Fiscomp I
Mapa logístico e caos

Alexandre Suaide

Ramal 91-7072

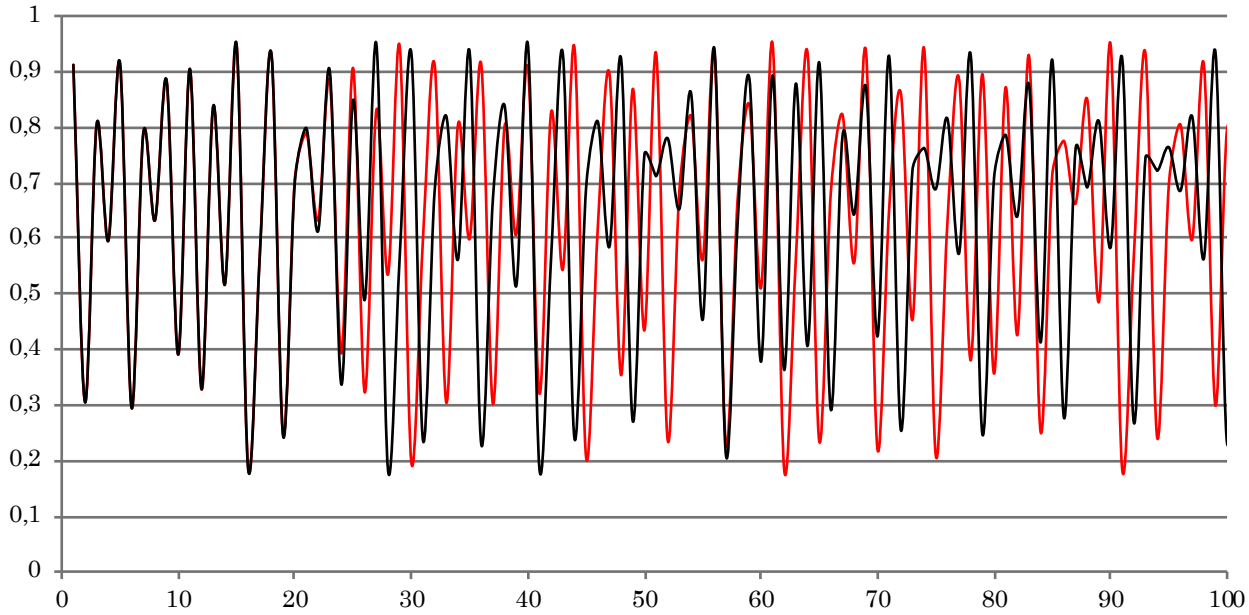
suaide@if.usp.br

O PÊNDULO DUPLO

Applet em http://physlab.net/dbl_pendulum.html

CAOS

- São sistemas determinísticos (não probabilísticos), ou seja, as equações que descrevem a evolução são bem determinadas.
- A evolução temporal é muito dependente das condições iniciais
- As trajetórias são muito irregulares



O pêndulo duplo é caótico

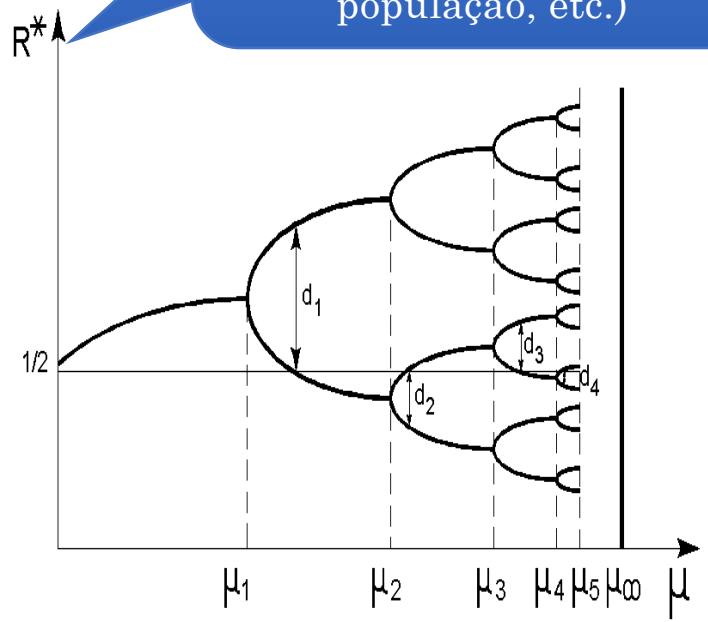
COMO SE CHEGA AO CAOS?

- Bifurcações de período
  - Rota mais comum para o caos (**cenário de Feigenbaum**)
  - Duplicação dos atratores

$$\lim_{n\to\infty} = \frac{(\mu_n - \mu_{n-1})}{(\mu_{n+1} - \mu_n)} = \delta$$

$$\delta = 4{,}6692016091029909....$$

Algo que represente a resposta do sistema para aquela condição (corrente, tensão em um elemento, população, etc.)



Uma variável de controle do sistema (tempo, número de geração, tensão em uma fonte, etc.)

EXEMPLO SIMPLES: O MAPA LOGÍSTICO

- Crescimento de populações
  - Equação logística – Pierre Verhulst (~1845)

$$\frac{dx}{dt} = rx(1-x), \text{ com } x = N/K$$

$$x(t) = \frac{1}{1+(x_0^{-1}-1)e^{-rt}}, \text{ função sigmóide}$$

  - ***r*** = número Malthusiano,
    - Se r<0 → a população morre com o tempo x→0
    - Se r>0 → a população sobrevive

EXEMPLO SIMPLES: O MAPA LOGÍSTICO

- Crescimento de populações
  - Equação logística – Pierre Verhulst (~1845)
    - Esta equação possui inconvenientes para o estudo de evolução de populações pois a população em qualquer instante t depende somente das condições iniciais e é contínua
    - É mais desejável haver modelos onde o estágio atual da população dependa apenas da geração anterior e não da condição inicial
  - Assim, costuma-se utilizar o mapa logístico, ao invés da equação logística para o estudo de populações.

EXEMPLO SIMPLES: O MAPA LOGÍSTICO

- Crescimento de populações
  - Mapa logístico

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

  - Neste caso, r é sempre maior que 1 e é denominado potencial biótico da população
  - Como é a evolução temporal da população em função da condição inicial (x_0) e do potencial biótico?

CALCULANDO O MAPA LOGÍSTICO

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

- Dois métodos de cálculo
  - Excel
    - Fazer uma planilha e observar como as gerações evoluem com os parâmetros iniciais
  - Método gráfico
    - Diagrama de teia
      - Efeito visual mais direto mas depende de um pouco de habilidade gráfica ☺

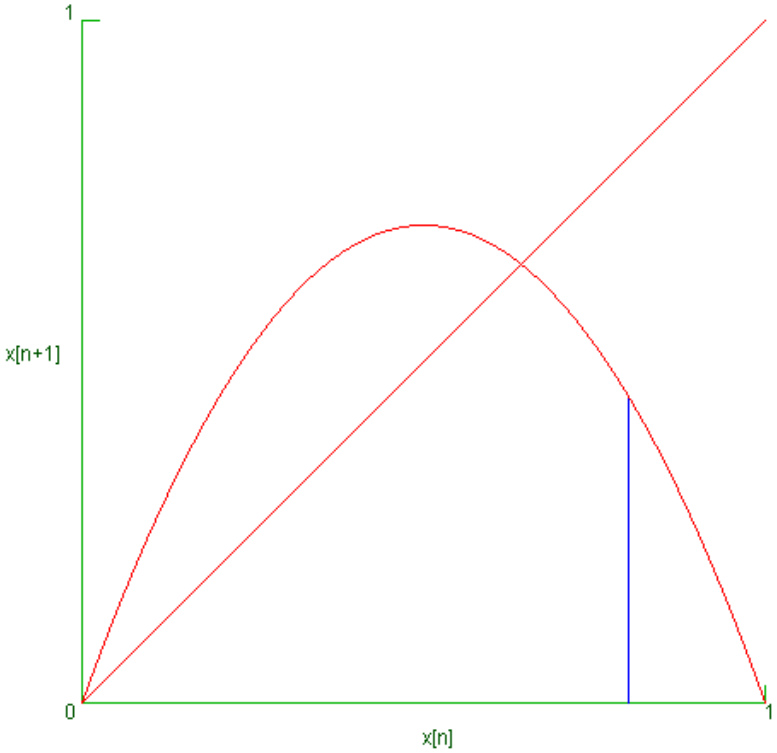
CALCULANDO O MAPA LOGÍSTICO

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

- Diagrama de teia
  - Faz-se uma reta com c.a. = 1
  - Faz-se um gráfico superposto da função

$$f(x) = rx(1 - x)$$

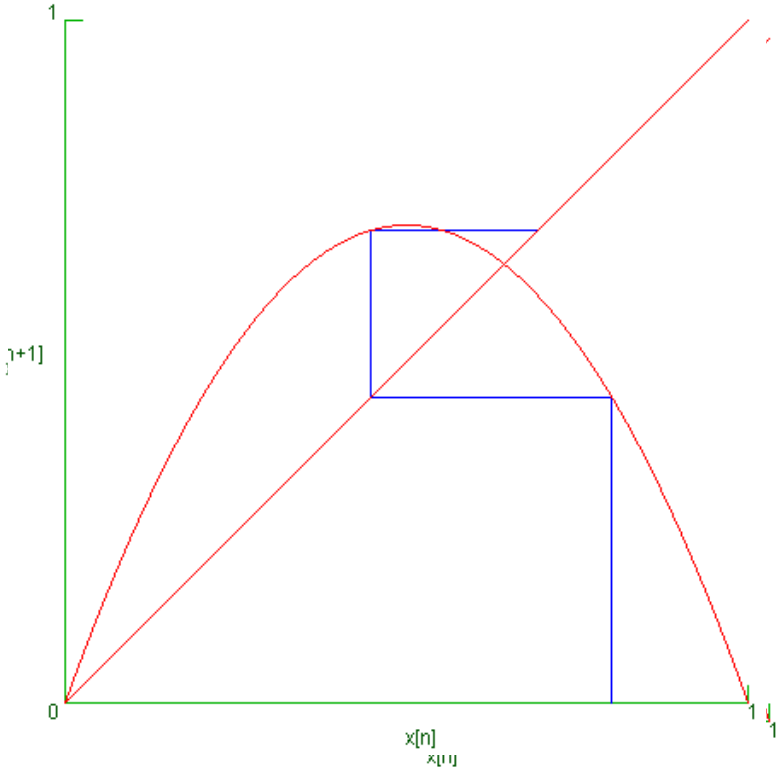
  - Calcula-se $f(x)$ para o valor de x_0



CALCULANDO O MAPA LOGÍSTICO

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

- Rebate-se o valor para a reta
  - Obtem-se assim o valor de x_1
- Calcula-se $f(x)$ para o valor de x_1
- Rebate-se novamente para a reta para obter x_2

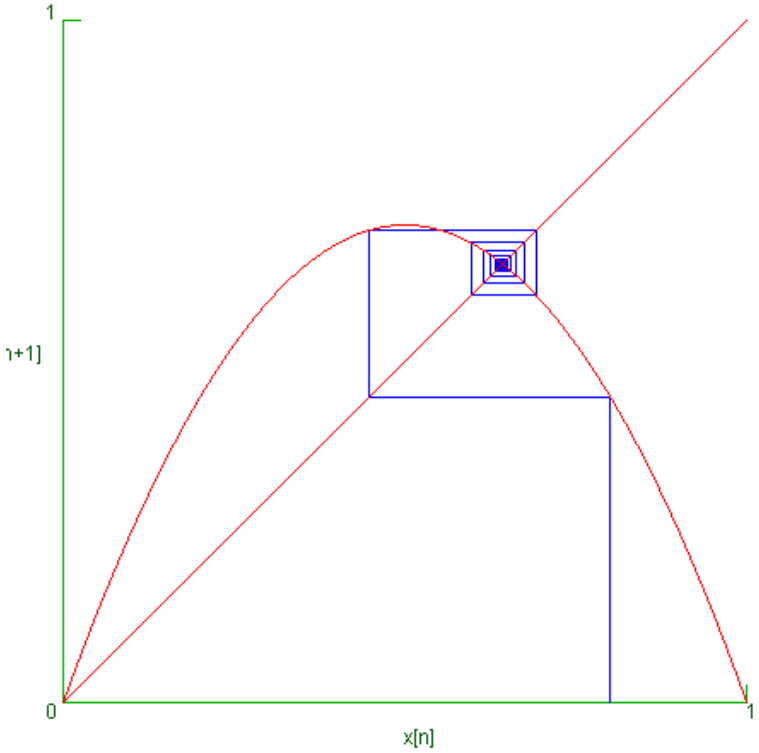


CALCULANDO O MAPA LOGÍSTICO

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

- E assim sucessivamente tantas quantas forem as interações desejadas

- Os vários comportamentos dependem de ***r***



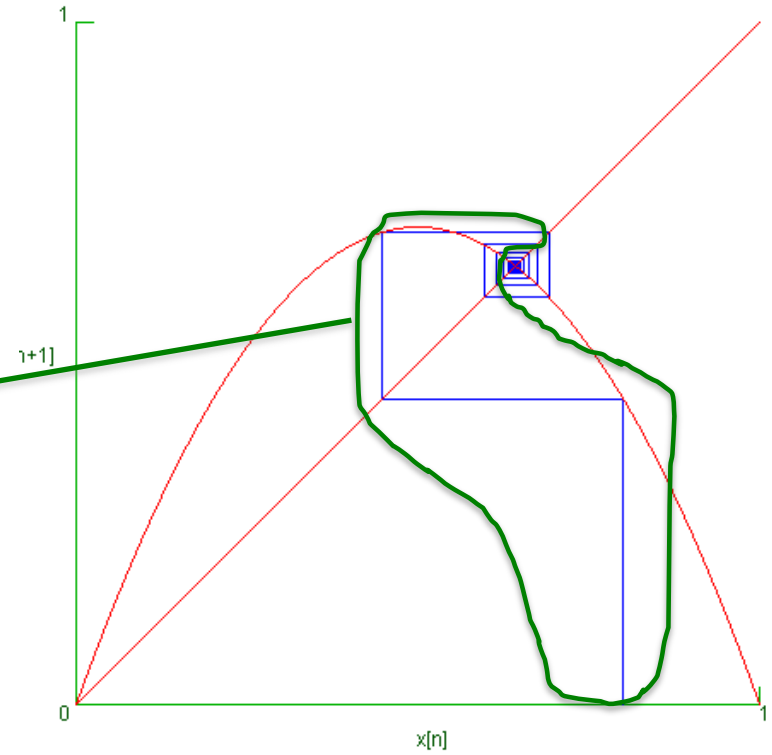
CALCULANDO O MAPA LOGÍSTICO

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

- Dois conceitos importantes

- Transitório:
  - Intervalo de tempo (ou interações) necessário para atingir uma situação de equilíbrio

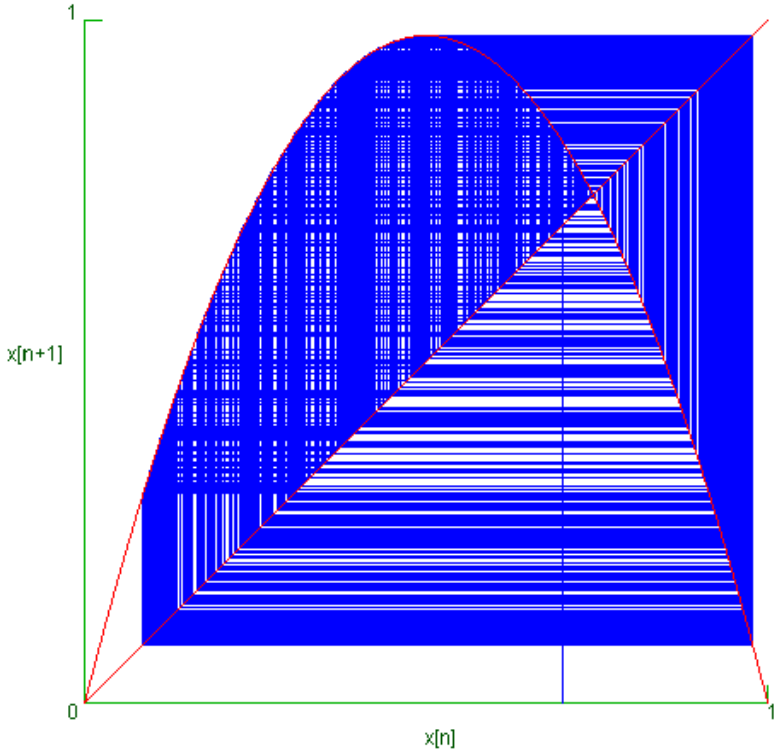
- Regime estacionário
  - Intervalo de tempo (ou interações) após o transitório



CALCULANDO O MAPA LOGÍSTICO

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

- População que atinge estabilidade
- População que morre com o tempo
- População em estado caótico



O DIAGRAMA DE FASE

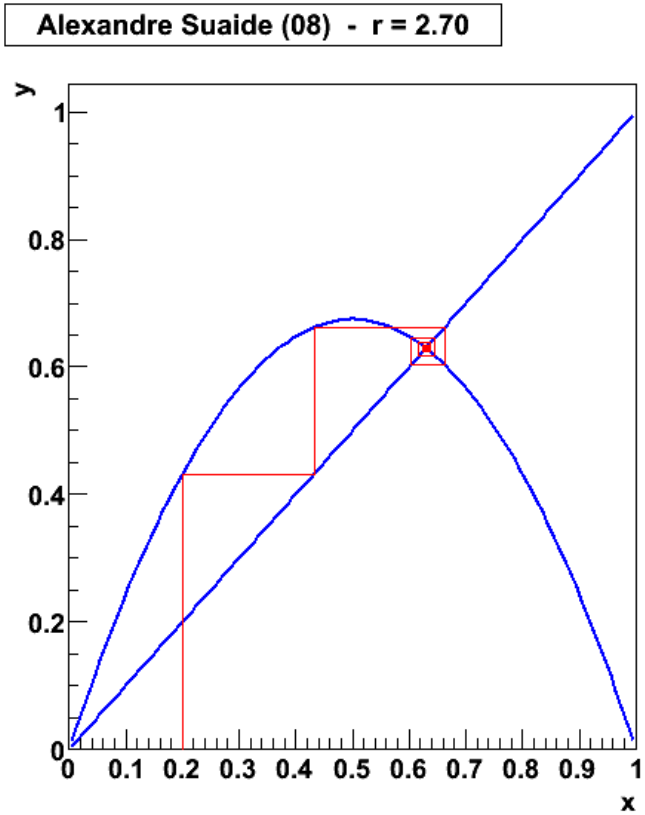
- O diagrama de fase corresponde a **todos** estados do sistema, no regime estacionário, em função de uma variável de controle
- Estado do sistema
  - Variáveis que definem a situação do sistema em um dado instante
    - Ex: tamanho da população, tensão e corrente em um RLC, velocidade e posição de um corpo
- Variável de controle
  - É aquela que podemos controlar e variar ao nosso gosto para testar como o sistema se comporta
    - Ex: Freqüência e tensão do gerador, tamanho de um pêndulo, etc.

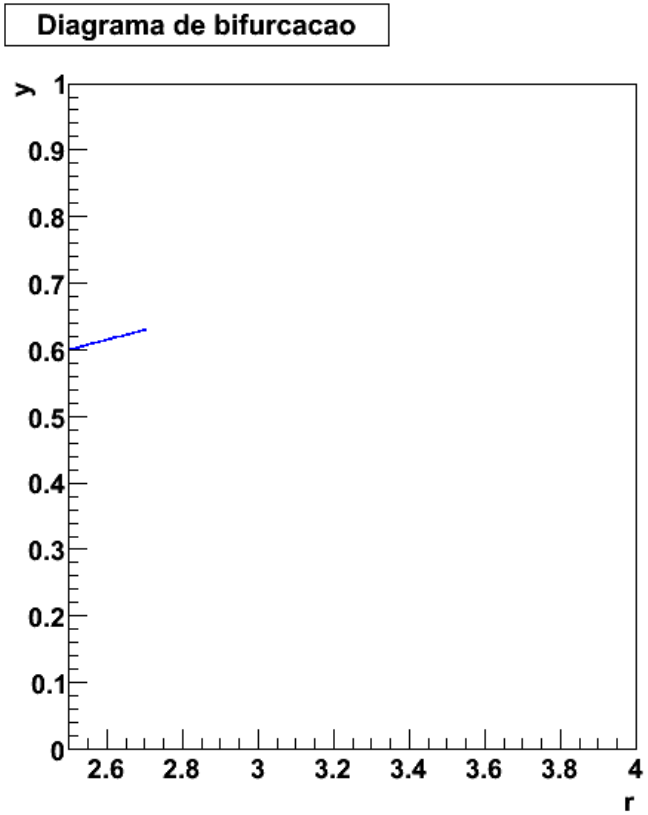
DIAGRAMA DE FASE DE UM MAPA LOGÍSTICO

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

- Qual o estado?
  - X_n, ou tamanho da população
- Qual é a variável de controle?
  - No nosso caso, apenas *r* pode ser variada e estudamos como X_n se comporta em função de *r*.
    - Lembre-se que queremos X_n no regime estacionário
- Como montamos o diagrama, neste caso:
  - Escolhemos r.
  - Definimos que o transitório acaba em, por exemplo, k passos
  - Graficamos todos os valores possíveis de X_n para aquele valor de r após o transitório

DIAGRAMA DE FASE DE UM MAPA LOGÍSTICO





Atividades de hoje

- Estudar o mapa logístico usando ferramentas computacionais
  - Representação gráfica do mapa logístico
  - Evolução do sistema de acordo com os parâmetros e condições iniciais
  - Diagrama de bifurcação
  - Número de Feigenbaum
- Importante: faça as figuras com qualidade visual: nomes nos eixos, pontos de tamanho adequado, etc.

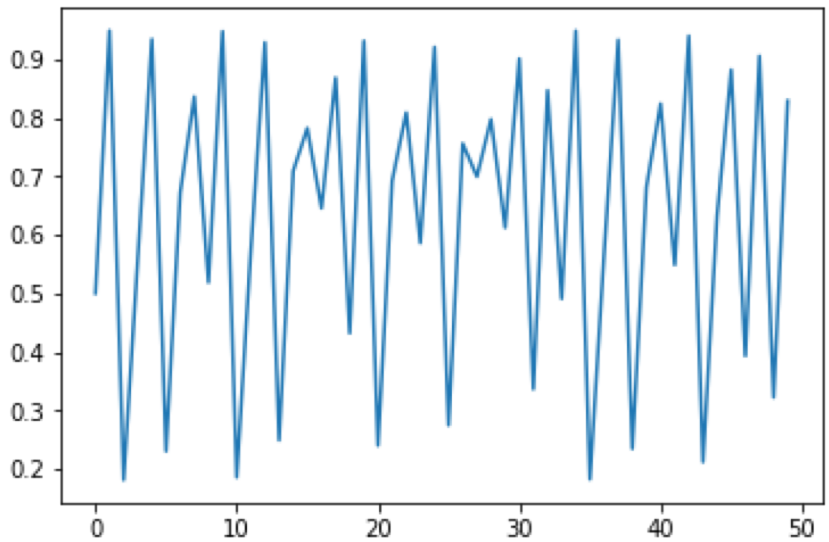
Parte 1

- Sabendo que o mapa logístico pode ser explorado através da relação de recorrência

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

- Explore como x depende de n, dados um parâmetro r e um valor para x_0

- Você poderia identificar uns valores de r e x_0 onde há convergência para um único valor? E para dois? E para caos?



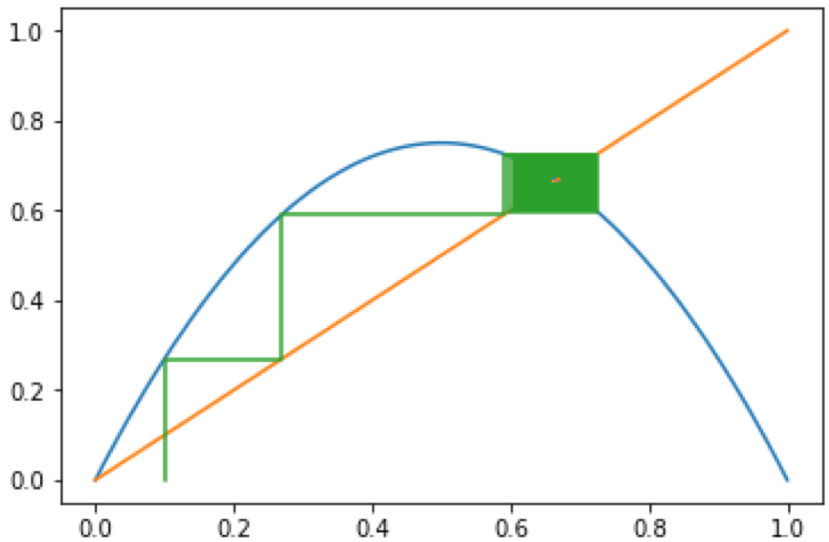
Parte 2

- Sabendo que o mapa logístico pode ser explorado através da relação de recorrência

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

- Elabore um código onde mostre o cálculo de x_n graficamente, dado um valor de r e x_0

- Você poderia identificar uns valores de r e x_0 onde há convergência para um único valor? E para dois? E para caos?



Parte 3

- Sabendo que o mapa logístico pode ser explorado através da relação de recorrência

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

- Obtenha o diagrama de fase para o mapa logístico

- Qual um valor razoável de n para eliminar o transitório?

- Obtenha a constante de Feigenbaum