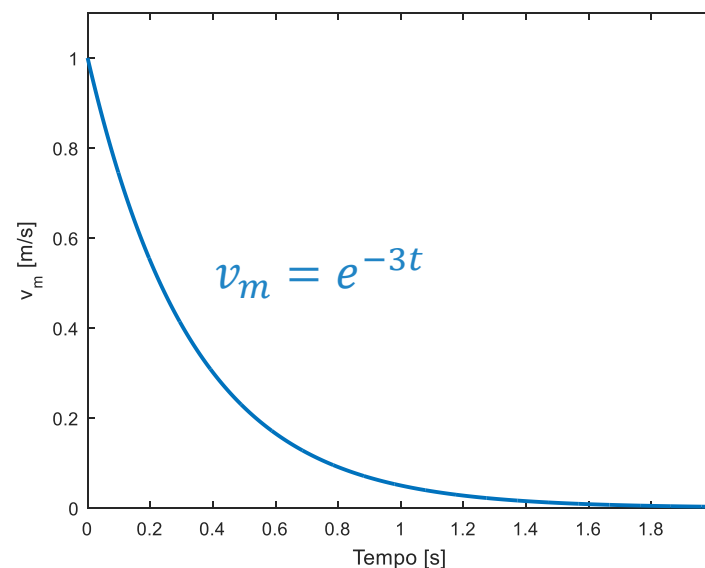
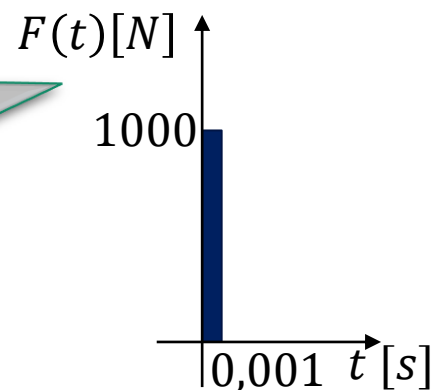
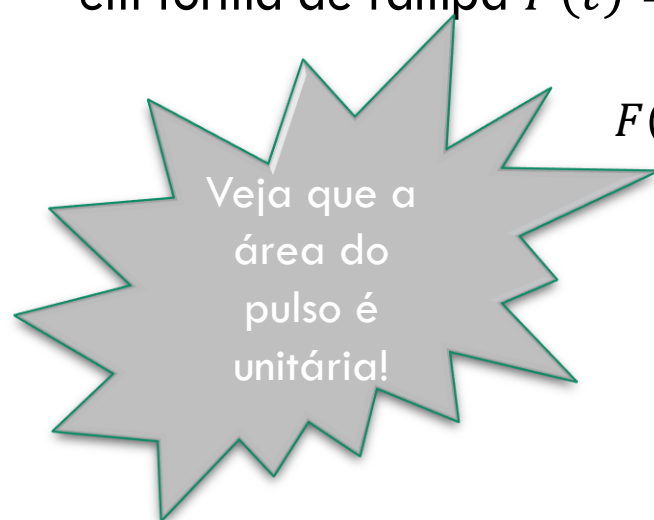
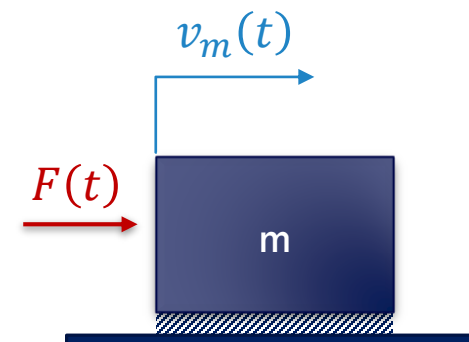
ENTENDENDO SISTEMAS LIT

- São sistemas especiais porque qualquer caso pode ser expresso como uma soma ponderada de *respostas impulso deslocadas!!!*
- O problema de caracterizar um sistema complexo se tornou mais simples agora. Para sistemas LIT, existe apenas a resposta à função impulso para medir. Uma vez que tenhamos medido esta função, podemos prever como o sistema responderá a qualquer estímulo.

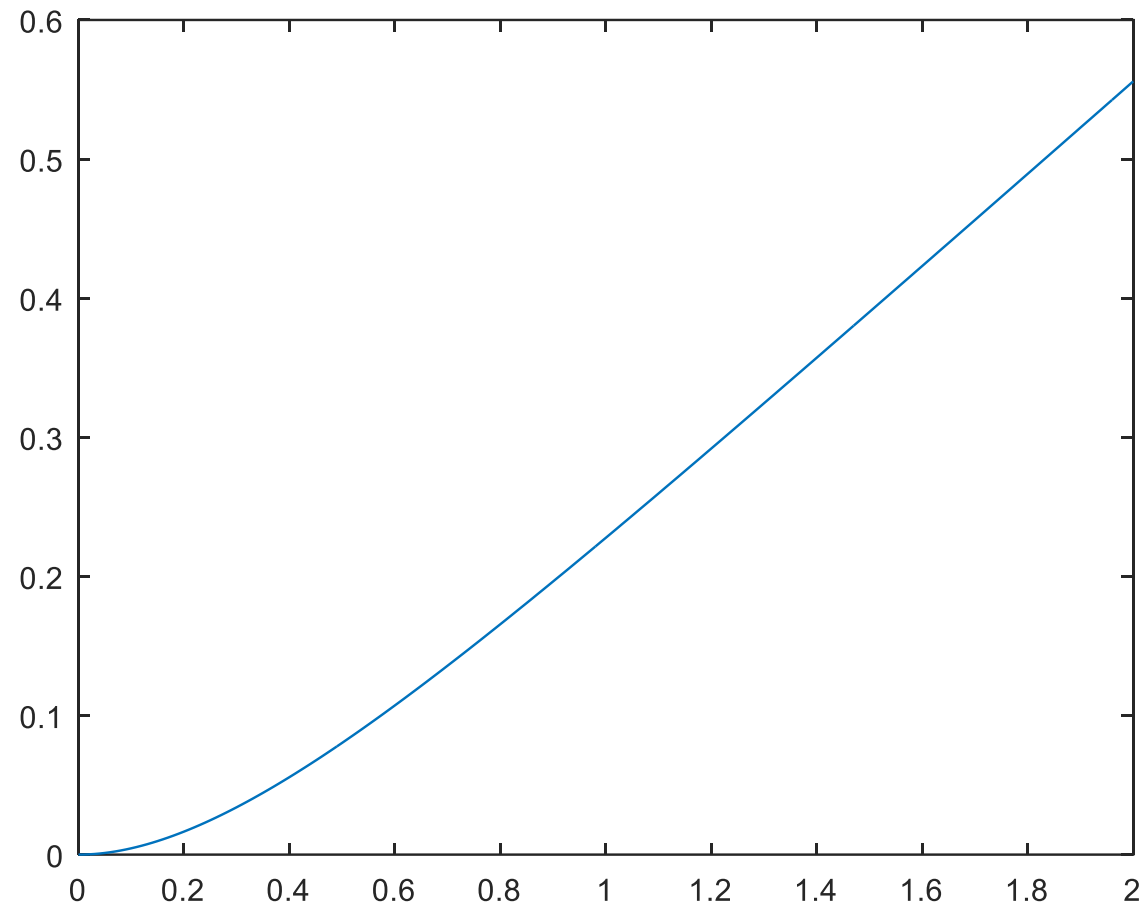
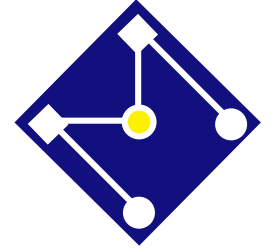


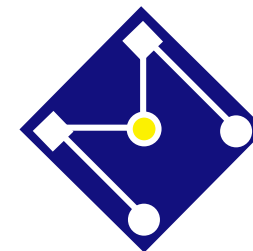
EXEMPLO

- Um elemento de massa em repouso em um plano viscoso, é submetido a uma força impulsiva com duração de $0,001\text{ s}$ e magnitude 1000 N . Observa-se que a massa responde com uma velocidade $v_m = e^{-3t}$. Encontre a resposta da mesma massa para uma força de entrada em forma de rampa $F(t) = t, t > 0$.



```
clear all; close all; clc  
t=0:0.01:2;  
v=t/3-1/9+1/9*exp(-3.*t);  
plot(t,v)
```





PARA FAZER EM CASA

1. Dada a saída de um circuito RC a uma função impulso,

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u_1(t)$$

Ache a saída do circuito para uma entrada

- A. Impulso unitário $x(t) = \delta(t)$
 - B. Degrau unitário $x(t) = u(t)$
2. Dada a saída de um circuito RC a uma função impulso,
- $$h(t) = u(t) - u(t - t_0)$$

onde $t_0 > 0$.

Ache a saída do circuito para uma entrada

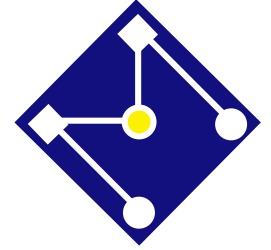
- A. Degrau unitário $x(t) = u(t)$
- B. Degrau finito unitário $x(t) = u(t) - u(t - t_0)$

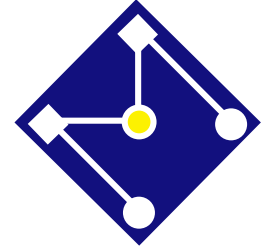
Extraído de

<http://www.ece.utah.edu/~ece3500/notes/class06.html>

APLICAÇÃO

- https://www.youtube.com/watch?v=GQu6_MjDwcU





REVISÃO – AULA 01

Sinal

Sistema

Convolução

so far...



SÉRIE DE FOURIER

Aguardem próxima semana
continuação da revisão;
Façam os exercícios desta
semana. NÃO DEIXEM
ACUMULAR!!!!



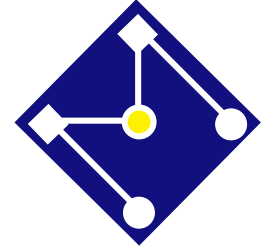
PMR 3306

Sistemas Dinâmicos II



MOTIVAÇÃO

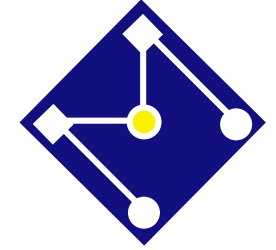
Frequência
Domínio do tempo vs domínio da
frequência



DECOMPOSIÇÃO DO SINAL

$x[0]$
 $x[1]$

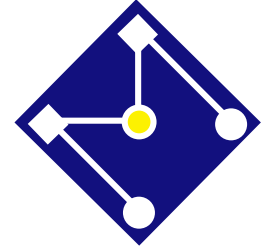
$$\begin{aligned} X[0] &= x[0] + x[1] \\ X[1] &= x[0] - x[1] \end{aligned}$$



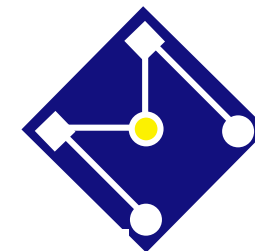
O que é transformação?????
É o mapeamento entre domínios!



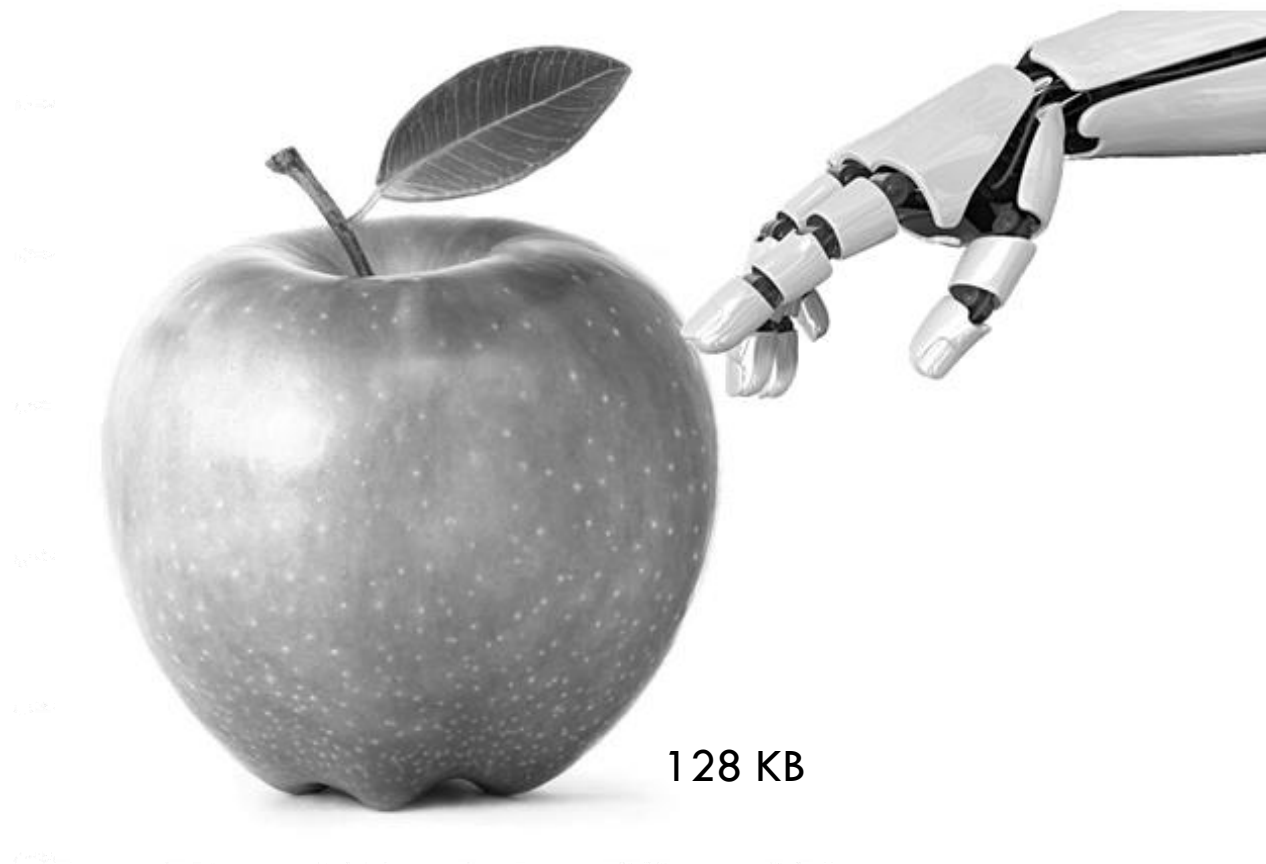
Todos tem a mesma informação!



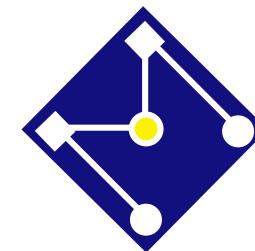
**Temos o olho esquerdo,
então por que
precisamos do olho
direito?
A resposta é perspectiva.**



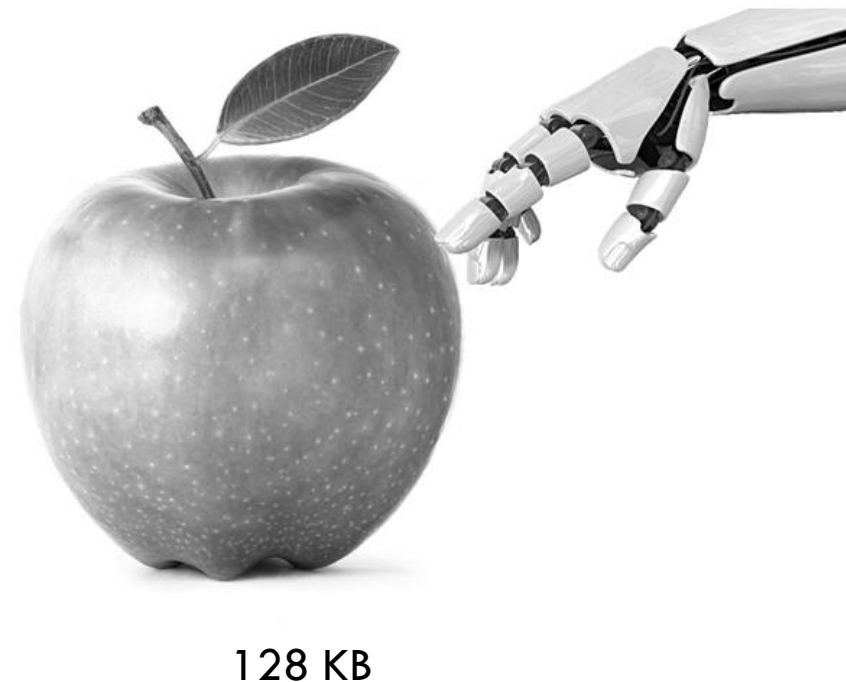
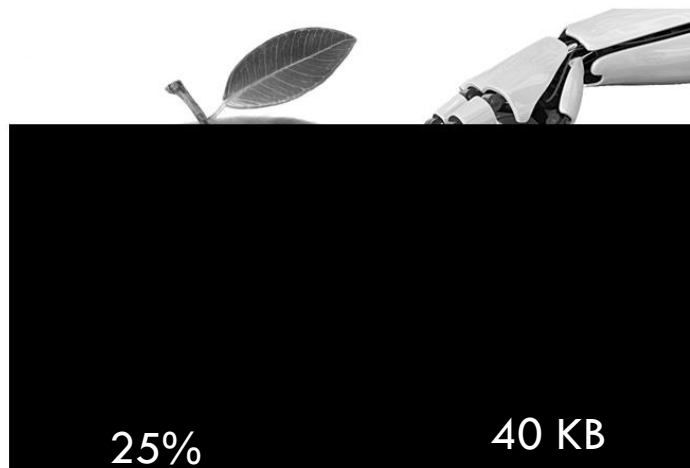
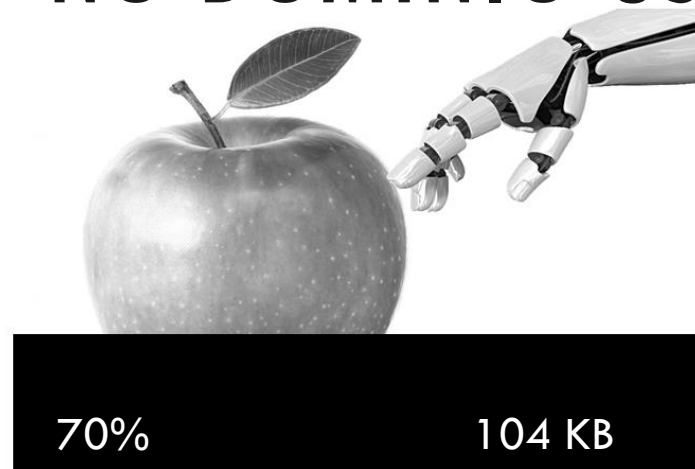
REPRESENTAÇÃO HIERÁRQUICA DA IMAGEM

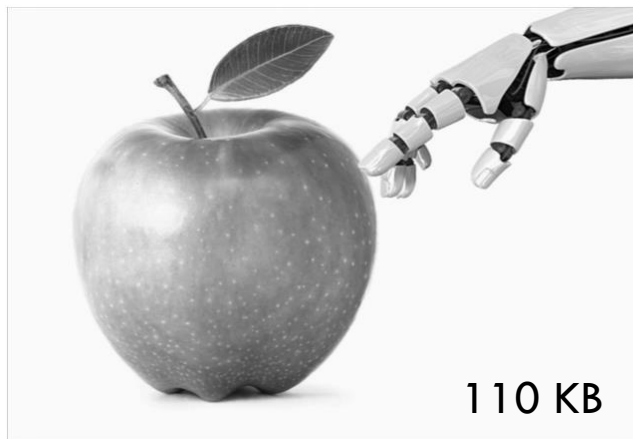
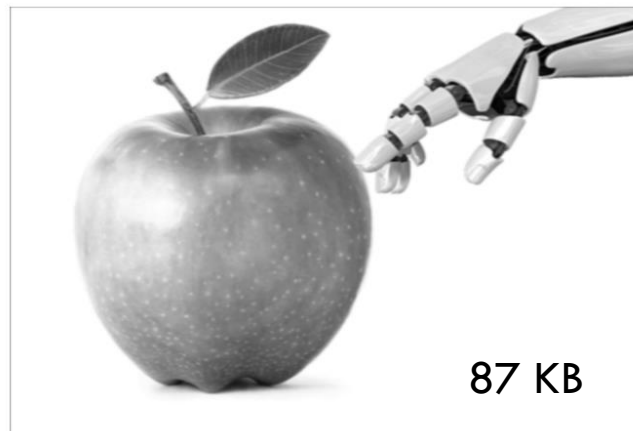
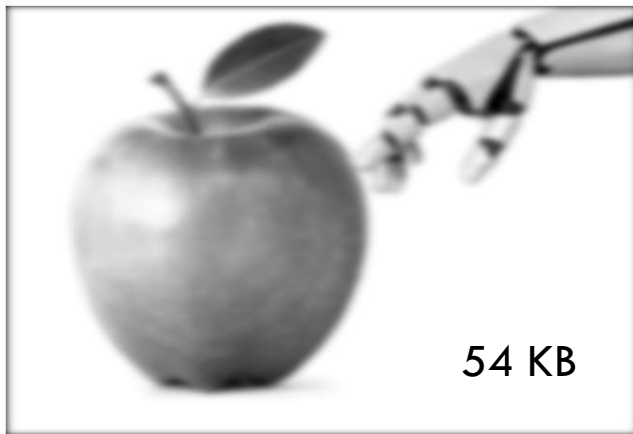


128 KB

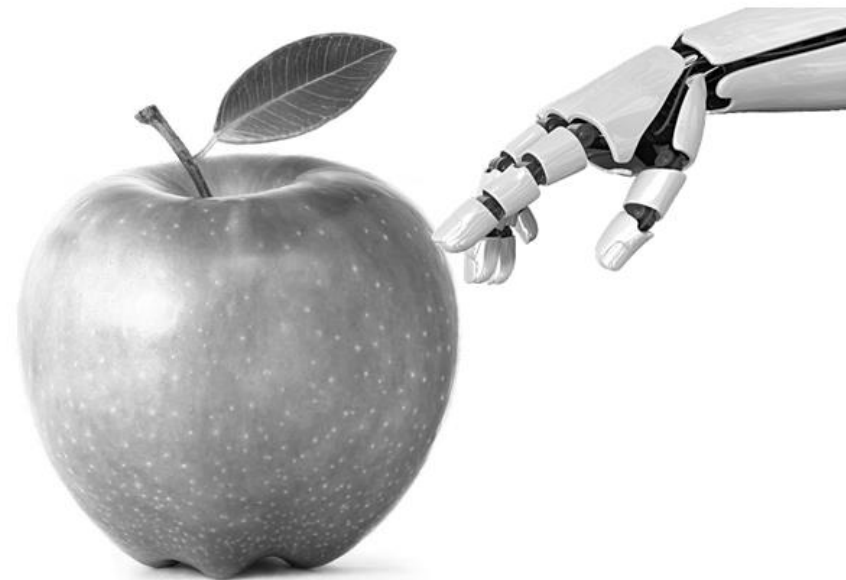


FILTRO NO DOMÍNIO USUAL

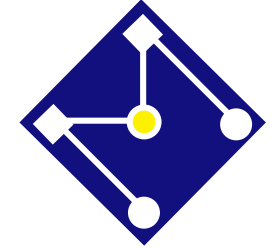


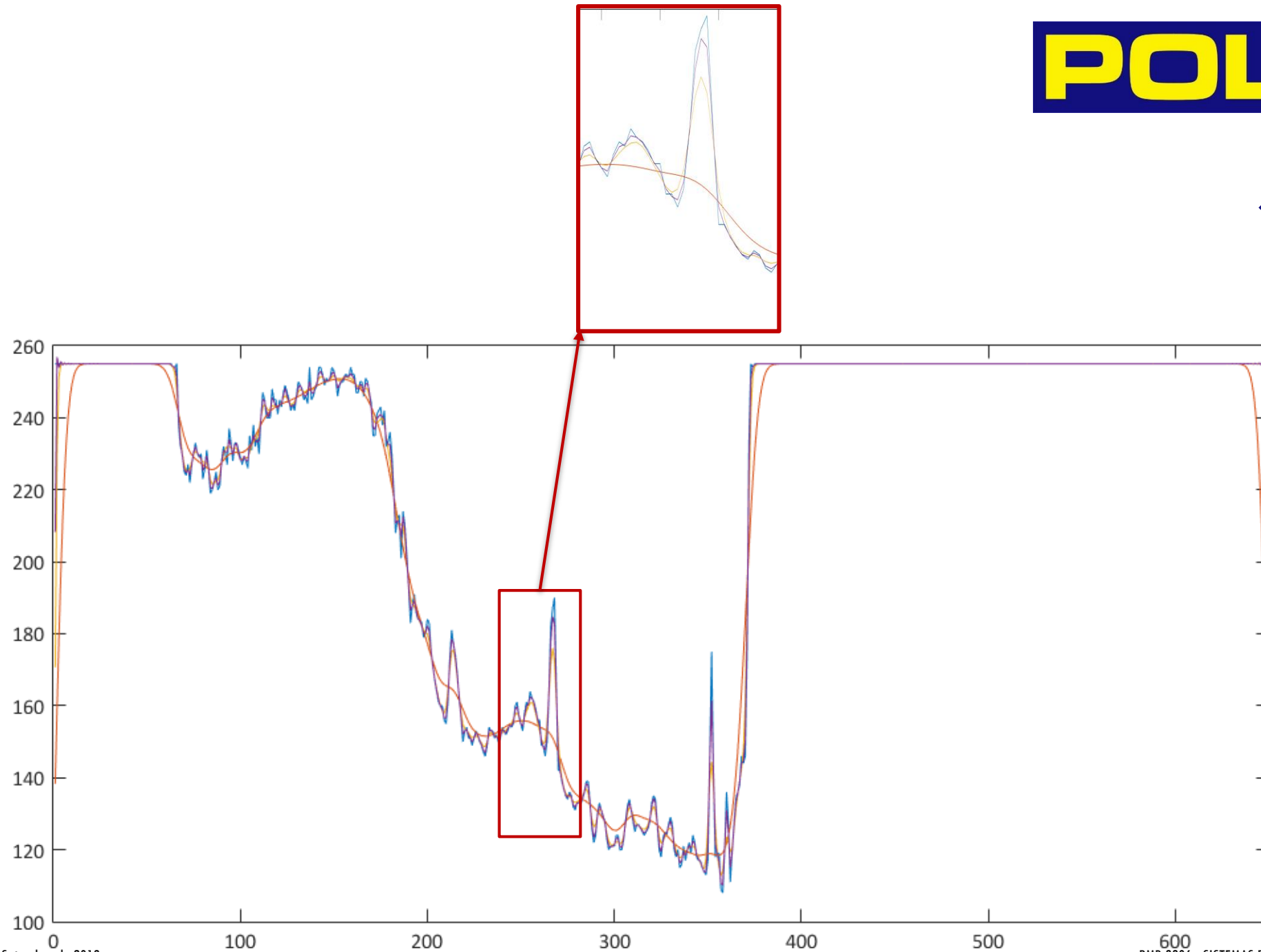
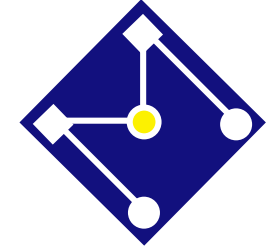


FILTRO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA



128 KB





```

%% Lowpass Frequency Domain Filters
% Lowpass filters:
% create a blurred (or smoothed) image
% attenuate the high frequencies and leave the low frequencies of the Fourier transform relatively unchanged

```

```

% Three main lowpass filters are discussed in Digital Image Processing Using MATLAB:

```

```

% ideal lowpass filter (ILPF)
% Butterworth lowpass filter (BLPF)
% Gaussian lowpass filter (GLPF)
close all
clear all

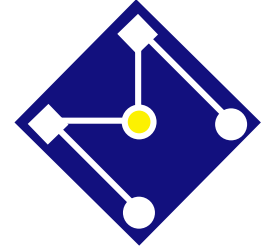
```

```

MyImage=imread('AppleRobot.png');
MyImage=MyImage(:,:,1); % Grab only the Red component to fake gray scaling
imshow(MyImage)
size(MyImage)
PQ = paddedsize(size(MyImage));
D0 = 0.4*PQ(1);
H = lpfilter('gaussian', PQ(1), PQ(2), D0); % Calculate the LPF
F=fft2(double(MyImage),size(H,1),size(H,2)); % Calculate the discrete Fourier transform of the image
LPF_MyImage=real(ifft2(H.*F)); % multiply the Fourier spectrum by the LPF and apply the inverse, discrete Fourier transform
LPF_MyImage=LPF_MyImage(1:size(MyImage,1), 1:size(MyImage,2)); % Resize the image to undo padding
figure, imshow(LPF_MyImage, [])
% Display the Fourier Spectrum
Fc=fftshift(F); % move the origin of the transform to the center of the frequency rectangle
S2=log(1+abs(Fc)); % use abs to compute the magnitude (handling imaginary) and use log to brighten display
figure, imshow(S2, [])
plot(MyImage(210,:),'Linewidth',1.0)
hold on
% plot(LPF_MyImage(210,:),'Linewidth',1.5)
% hold on

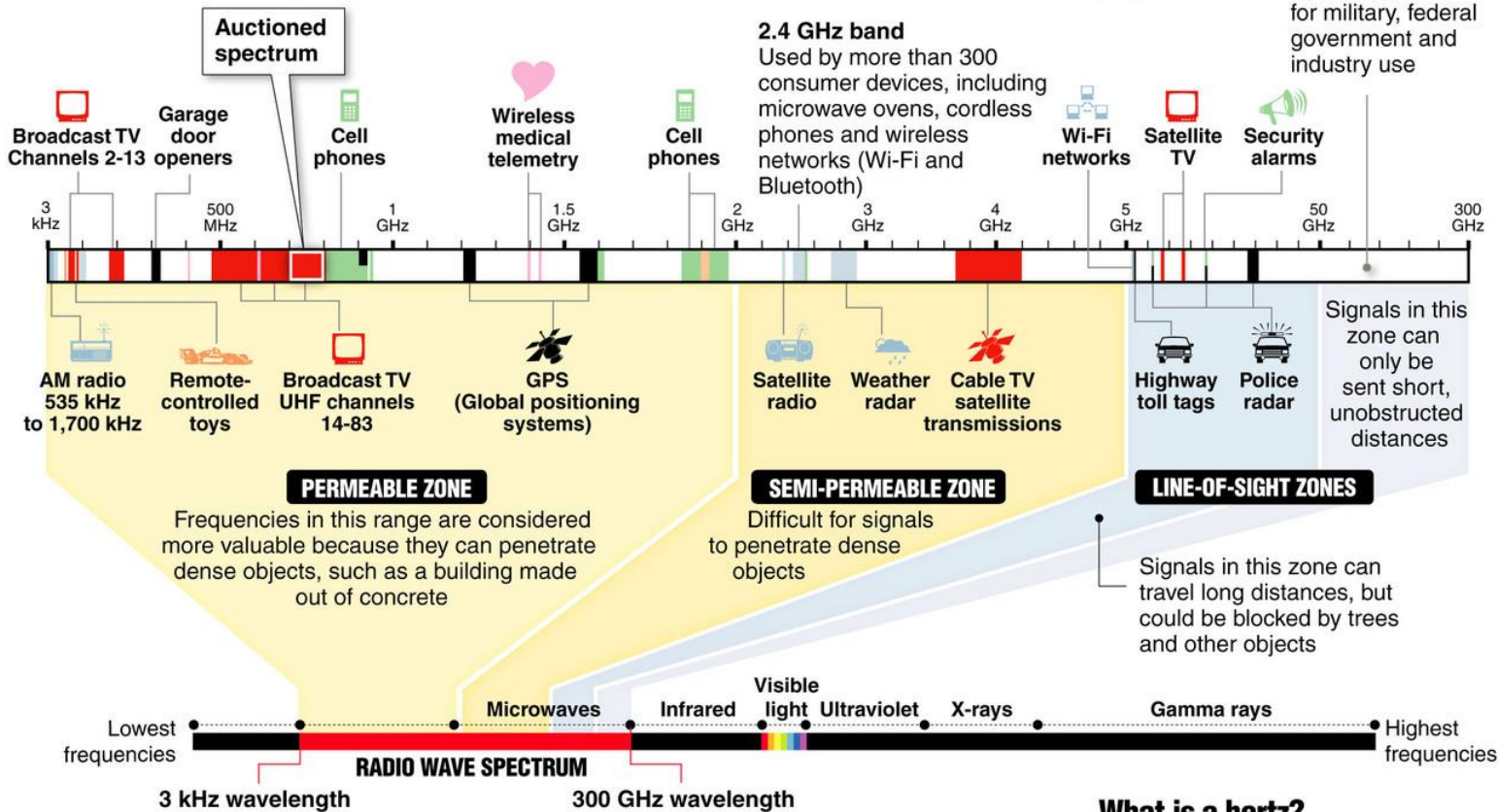
%% ***
D0 = 0.2*PQ(1);
H = lpfilter('gaussian', PQ(1), PQ(2), D0); % Calculate the LPF
F=fft2(double(MyImage),size(H,1),size(H,2)); % Calculate the discrete Fourier transform of the image
LPF_MyImage=real(ifft2(H.*F)); % multiply the Fourier spectrum by the LPF and apply the inverse, discrete Fourier transform
LPF_MyImage=LPF_MyImage(1:size(MyImage,1), 1:size(MyImage,2)); % Resize the image to undo padding
plot(LPF_MyImage(210,:),'Linewidth',2.0)
hold on
%
D0 = 0.4*PQ(1);
H = lpfilter('gaussian', PQ(1), PQ(2), D0); % Calculate the LPF
F=fft2(double(MyImage),size(H,1),size(H,2)); % Calculate the discrete Fourier transform of the image
LPF_MyImage=real(ifft2(H.*F)); % multiply the Fourier spectrum by the LPF and apply the inverse, discrete Fourier transform
LPF_MyImage=LPF_MyImage(1:size(MyImage,1), 1:size(MyImage,2)); % Resize the image to undo padding
plot(LPF_MyImage(210,:),'Linewidth',2.5)
hold on

```



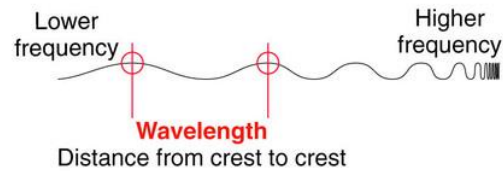
Inside the radio wave spectrum

Almost every wireless technology – from cell phones to garage door openers – uses radio waves to communicate. Some services, such as TV and radio broadcasts, have exclusive use of their frequency within a geographic area. But many devices share frequencies, which can cause interference. Examples of radio waves used by everyday devices:



The electromagnetic spectrum

Radio waves occupy part of the electromagnetic spectrum, a range of electric and magnetic waves of different lengths that travel at the speed of light; other parts of the spectrum include visible light and x-rays; the shortest wavelengths have the highest frequency, measured in hertz



What is a hertz?

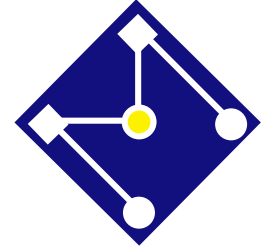
One hertz is one cycle per second. For radio waves, a cycle is the distance from wave crest to crest

1 kilohertz (kHz) = 1,000 hertz
1 megahertz (MHz) = 1 million hertz
1 gigahertz (GHz) = 1 billion hertz

Source: New America Foundation, MCT, Howstuffworks.com
Graphic: Nathaniel Levine, Sacramento Bee

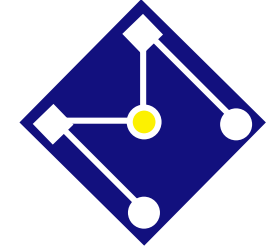
© 2008 MCT

<http://theconversation.com/wireless-spectrum-is-for-sale-but-what-is-it-11794>



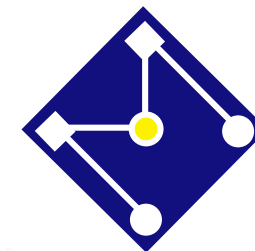
The colors of the visible light spectrum

colour	wavelength interval	frequency interval
red	~ 625–740 nm	~ 480–405 THz
orange	~ 590–625 nm	~ 510–480 THz
yellow	~ 565–590 nm	~ 530–510 THz
green	~ 500–565 nm	~ 600–530 THz
cyan	~ 485–500 nm	~ 620–600 THz
blue	~ 440–485 nm	~ 680–620 THz
violet	~ 380–440 nm	~ 790–680 THz



DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

- A Análise de Fourier (AF) de uma transmissão de rádio FM de uma estação que emite a 101 MHz concentrará praticamente toda energia em torno de $2\pi \cdot 101 \text{ Mrad/s}$; a AF com o sinal de tensão proveniente da rede elétrica terá a energia é distribuída como um pico em torno de 50 Hz ou 60 Hz.
- Se houverem 2 ou mais estações de rádio emitindo à mesma frequência e com potência semelhante, elas estão interferindo umas com as outras e você provavelmente não poderá ouvi-las.
- Se houverem vários sinais no domínio do tempo compartilhando o mesmo canal de comunicação (atmosfera, cabos de cobre ou fibra de vidro...) simultaneamente, e cada um deles ocupa um intervalo de frequência que não se sobrepõe aos usados pelos outros sinais, pode-se recuperar e decodificar todos os vários sinais.
- A luz branca visível é uma soma de luzes de 7 cores diferentes, as cores do arco-íris. Quando você passa a luz branca através de um prisma de vidro, decompõe a luz branca nas sete “frequências” f , ou sete comprimentos de onda λ , relacionados por $\lambda = cf$, onde c é a velocidade da luz no vácuo. Em outras palavras, a luz branca é uma TF com energia disposta no intervalo de comprimento de onda entre 380 nm e 760 nm (ou intervalo de frequência na faixa de 400 a 790 teraHertz).
- A cromatografia é, em termos gerais, a análise de espectros de luz. Por exemplo, a busca por planetas extraterrestres adequados para sustentar vida semelhante à Terra examina como os espectros da estrela são modelados quando a luz passa através da atmosfera (se houver ...) frente da estrela.
- Uma imagem é compactada no formato de imagem .jpg (ou "jpeg") da seguinte maneira: (a) 2D DCT (Discrete Cosine Transform, que é um "primo" da DFT) é realizada na imagem. (b) um limite de qualidade de imagem é definido pelo usuário e os coeficientes DFT (ou "picos de frequência") menores que o limite são zerados; (c) o programa usado para ler o arquivo e exibir a imagem executa o DCT inverso para recuperar a imagem compactada.

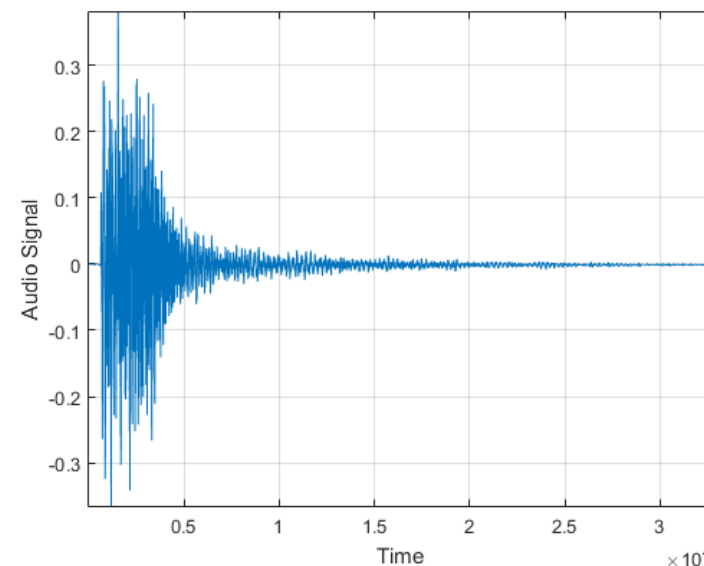
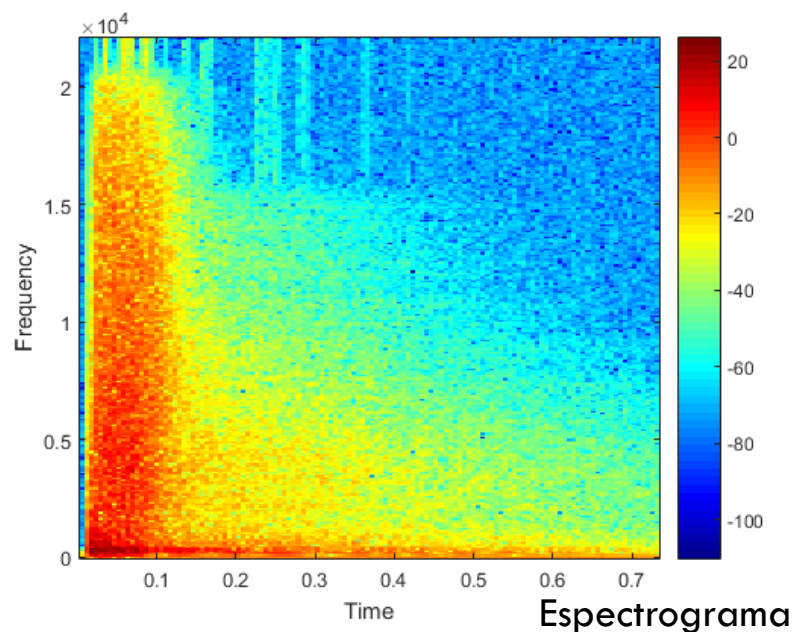


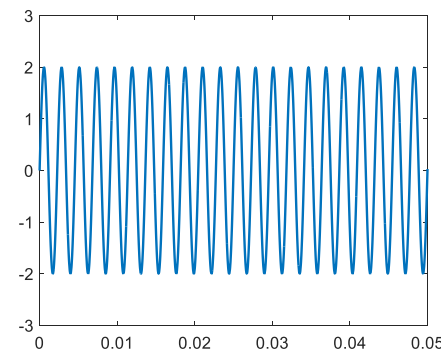
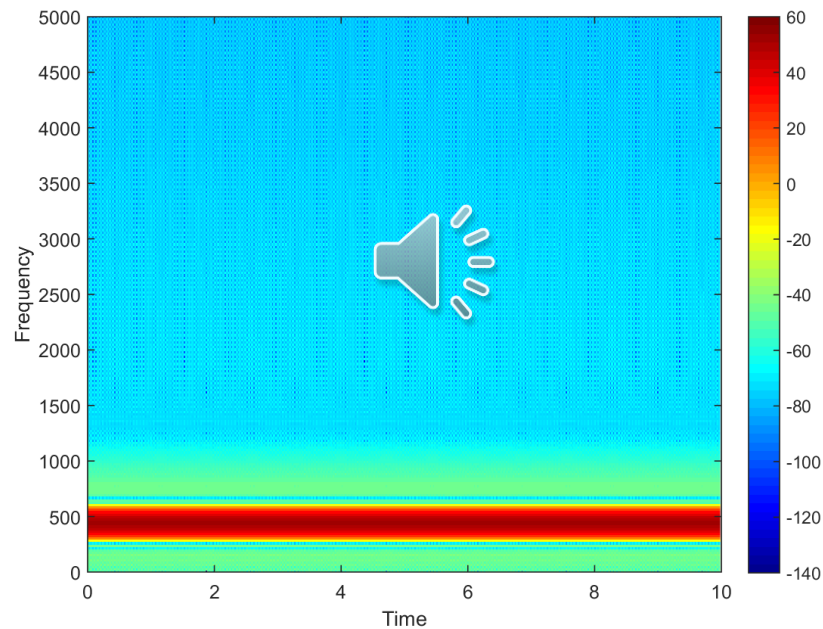
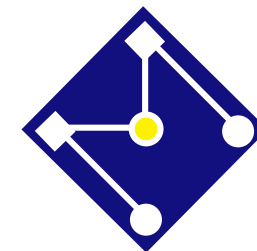
MÚSICA

Em quais características de uma música tocada em um piano você está mais interessado??? Tempo de duração de uma nota ou no que faz a nota soar daquela maneira ??? O tempo dita **quando** você ouve alguma coisa, mas a frequência dita **o que** você ouve!!!!



Tarola

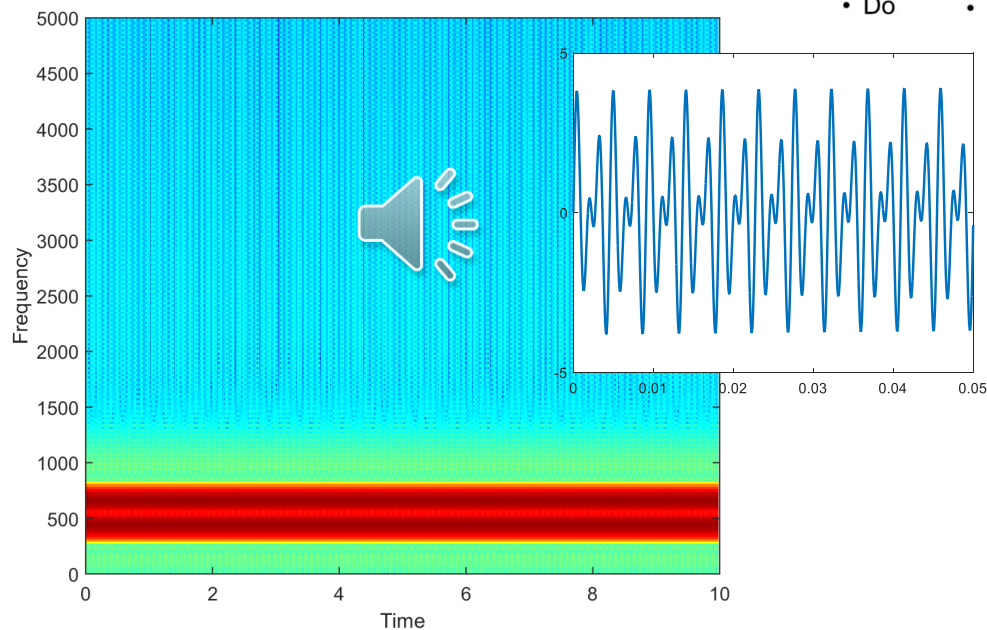
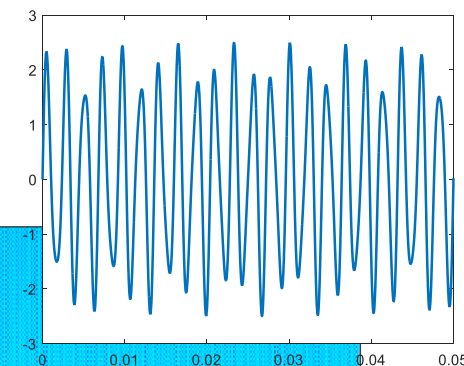




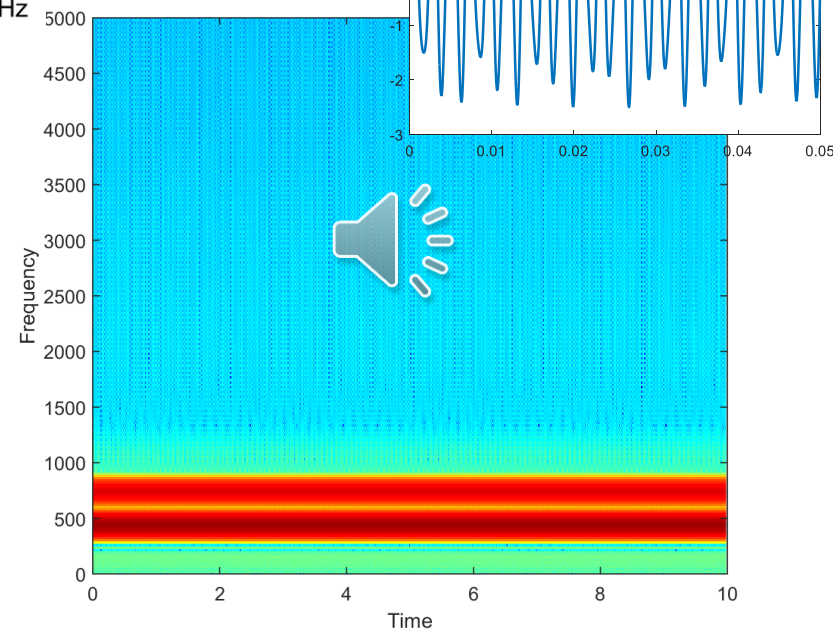
$$x(t) = 2 \sin 2\pi 440t$$

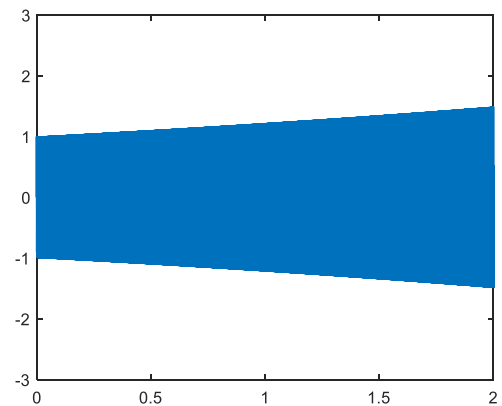
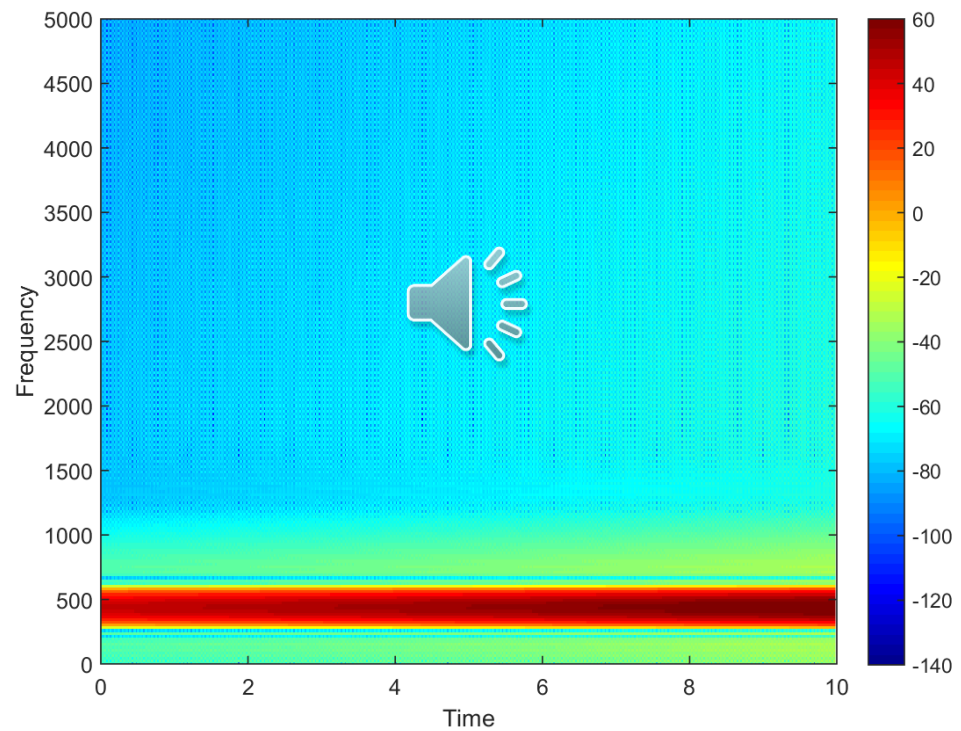
- Do • 262 Hz
- Re • 294 Hz
- Mi • 330 Hz
- Fa • 349 Hz
- Sol (So) • 392 Hz
- **La • 440 Hz**
- Si (Ti) • 494 Hz
- Do • 523 Hz

$$x(t) = 2 \sin 2\pi 440t + 0.5 \sin 2\pi 739.9t$$

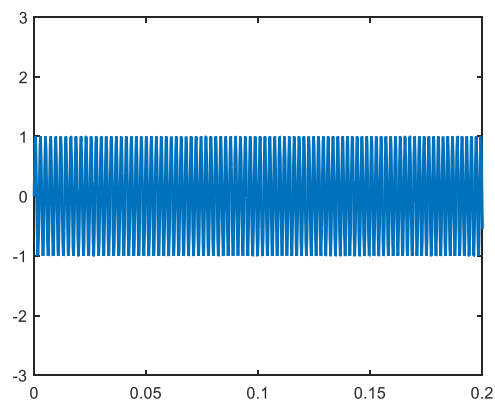


$$x(t) = 2(\sin 2\pi 440t + \sin 2\pi 739.9t)$$

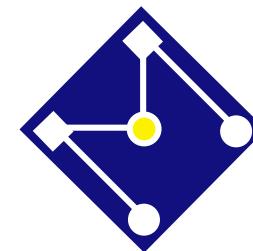
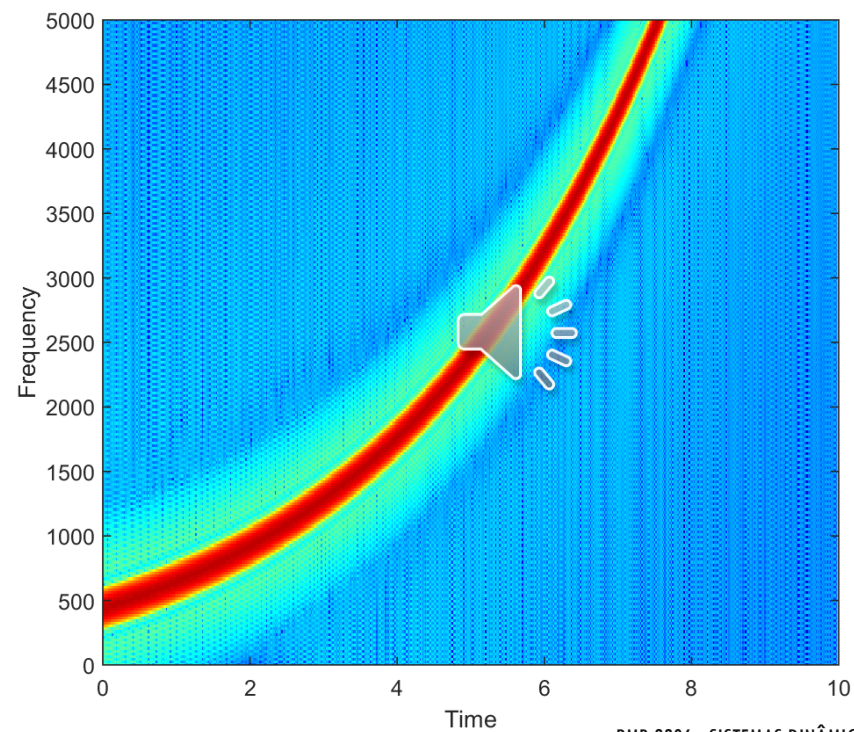


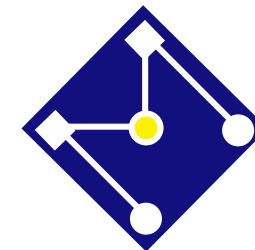


$$x(t) = 2 e^{0.2t} \sin 2\pi 440t$$



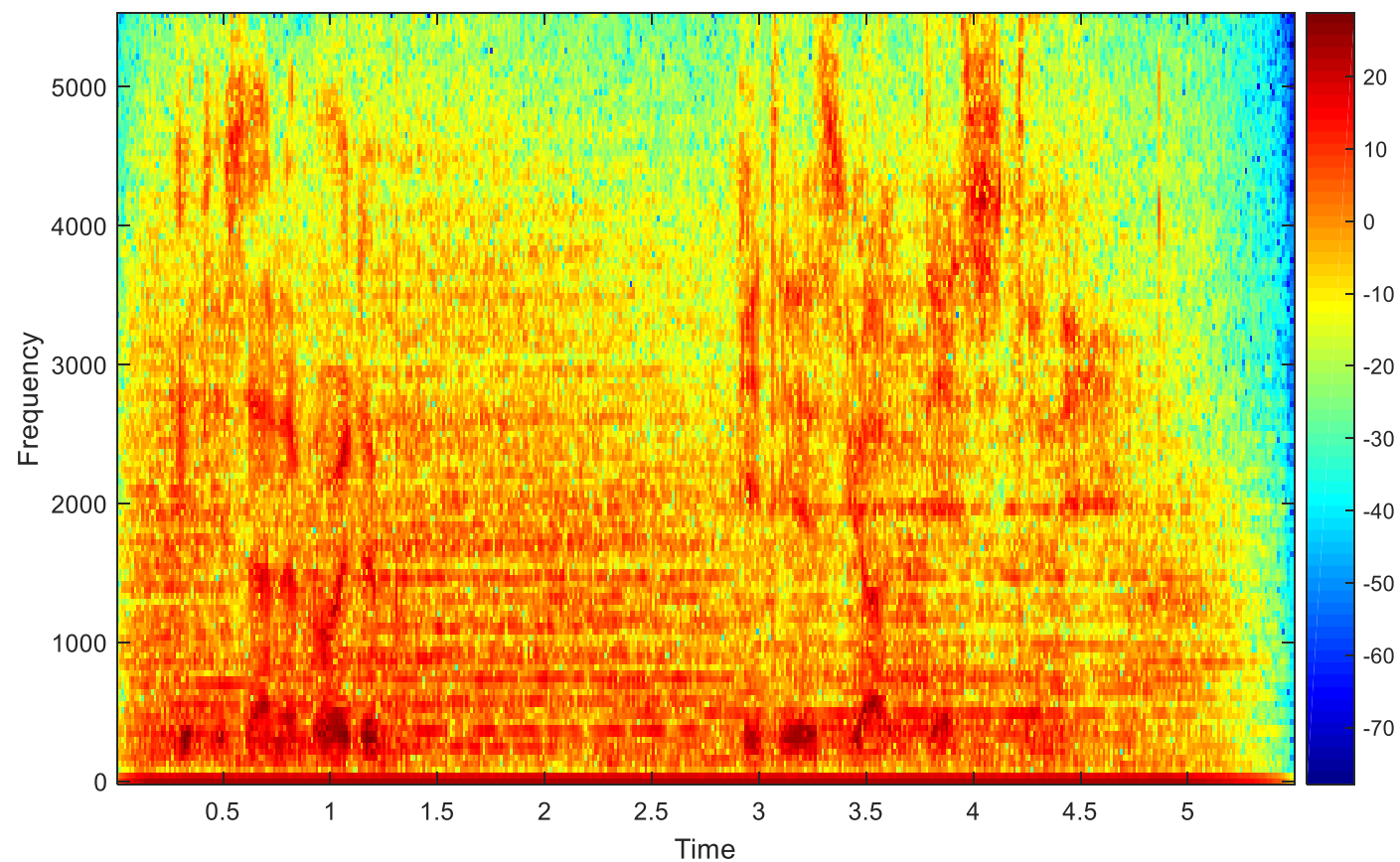
$$x(t) = 2 \sin 2\pi 440t e^{0.2t}$$





Return of the Jedi

Ian McDiarmid as the Emperor: "It is unavoidable... It is your destiny."



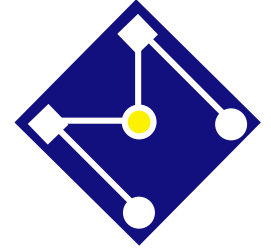
```
%% Spectrogram:  
% Return of the Jedi  
% Ian McDiarmid as the Emperor:  
%'It is unavoidable... It is your destiny.'
```

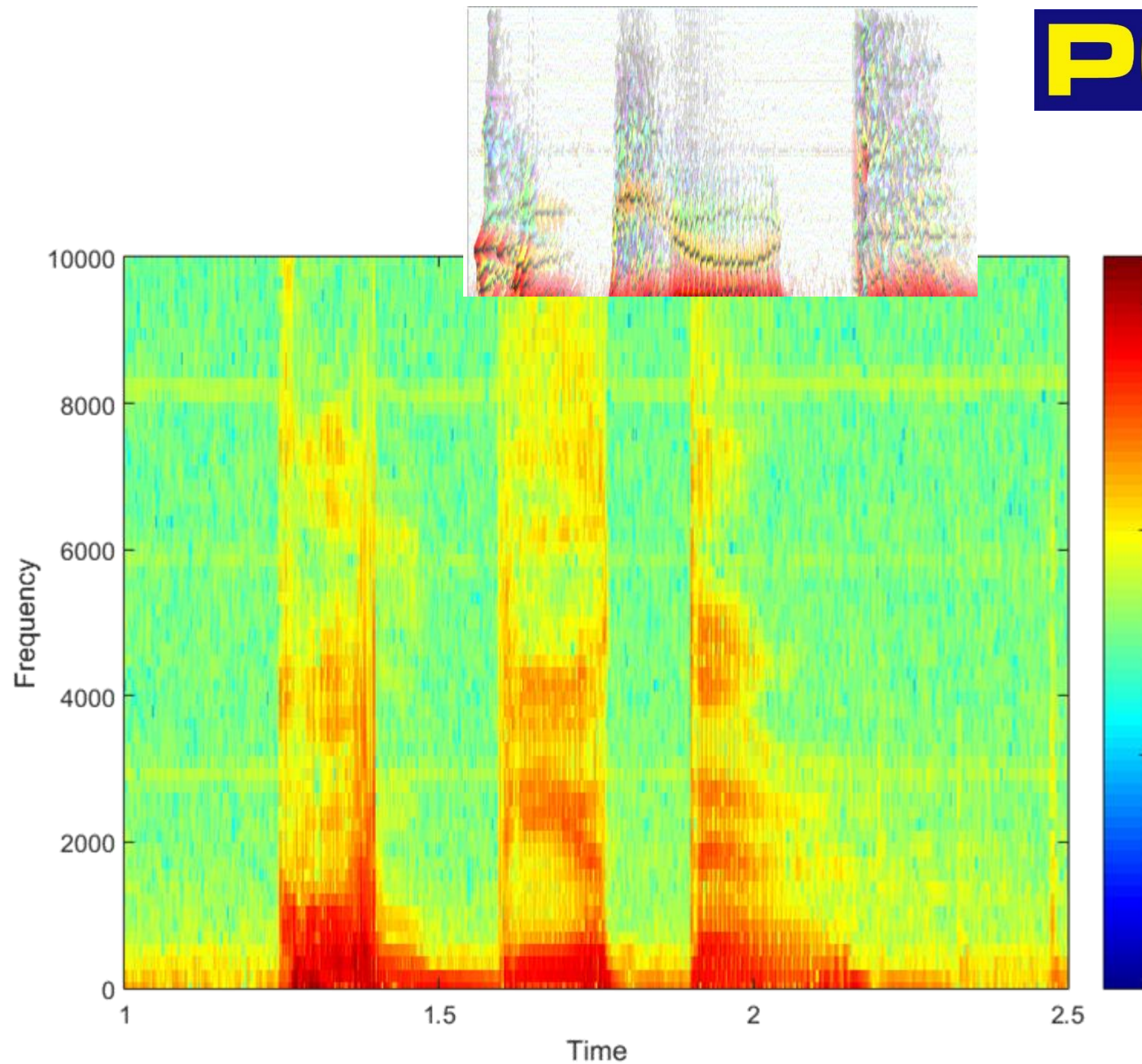
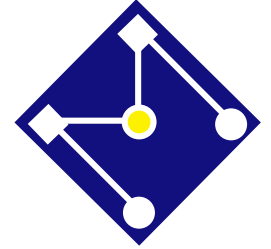
```
clear all; close all; clc  
%
```

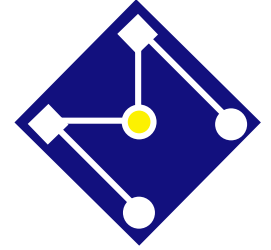
```
[y,Fs] = audioread('destiny.wav');  
sound(y,Fs);  
N=100;  
t=linspace(0,N/Fs,size(y,1));
```

```
figure;  
specgram(y,[],Fs);  
h = colorbar;  
set(gca,'FontSize',12)  
saveas(gcf,'Destiny.png')
```

```
figure;  
set(gca,'FontSize',14)  
plot(t,y,'LineWidth',2)
```

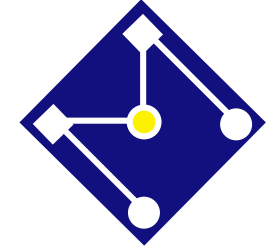






DOMÍNIOS E TRANSFORMAÇÕES

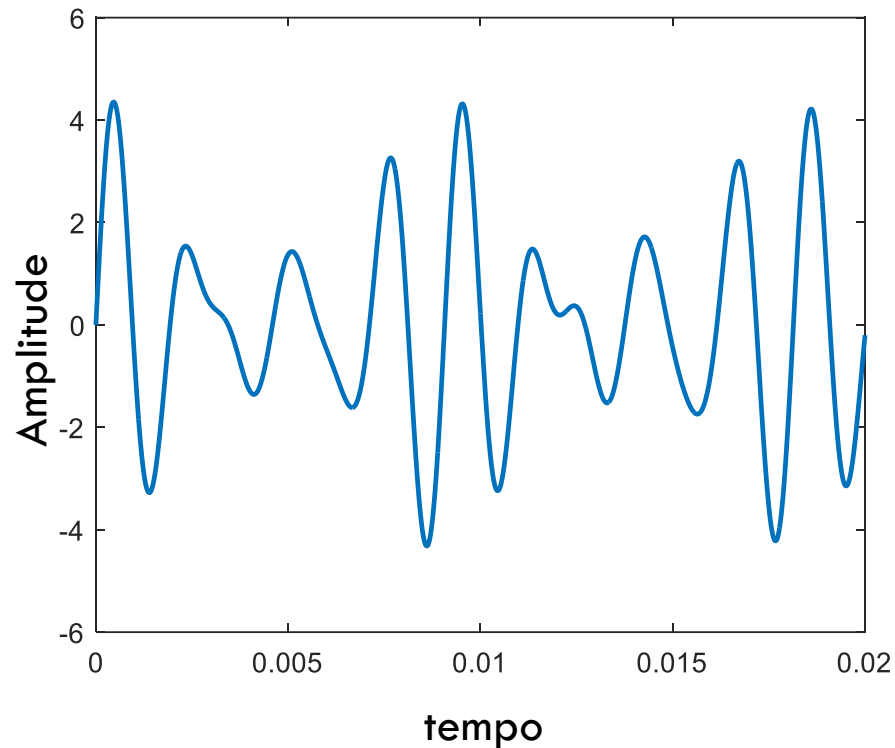
- **Domínio do tempo e domínio da frequência são duas maneiras de olhar para o mesmo sistema dinâmico.**
- Eles são permutáveis entre si, isto é, nenhuma informação é perdida na mudança de um domínio para outro.
- **São pontos de vista complementares.** Isso leva a uma compreensão completa e clara do comportamento de um sistema dinâmico de engenharia.
- Descrevemos o que acontece no **domínio do tempo** como **temporal** e no **domínio da frequência** como **espectral**.



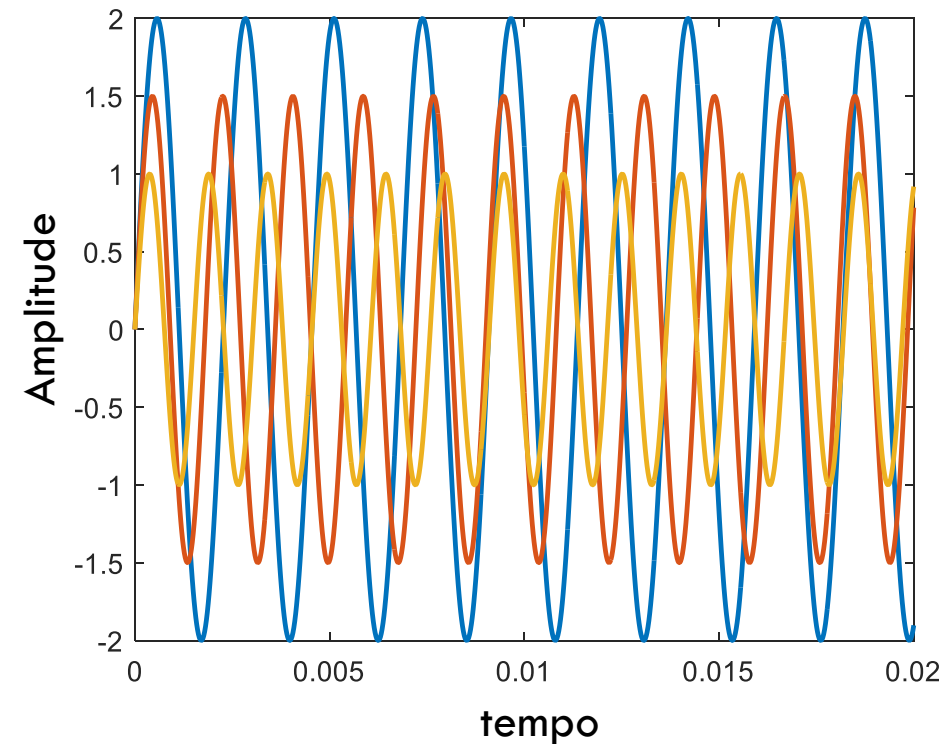
DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

OUTRA FORMA DE OLHAR O SINAL

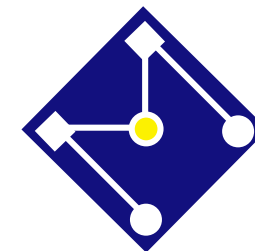
Sinal do Mundo real



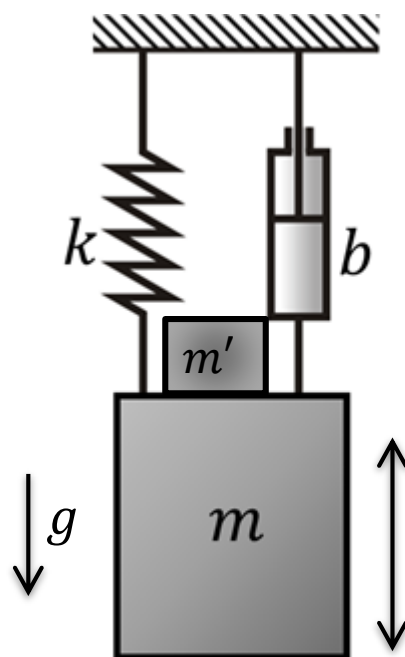
Sinal do Mundo real = Soma de três sinais



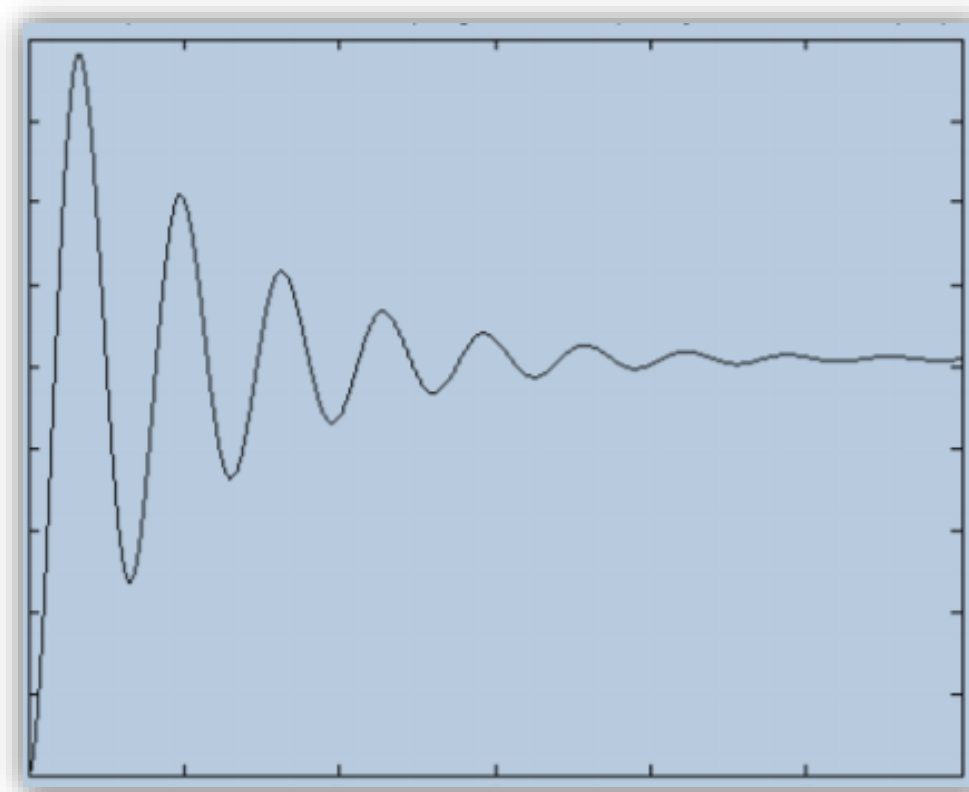
$$x(t) = 2 \sin 2\pi 440t + 1.5 \sin 2\pi 554.37t + 1.5 \sin 2\pi 659.26t$$



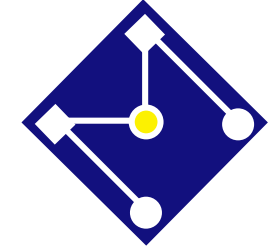
DOMÍNIO DO TEMPO



deslocamento da massa $m + m'$

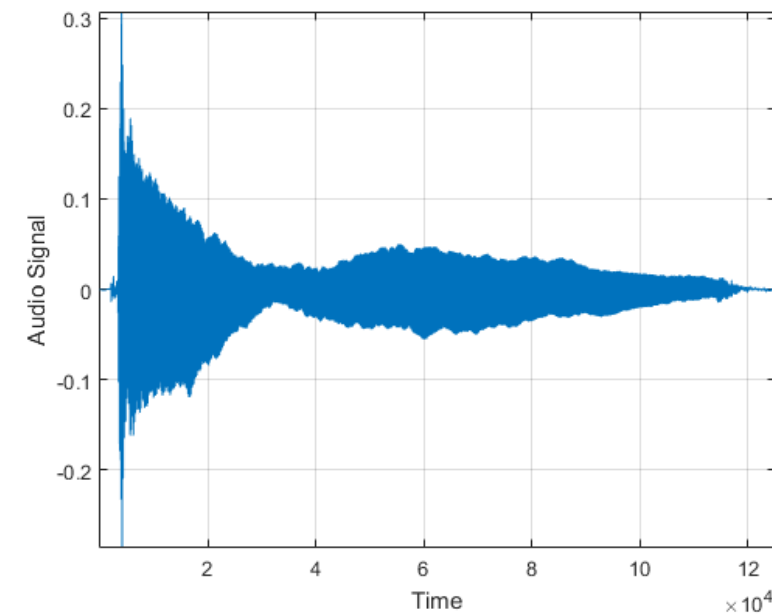
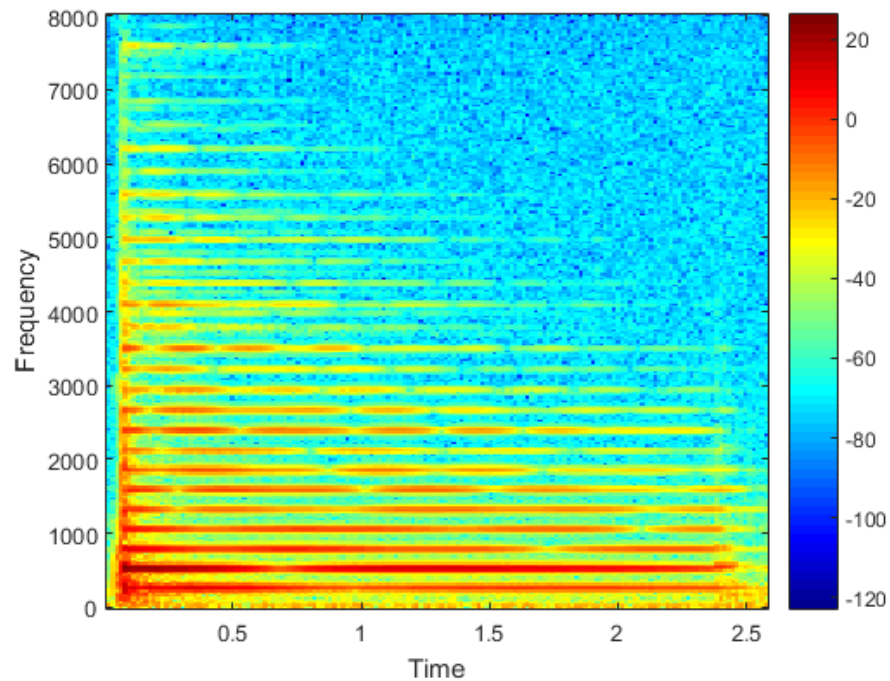


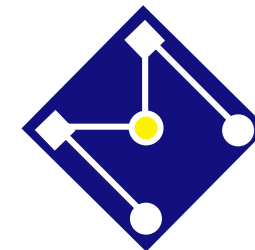
tempo



DÓ MÉDIO NO PIANO

Frequência fundamental: 262 Hz



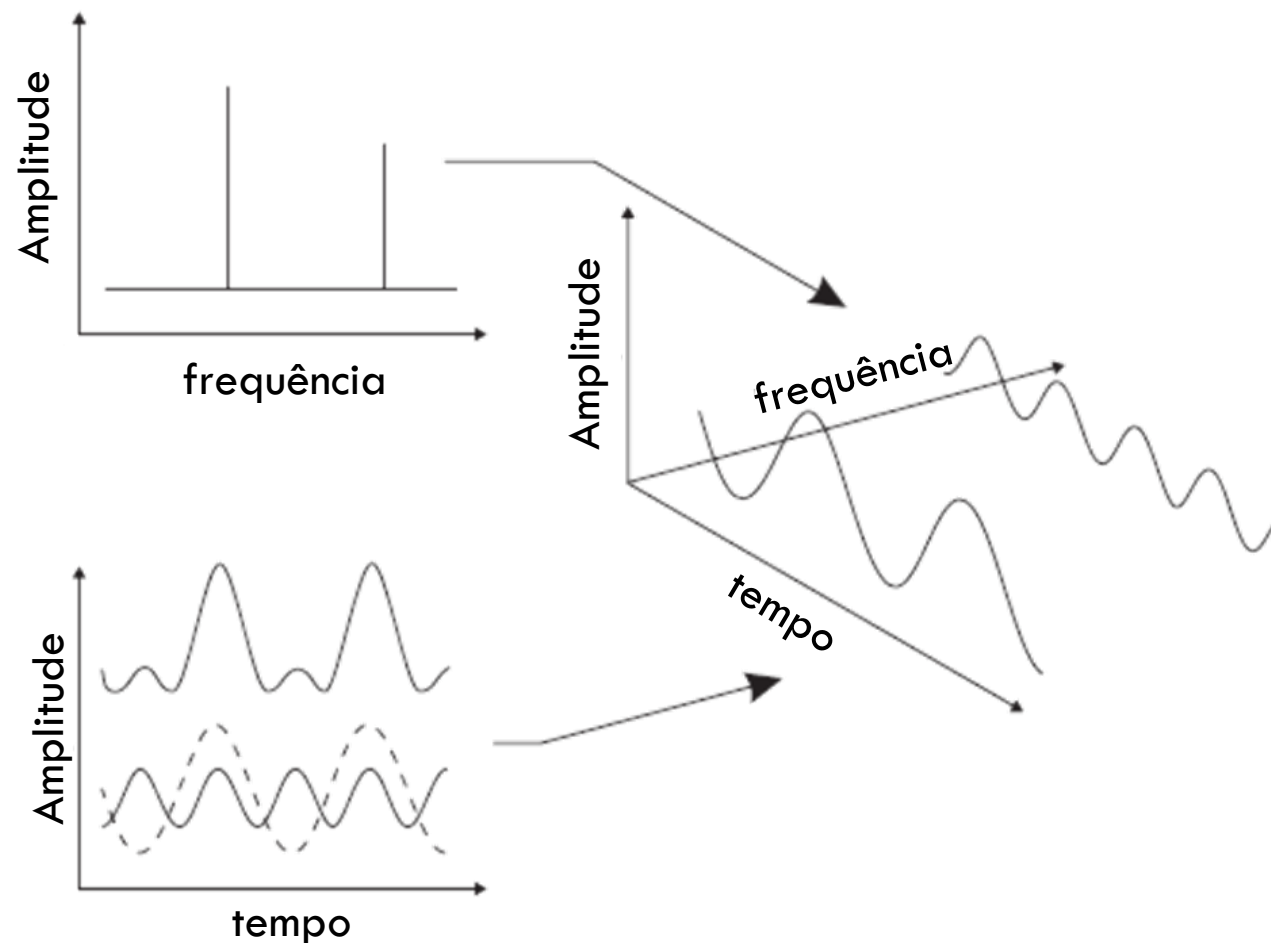


ANÁLISE E SÍNTESE DE UM SINAL

Domínio da frequência

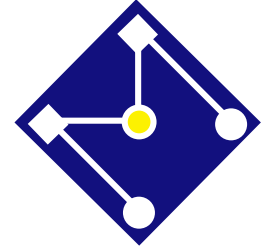


Domínio do tempo



MUDANÇA DE DOMÍNIO

Como passar do domínio do tempo para frequência e vice versa???



JEAN BAPTISTE JOSEPH FOURIER

FRANCÊS, 1768-1830

Apresentou um artigo em 1807 ao Instituto de França, com uma ideia maluca:

Qualquer função periódica pode ser reescrita como uma soma ponderada de senos e cossenos de diferentes frequências.

Entre os revisores do artigo tinha dos matemáticos famosos: **Joseph Louis Lagrange** e **Pierre Simon de Laplace**

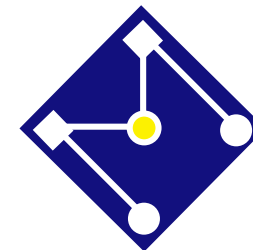
Laplace e outros revisores votaram para publicar o artigo, mas Lagrange foi contra.

–Lagrange insistia que essa abordagem não pode ser utilizado para representar sinais com *quinas* (ondas quadradas)

–Somente baseado no parecer do Lagrange, o Instituto de França rejeitou o artigo.

–O artigo foi publicado depois da morte do Lagrange





SÉRIE DE FOURIER



- Uma **função periódica** $x(t)$ que satisfaça as **condições de Dirichlet** pode ser expressa como uma série de Fourier, com termos seno e cosseno harmonicamente relacionados,

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad \omega_0 = 2\pi/T$$

equação de síntese

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_T x(t) dt, \quad \text{média do sinal num período, i.e., termo DC ou componente de frequência zero}$$

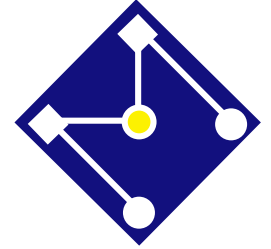
equações de análise

$$a_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cos n\omega_0 t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \sin n\omega_0 t dt$$

$n = 1, 2, \dots$

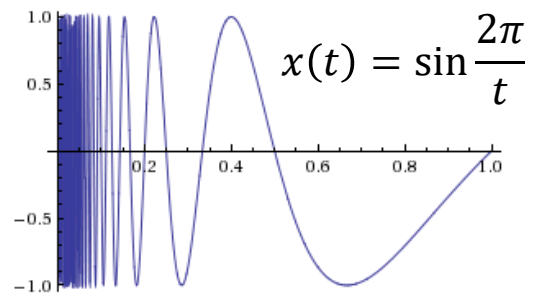
formam uma base ortogonal do espaço de sinais.



CONDIÇÕES DE DIRICHLET

Em um intervalo periódico:

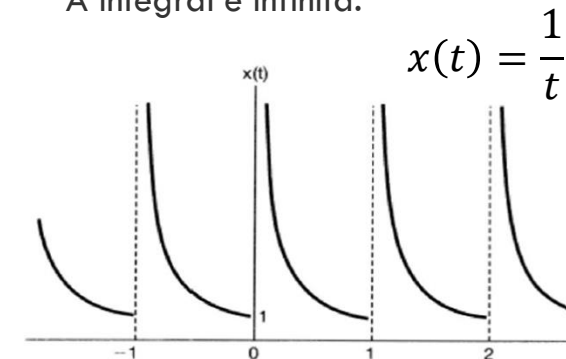
- 1) O sinal deve ser absolutamente integrável:
 $\int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)| dt$ não tendem ao infinito.
- 2) $x(t)$ deve ter um número finito de descontinuidades;
- 3) $x(t)$ deve ter um número finito de máximos e mínimos.



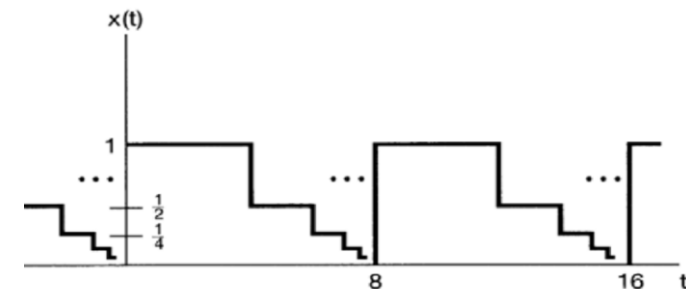
Não atende ao item 3:
 nesse intervalo a função varia entre infinitos valores de máximo e mínimo e não há como representar tal função usando os coeficientes da série de Fourier.

Não atende ao item 1:

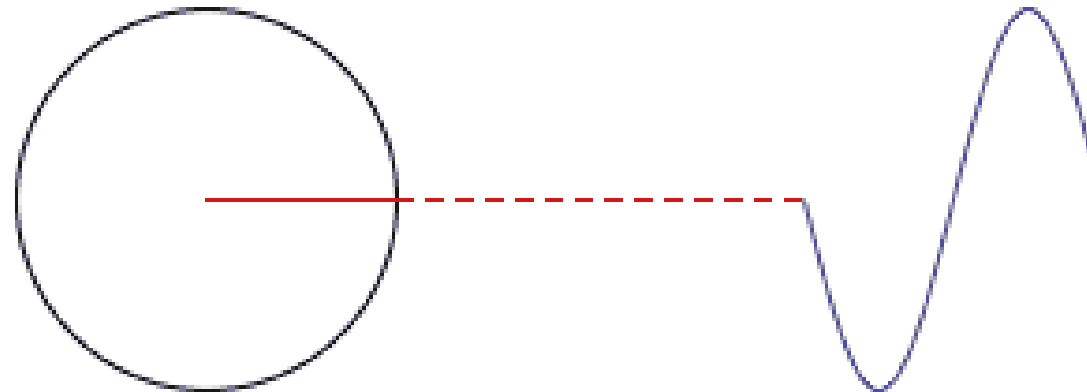
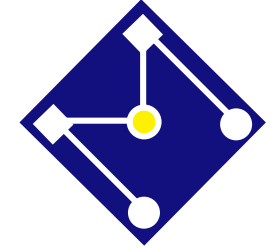
A integral é infinita.



Não atende ao item 2:

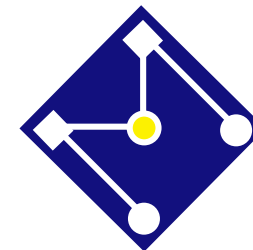


TF pode ser vista como um conjunto de círculos de tamanhos diferentes, cada um centrado na extremidade de um círculo maior. Quando os círculos giram, os grandes círculos girando os menores ao seu redor, e os menores girando mais rápido do que os grandes. Se você rastrear o movimento de um ponto sobre o círculo menor, é possível reconstruir uma onda de qualquer forma. A TF diz como construir a onda: raio dos círculos, movendo-se a quais velocidades.



Para brincar:

<http://toxicdump.org/stuff/FourierToy.swf>



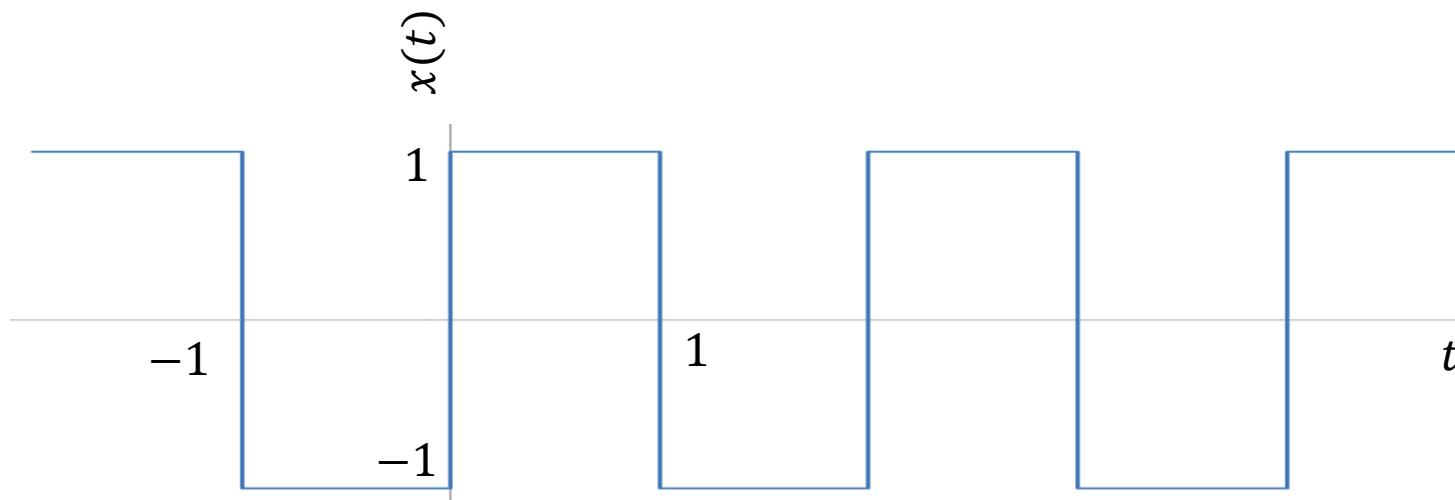
EXEMPLO: ONDA QUADRADA

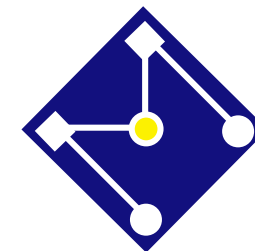
- $x(t) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 < t < 0 \\ 1 & \text{se } 0 < t < 1 \end{cases}$

- $x(t + nT) = x(t)$, n inteiro

Período $T = 2s$

- $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$





SOLUÇÃO ONDA QUADRADA

ANÁLISE



$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

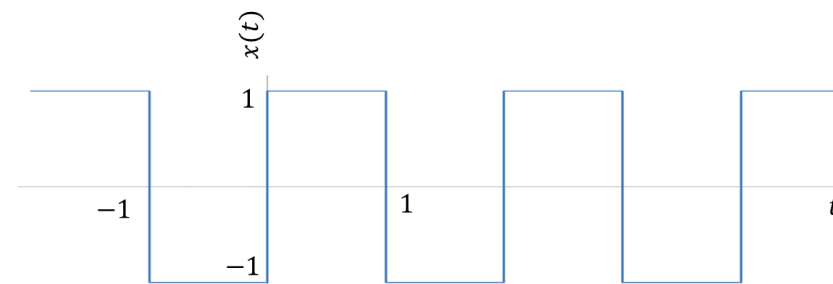
$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos n\omega_0 t dt$$

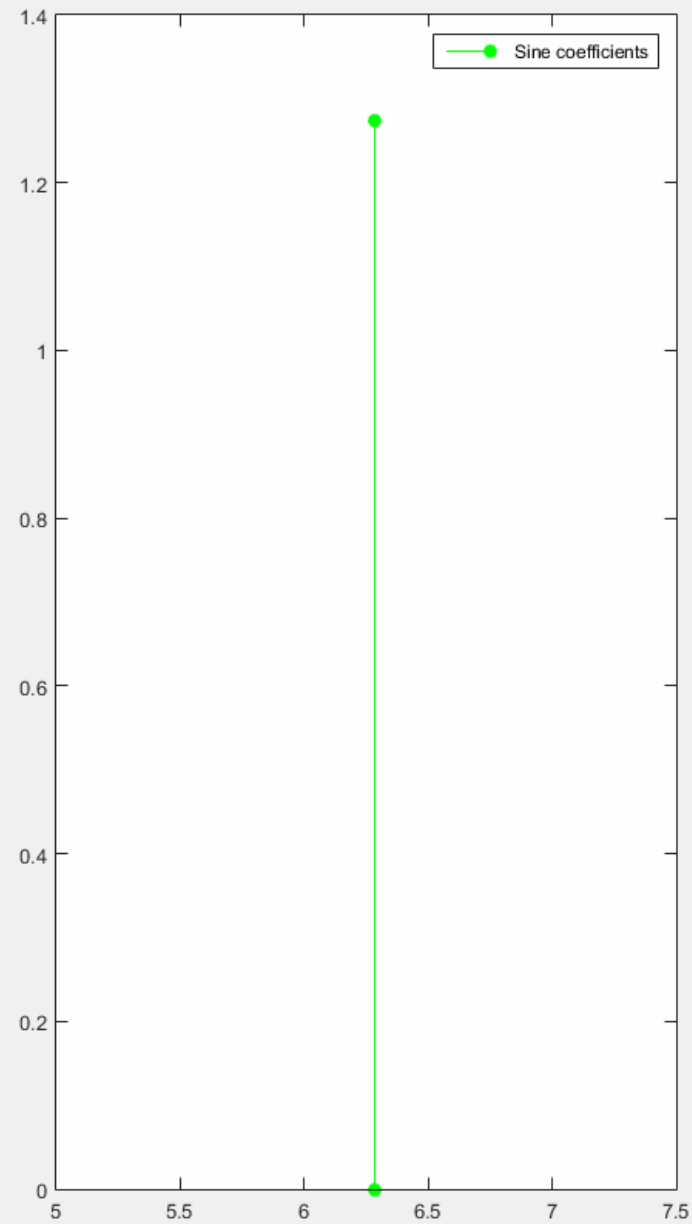
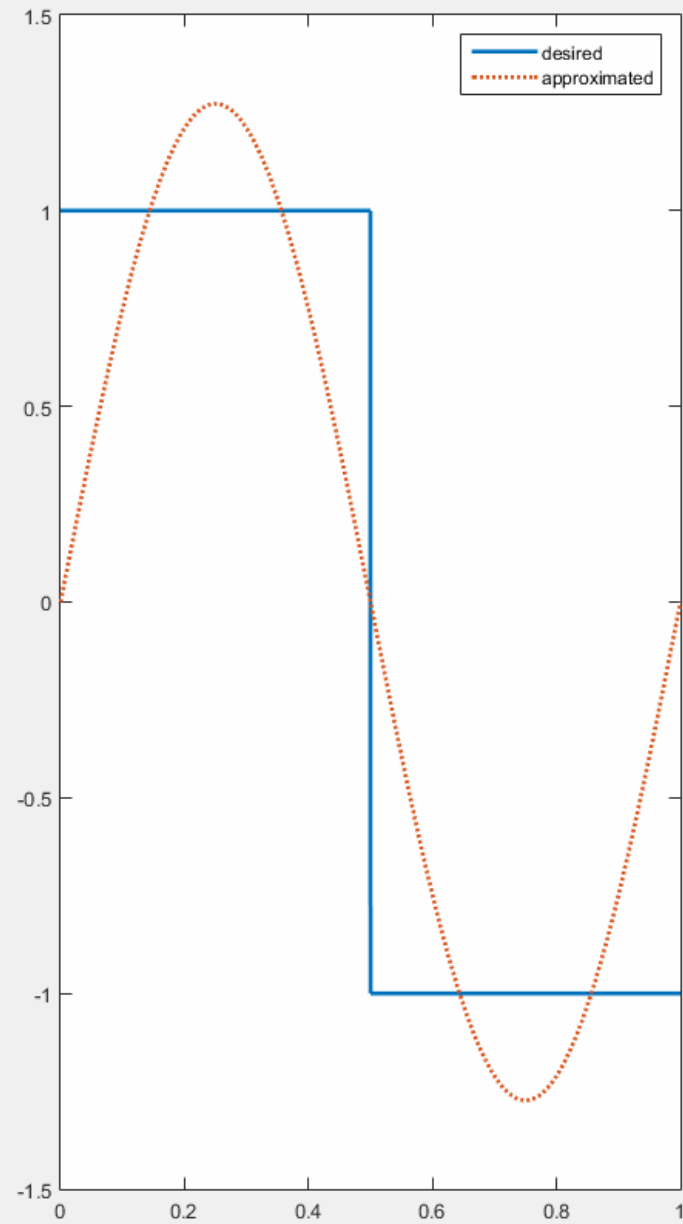
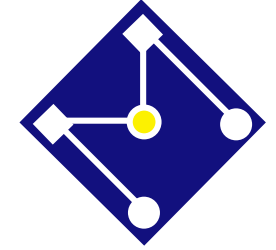
$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin n\omega_0 t dt$$

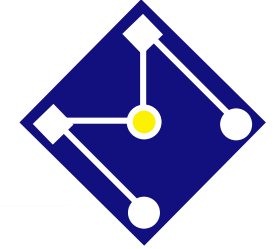
$$a_n = 0$$

Sem fazer contas, esta parte da solução pode ser eliminada, pois trata-se de uma função ímpar,

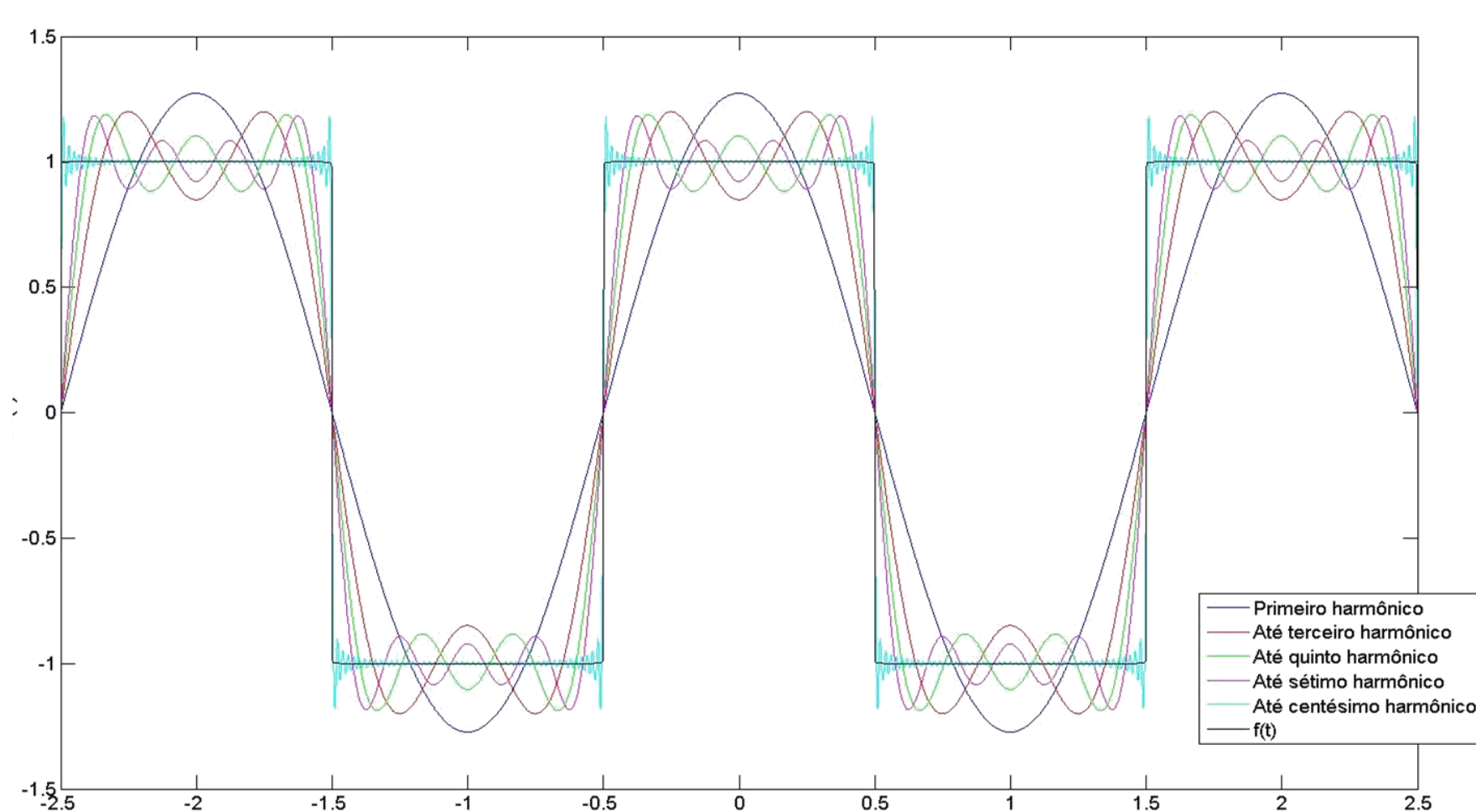


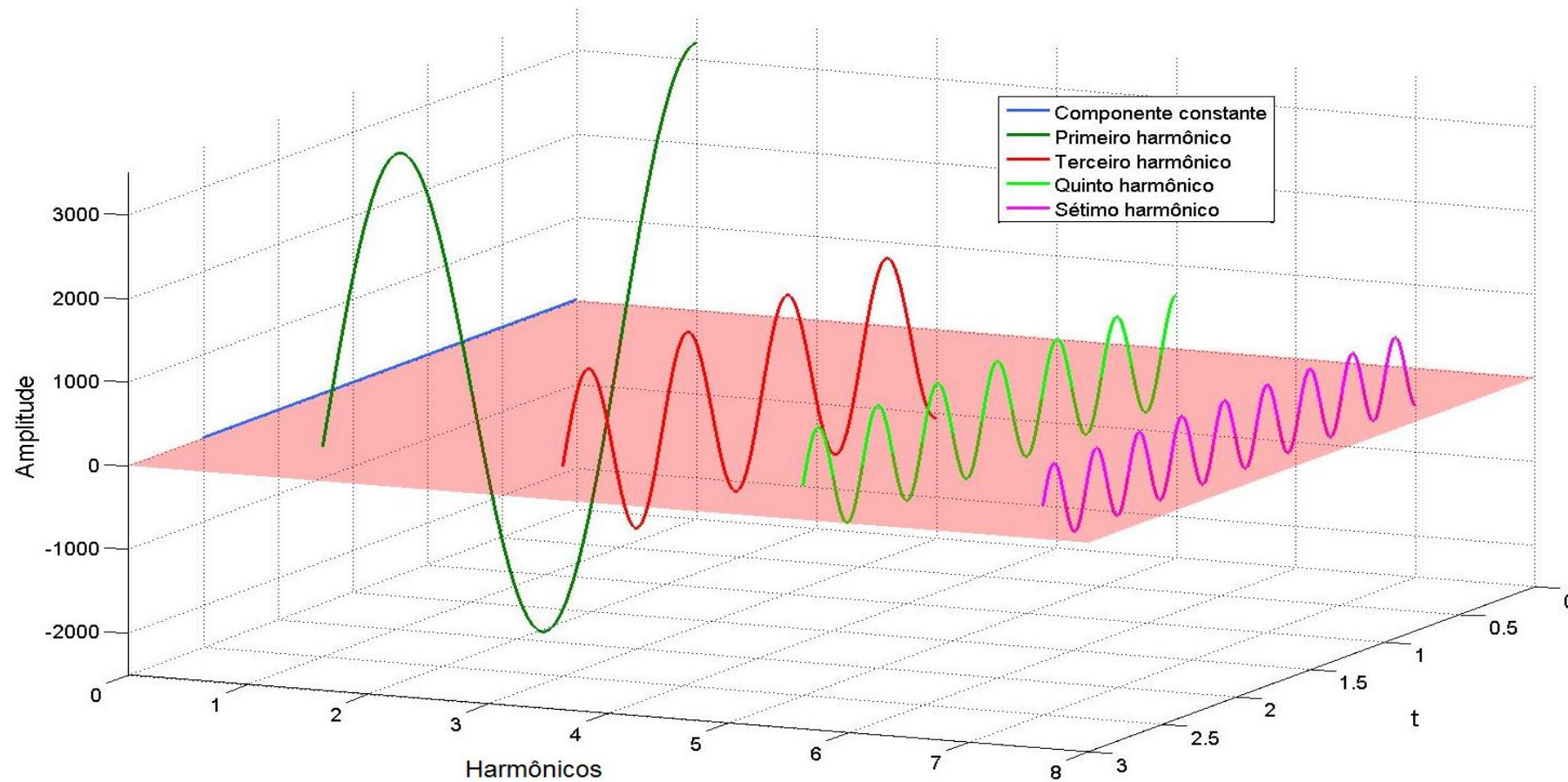
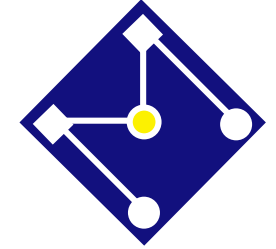
$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi t \quad \text{com} \quad b_n = \begin{cases} \frac{4}{n\pi}, & n \text{ ímpar} \\ 0, & n \text{ par} \end{cases}$$

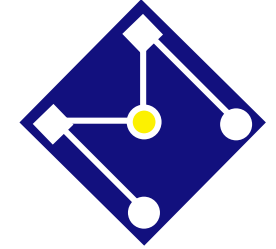




Obviamente, na prática, não é possível trabalhar com infinitas parcelas e um número finito deve ser empregado...

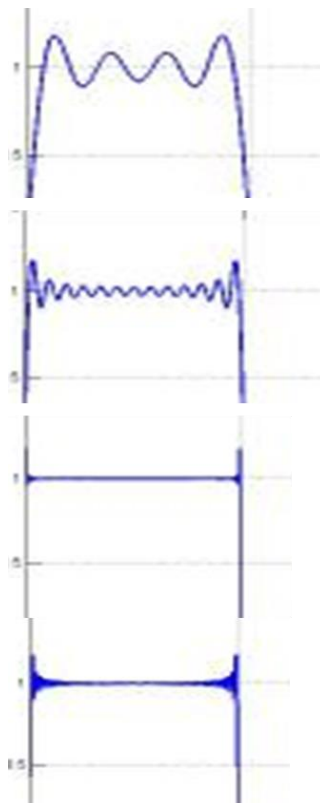






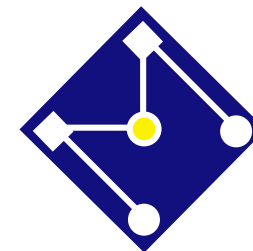
FENÔMENO DE GIBBS

Fenômeno de Gibbs e ocorre sempre que você tentar reconstruir uma função com saltos de descontinuidade usando a série de Fourier.

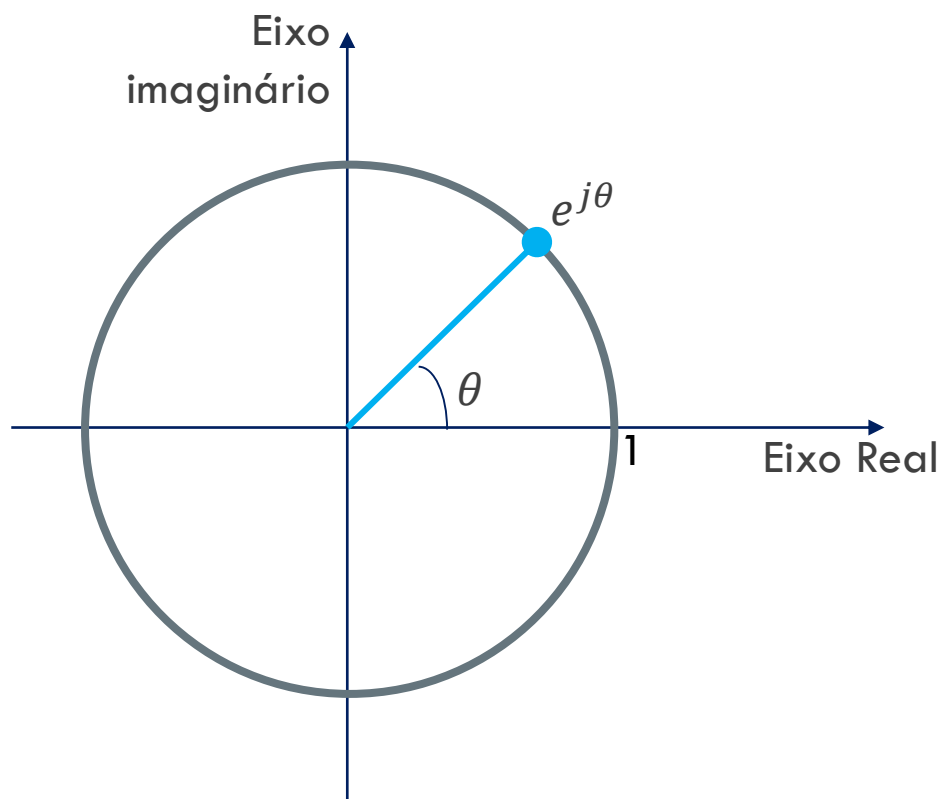


OUTRAS MANEIRAS DE ESCREVER A SÉRIE...

Forma exponencial da Série de
Fourier



REVISÃO DA FORMA EXPONENCIAL DE UM NÚMERO COMPLEXO



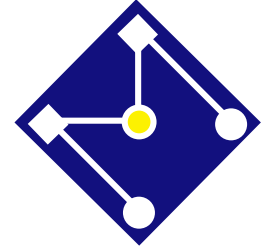
Relação de Euler

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

$$e^{-j\theta} = \cos \theta - j \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$



LEMBRANDO QUE A SÉRIE DE FOURIER...

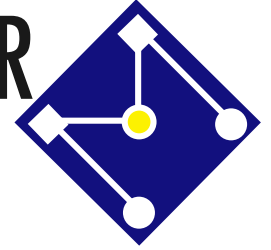
$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

$$\cos n\omega_0 t = \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2}$$

$$\sin n\omega_0 t = \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cos n\omega_0 t dt \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \sin n\omega_0 t dt \quad n = 1, 2, \dots$$



FORMULAÇÃO COMPLEXA DA SÉRIE DE FOURIER

OU SÉRIE EXPONENCIAL DE FOURIER

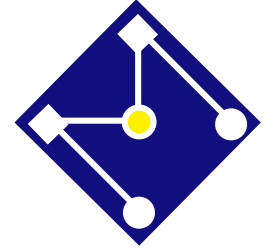
Síntese

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n] e^{jn\omega_0 t}$$

Harmônicos $X[n]$ distanciados $\Delta\omega = \omega_0 = 2\pi/T$

Análise

$$X[n] = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$



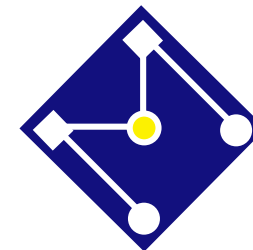
OUTRAS MANEIRAS DE ESCREVER A SÉRIE...

Forma amplitude-fase,

$$a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t = A_n \sin(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

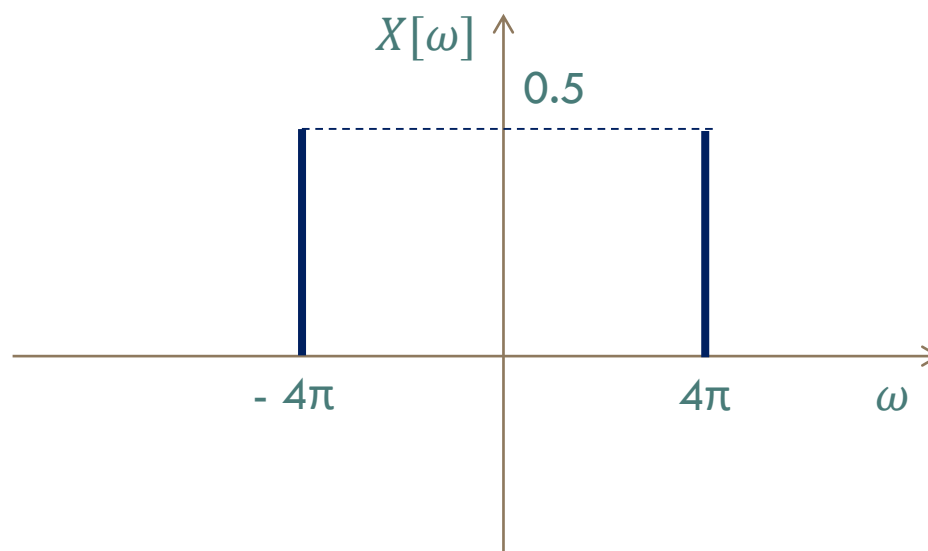
$$\varphi_n = \text{atan} \frac{a_n}{b_n} \qquad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

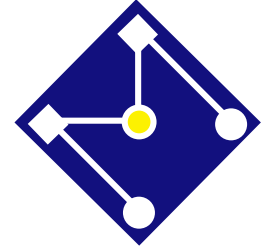
$A_n / \phi_n = a_n - j b_n$: Espectro de frequência de um sinal consiste em plotar a amplitude e a fase das harmônicas versus a frequência.



FUNÇÃO COSSENO

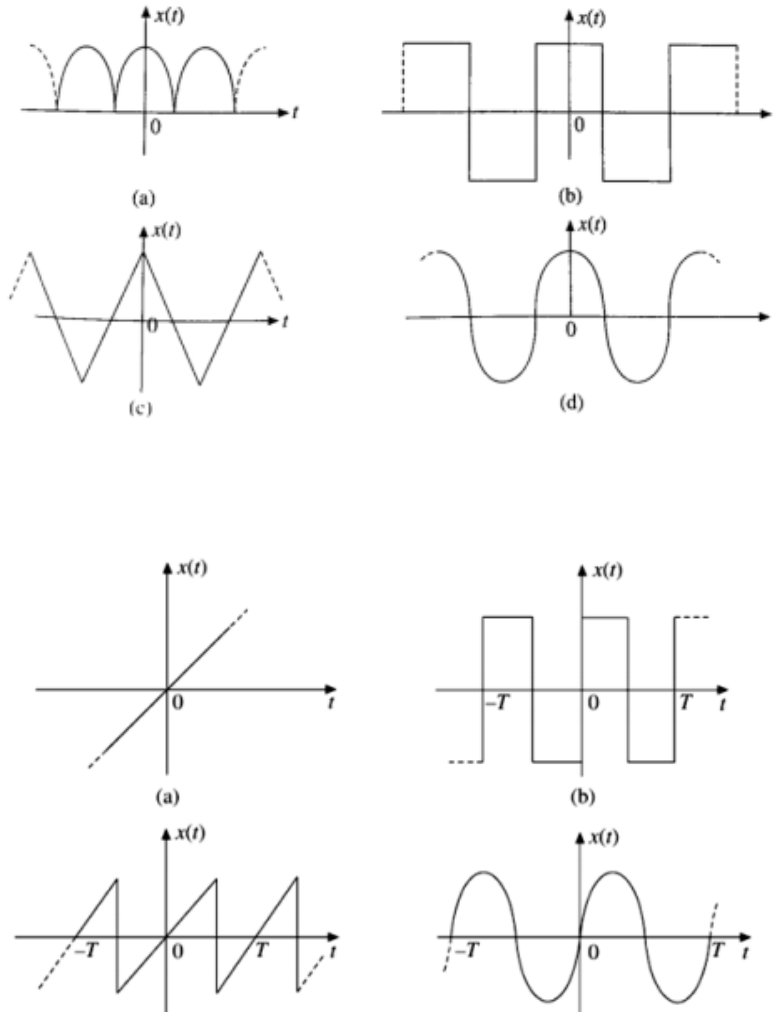
- Encontre os coeficientes da série complexa de Fourier para o sinal
$$x(t) = \cos 4\pi t$$

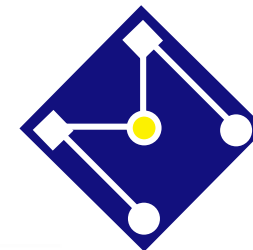




SIMETRIAS...

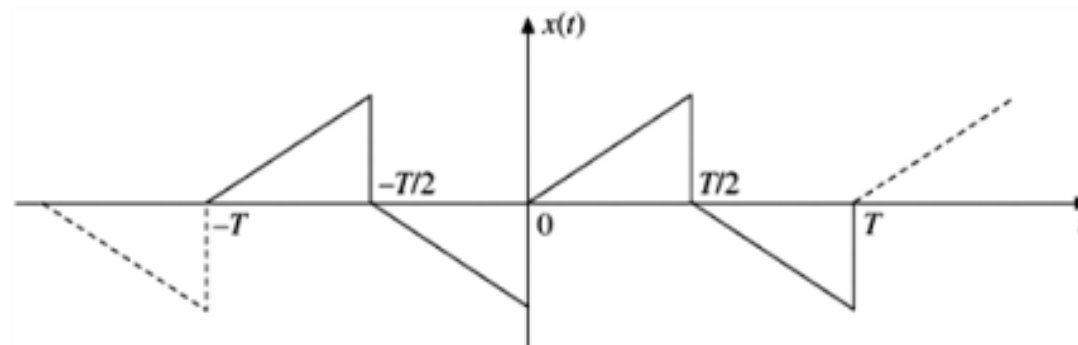
- A expansão em série de Fourier de uma função periódica par contém apenas os termos cosseno e uma constante.
- A expansão em série de Fourier de uma função periódica ímpar contém apenas termos senoidais.



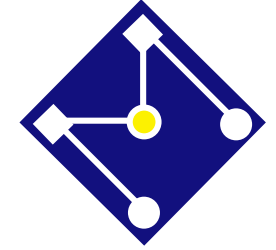


SIMETRIA DE MEIA ONDA

- $x(t) = -x\left(t \pm \frac{T}{2}\right)$

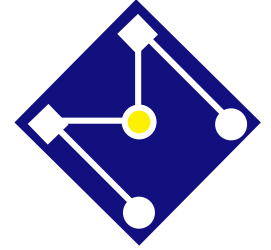


- Esta função periódica não é nem puramente par nem puramente ímpar. Para tal função, $a_0 = 0$. A sua expansão em série de Fourier apenas afeta harmônicos ímpares, $\omega_0, 3\omega_0, \dots$



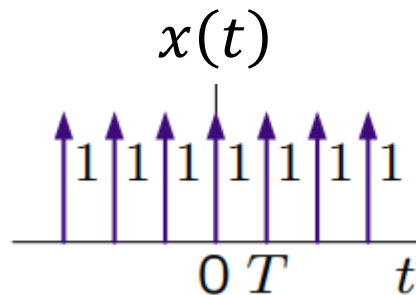
PROPRIEDADES DAS SÉRIES DE FOURIER

1. Linearidade
2. Translação no tempo
3. Translação na frequência
4. Escalonamento no tempo
5. Multiplicação no tempo
6. Convolução no tempo
7. Derivada
8. Integral

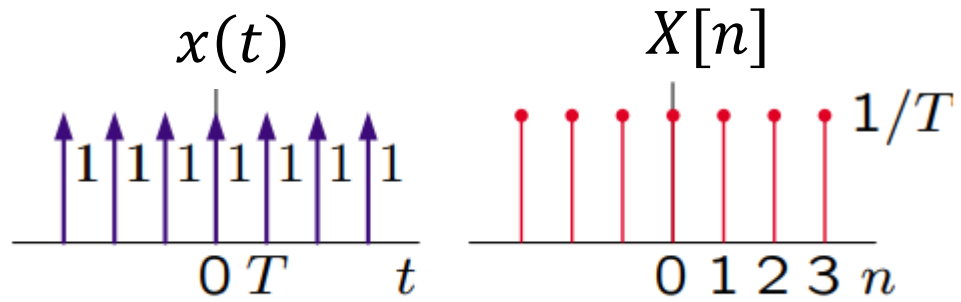
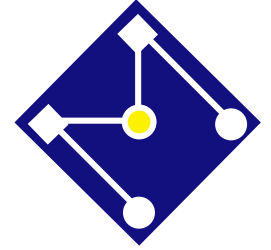


TREM DE IMPULSOS

O trem de impulsos periódico é uma função importante e, portanto, derivaremos seus coeficientes da série de Fourier.



$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT).$$



$$X[n] = \frac{1}{T}.$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi nt/T}.$$

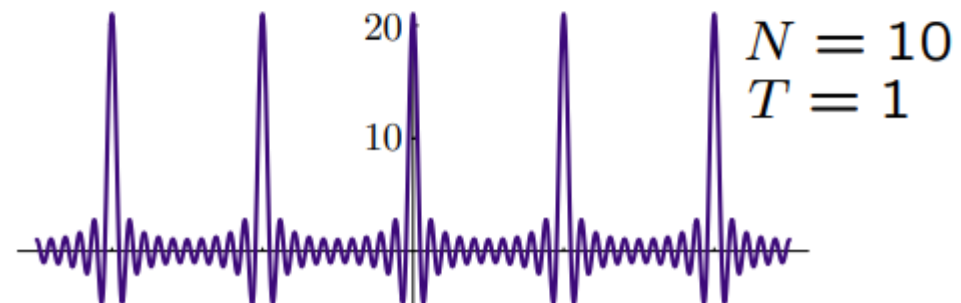
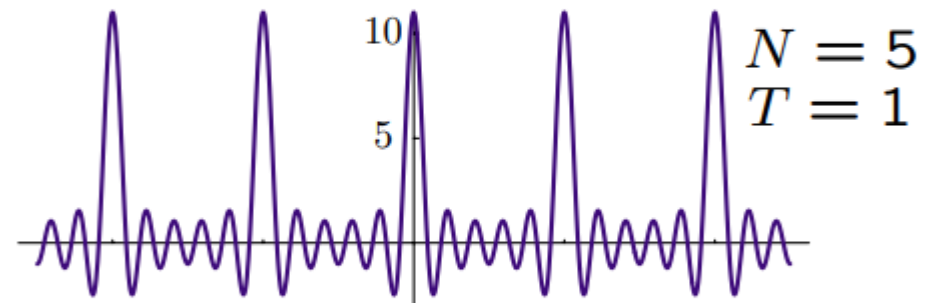
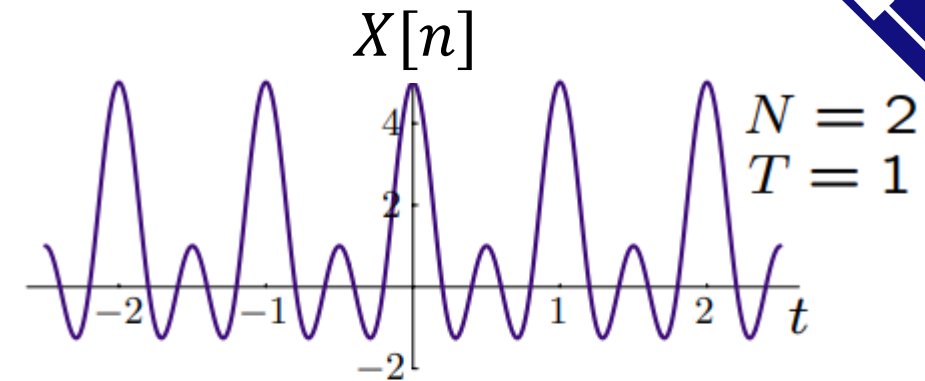
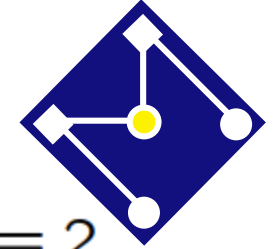
$$x_N(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-N}^N e^{j2\pi nt/T},$$

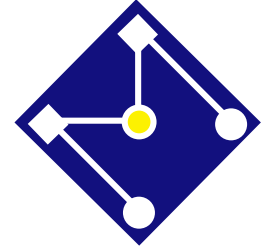
$$N \rightarrow \infty.$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{T} \frac{\left(e^{j2\pi t/T}\right)^{-N} - \left(e^{j2\pi t/T}\right)^{N+1}}{1 - e^{j2\pi t/T}}, \\ &= \frac{1}{T} \frac{e^{j(2N+1)\pi t/T} - e^{-j(2N+1)\pi t/T}}{e^{j\pi t/T} - e^{-j\pi t/T}}, \\ &= \frac{1}{T} \left(\frac{\sin(2N+1)\pi t/T}{\sin \pi t/T} \right). \end{aligned}$$

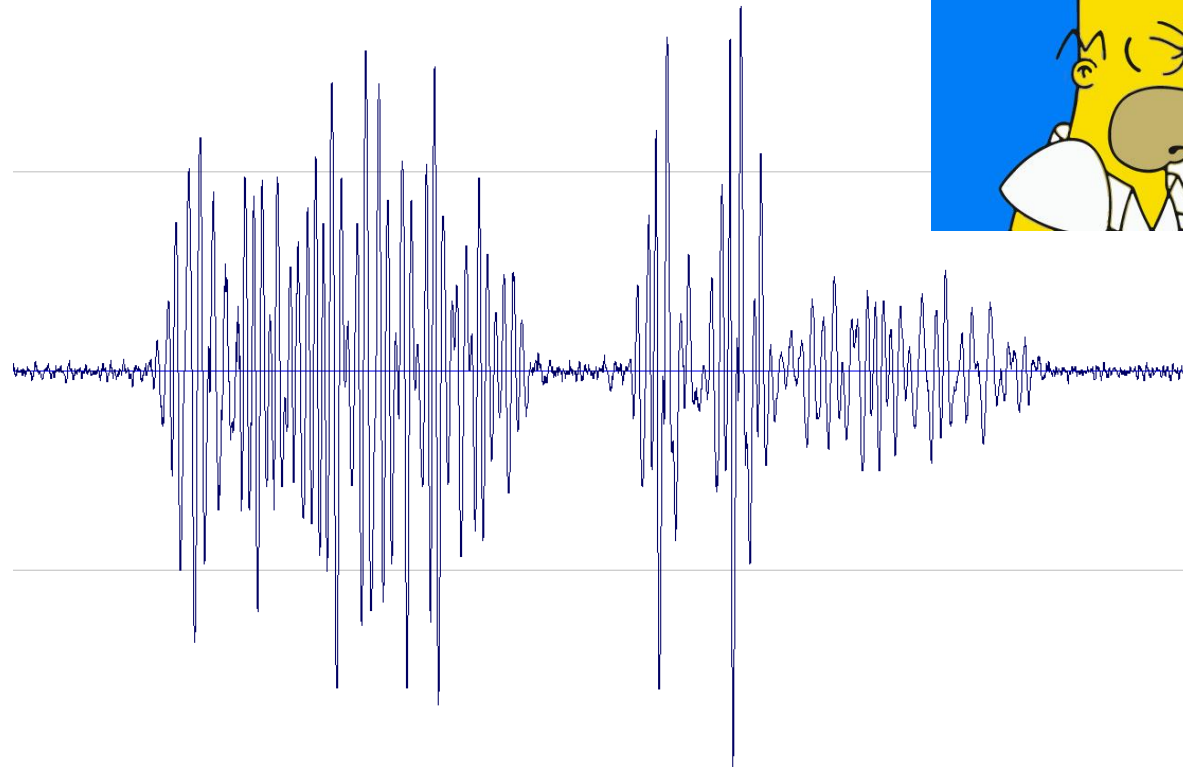
Assim, como $N \rightarrow \infty$, cada lóbulo fica maior e mais estreito. Cada lóbulo age como um impulso (verifique que a área = 1).

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \int_{-T/2}^{T/2} x_N(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{T} \sum_{n=-N}^N e^{j2\pi nt/T} dt \\ &= \sum_{n=-N}^N \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi nt/T} dt \end{aligned}$$





Este não é um sinal periódico. Queremos calcular seu espectro usando análise de Fourier, mas aprendemos que o sinal deve ser periódico.
O que fazer?

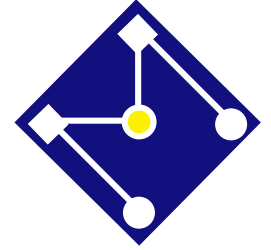


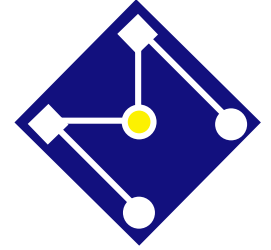
PRATIQUE

Exercícios extra no Stoa!!!!

ANTES, FAÇA UMA REVISÃO

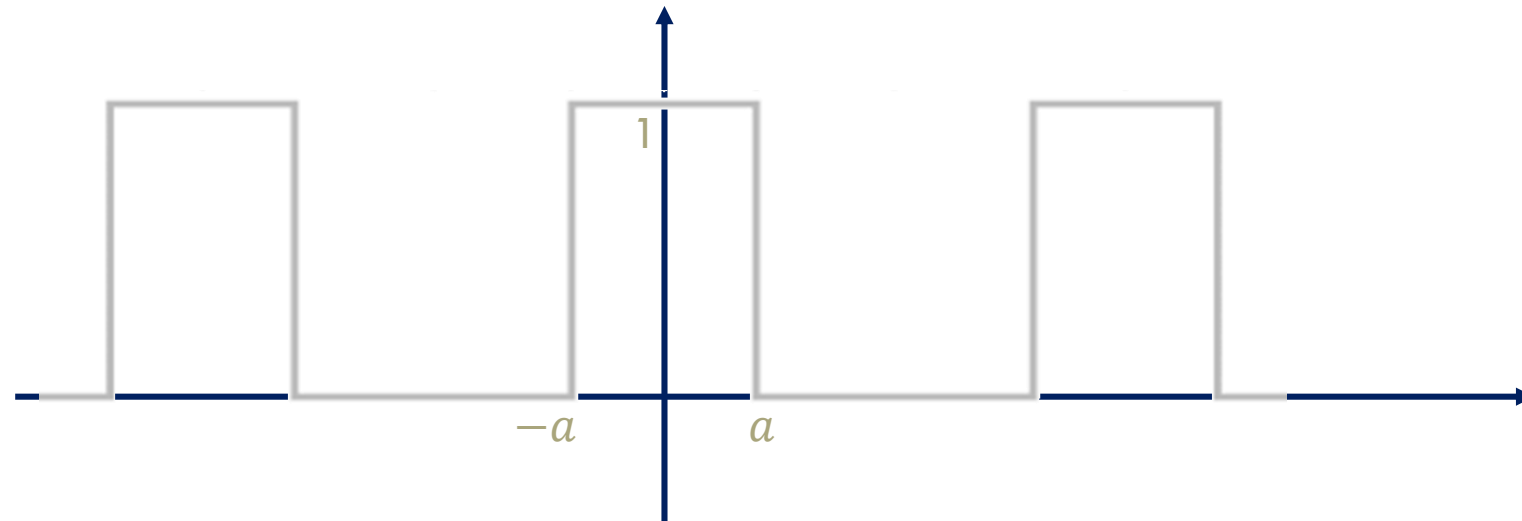
- <https://www.youtube.com/watch?v=spUNpyF58BY>





ONDA QUADRADA

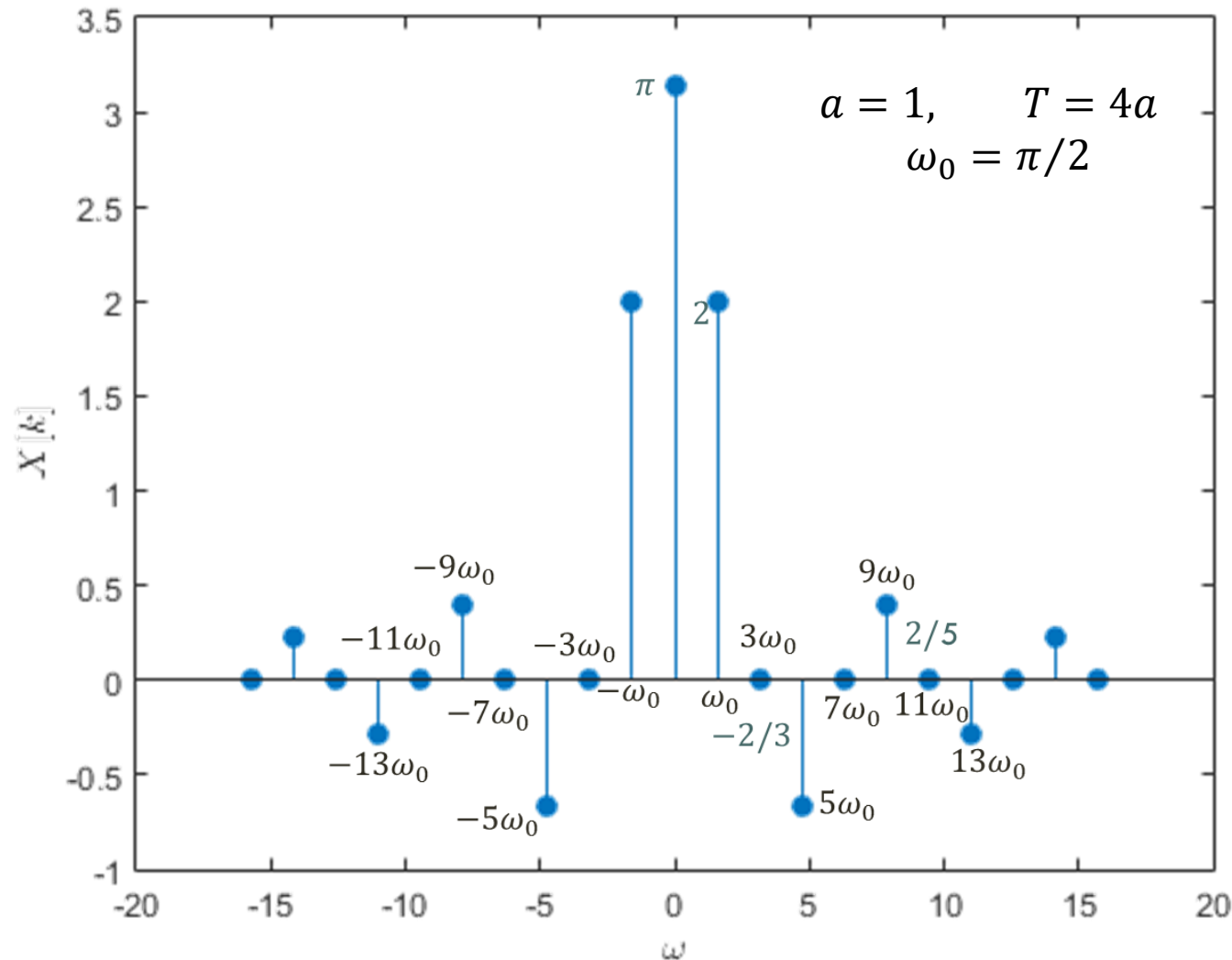
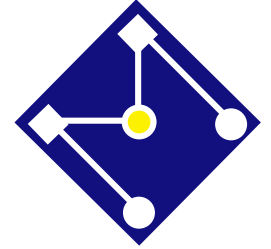
- Ache a série de Fourier e desenhe as funções no domínio do tempo e frequência, para a funções periódica da Figura, supondo $T = 4a$.

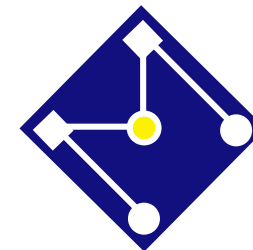


$$X[k] = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$X[0] = \frac{1}{T} \int_{-a}^a 1 dt = \frac{2a}{T}, \quad k = 0$$

$$X[k] = \frac{\sin(k\omega_0 a)}{k\pi}, \quad k \neq 0$$





FUNÇÕES PERIÓDICAS

Ache a série de Fourier e desenhe as funções no domínio do tempo e frequência, das funções periódicas:

1. $x(t) = t$ para $t \in [-\pi, \pi]$
2. $x(t) = t$ para $t \in [0, 2\pi]$
3. $x(t) = e^t$ para $t \in [-\pi, \pi]$

Gabarito:

1

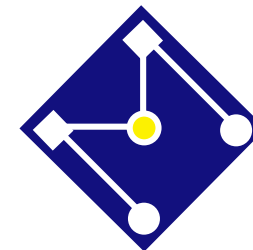
$$x(t) = j \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{jkt}}{k}$$

2

$$x(t) = \pi + j \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{e^{jkt}}{k}$$

3

$$x(t) = \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \frac{(1 + jk)}{(1 + k^2)} e^{jkt}$$



SEMANA DE REVISÃO

What have We

Sinal

Sistema

Convolução

LEARNED?

Série de Fourier – somente para sinais periódicos e infinitos, porém a base de toda análise de sinais