18/04/2019 → Cálculo numérico

Aula passada ... Apresentação do método de Newton.

Problema: $f(x)=0$, x_0 aproximação inicial e x_1, x_2, x_3 aproximações sucessivas.

$x_{n+1}=\varphi(x_k)$, onde φ depende de f.

Como era φ?

↳ "Finge" que f é sua aproximação de Taylor de grau 1 em x_k:

$$\boxed{f(x)\simeq f(x_k)+f'(x_k)\cdot(x-x_0)}$$

E ache o zero dessa aproximação: Esse será o x_{k+1}: $f(x_k)+f'(x_k)(x_{k+1}-x_k)=0$,

Isolando x_{k+1}: $\boxed{x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}=\varphi(x_k)}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\varphi(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}}$

Hoje: (Importante para o EP)

$F(x)=0 \qquad x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$

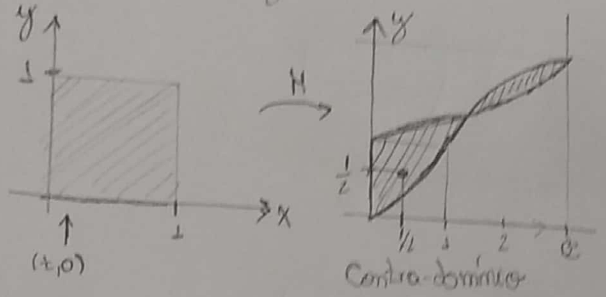
$F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n \qquad F=(F_1,F_2,\dots,F_n)$

$F_i=F_i(x_1,x_2,\dots,x_n)$

Exemplo (Fictício)

$H(x,y)=(xe^y,\ x^2+y)$, $H:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$
$(x,y)\to(xe^y, x^2+y)$

Vamos restringir o domínio: $[0,1]\times[0,1]$



$t\mapsto(t,0)$, $\therefore H(t,0)=(te^0, t^2+0)=(t,t^2)$

$t\mapsto(t,1)$, $\therefore H(t,1)=(te, t^2+1)=(et, 1+t^2)$

$t\mapsto(0,t)$, $\therefore H(0,t)=(0,t)$

$t\mapsto(1,t)$, $\therefore H(1,t)=(1e^t, 1^2+t)=(e^t, 1+t)$

Pergunta: Quem é (x,y), tal que $H(x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$?

Equivale a achar (x,y) tal que $H(x,y)-\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=(0,0)\Rightarrow\Big(\underbrace{xe^y-\tfrac{1}{2}}_{F_1(x,y)},\ \underbrace{x^2+y-\tfrac{1}{2}}_{F_2(x,y)}\Big)=(0,0)$

$\therefore$ Sistema não linear de 2 incógnitas e 2 Eq.:

$$\begin{cases} xe^y-1/2=0 \\ x^2+y-1/2=0 \end{cases}$$

Newton para $F(x) = 0$, $F: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$

A Idéia é a mesma, x_0: aproximação Inicial e $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ aproximações sucessivas.

Como é a recorrência?

$$\underset{\mathbb{R}^n}{F(x)} \simeq \underset{\mathbb{R}^n}{F(x_k)} + \underset{\text{Jacobiana}}{DF(x_k)}\underset{\mathbb{R}^n}{(x - x_k)}$$

$$DF(x_k) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

x_{k+1} é definido como aquele que anula a expressão da direita, isto é: (*)

$$F(x_k) + DF(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0 \Rightarrow \underbrace{DF(x_k)}_{n\times n}\underbrace{(x_{k+1} - x_k)}_{n\times 1} = \underbrace{-F(x_k)}_{n\times 1} \rightarrow \text{Sistema linear}$$

Caso se conheça $DF(x_k)^{-1}$:

$$\hookrightarrow x_{k+1} - x_k = -F(x_k)\cdot DF(x_k)^{-1} \Rightarrow x_{k+1} = x_k - F(x_k)\cdot DF(x_k)^{-1} \quad (**)$$

Voltando ao exemplo...

$$F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y)) = \left(xe^y - \frac{1}{2},\ x^2 + y - \frac{1}{2}\right)$$

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^y & xe^y \\ 2x & 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ (*) Fica: $x_k = (x_k, y_k)$

$$\begin{pmatrix} e^{y_k} & x_k e^{y_k} \\ 2x_k & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{k+1} - x_k \\ y_{k+1} - y_k \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_k e^{y_k} - \frac{1}{2} \\ x_k^2 + y_k - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{(I)}$$

Chute: $(1/2, 1/2) = (x_0, y_0)$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} 1{,}649 & 0{,}8244 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0{,}3244 \\ +0{,}25 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}1435 \\ -0{,}1065 \end{pmatrix}.$$

$\therefore x_1 = x_0 + a$ e $y_1 = y_0 + b \Rightarrow (x_1 = 0{,}3565$ e $y_1 = 0{,}3935)$

Aplicando novamente (I):

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} 1{,}482 & 0{,}5284 \\ 0{,}7130 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}0284 \\ -0{,}0206 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}01585 \\ -0{,}009301 \end{pmatrix}$$

$\therefore x_2 = 0{,}3565 - 0{,}01585 = 0{,}3407$ e $y_2 = 0{,}3935 - 0{,}009301 = 0{,}3842$

$\therefore (x_2 = 0{,}3407$ e $y_2 = 0{,}3842)$ ... etc.

Neste exemplo, é possível recair num sistema Unidimensional:

$\begin{cases} xe^y - 1/2 = 0 \\ x^2 + y - 1/2 = 0 \end{cases}$, escolhemos uma equação para isolar uma variável em função da outra: $\boxed{x = 0{,}5e^{-y}}$, substituímos na outra: $\underbrace{0{,}25e^{-2y} + y - 0{,}5 = 0}_{f(y)}$,

$f'(y) = -0{,}5e^{-2y} + 1$ $\quad \therefore \varphi(y) = y - \dfrac{0{,}25e^{-2y} + y - 0{,}5}{1 - 0{,}5e^{-2y}}$ $\quad y_0 = 0{,}5$

$\hookrightarrow$ Calculadora: $y_3 = 0{,}3840195231$

$x_3 = 0{,}3405590064$