# MAT-2454 – Cálculo II
# Aulas 11 e 12: Diferenciabilidade

Alexandre Lymberopoulos

Para Escola Politécnica – USP

IME–USP — Departamento de Matemática

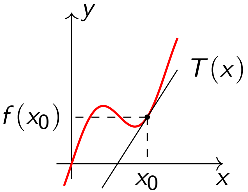
# Ordem do dia

# Retomando...

- $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivável em $x_0$ se existe e é finito o limite

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

- Nessas condições sabemos que $f'(x_0)$ é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto $\big(x_0, f(x_0)\big)$:




- Reescrevendo o limite acima como $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-T(h)}{h}$, onde $T(h) = f(x_0) + f'(x_0)h$, sabemos que $T$ é a melhor aproximação afim para $f$.

# Analogamente...

- Procuramos generalizar essa ideia para funções de duas variáveis, $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
- Para isso queremos uma função afim $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, portanto da forma $T(h,k) = f(X_0, y_0) + ah + bk$, tal que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - T(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0.$$

- Quem são $a$ e $b$? Como o limite acima deve existir e valer 0 então, ao longo de retas paralelas aos eixos coordenados temos

$$0 = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - T(h,0)}{|h|} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0) - ah}{|h|}$$

$$0 = \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, y_0+k) - T(0,k)}{|k|} = \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0,y_0) - bk}{|k|}$$

- Logo, $\boxed{a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}$ e $\boxed{b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}$.

# Diferenciabilidade e Plano Tangente

## Definição (Diferenciabilidade)

*Uma função* $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *é diferenciável em* $(x_0, y_0) \in A$ *se*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k}{\|(h, k)\|} = 0.$$

Em cada ponto $(x_0, y_0)$ onde $f$ é diferenciável, temos:

## Definição (Plano Tangente)

*O plano tangente ao gráfico de* $f$*, que é dado pela equação*

$$\boxed{f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - z + f(x_0, y_0) = 0}.$$

## Definição (Vetor Normal)

*O vetor normal ao gráfico de* $f$*, dado por*

$$\boxed{n_f(x_0, y_0) = \left(f_x(x_0, y - 0), f_y(x_0, y_0), -1\right)}.$$

# Diferenciabilidade e Plano Tangente

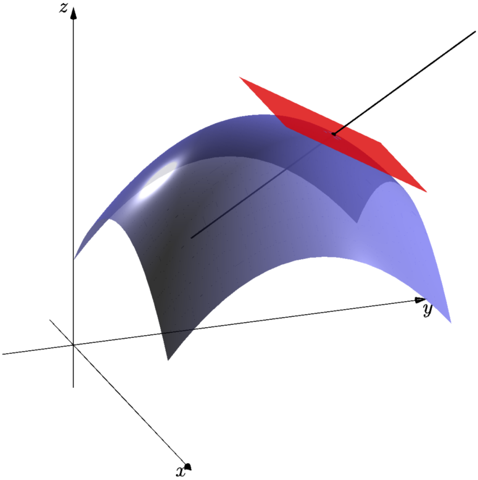



Figura: O gráfico de $f$, plano tangente e vetor normal

# Exemplos

Justifique de cada uma das afirmações abaixo:

- A função $f(x, y) = x^2 y$ é diferenciável em todos os pontos de seu domínio.
- A função $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2+y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ não é diferenciável em $(0, 0)$.
- A função $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
  1. é contínua em $(0, 0)$;
  2. admite derivadas parciais em $(0, 0)$;
  3. não é diferenciável na origem.

Determine, se existirem no ponto $\big(0, 0, f(0, 0)\big)$, o plano tangente e a reta normal aos gráficos da primeira e terceira funções dos itens acima.

# Vetor gradiente

- Considerando apenas a parte linear da função afim $T(h,k)$, definida no slide 5, temos a transformação linear $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$L(h,k) = f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k.$$

- A matriz de $L$ na base canônica é

$$[L]_{can} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{bmatrix}.$$

- Identificando esta matrix com um vetor em $\mathbb{R}^2$, temos o *gradiente* de $f$ em $(x_0,y_0)$:

$$\nabla f(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right).$$

- Quando $f$ é diferenciável o gradiente contém toda informação necessária em termos de taxas de crescimento de $f$ no ponto $(x_0,y_0)$. Detalhes nas próximas aulas.

# Critérios para diferenciabilidade

Sejam $f\colon A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função e $(x_0, y_0) \in A$.

**Teorema**

*Se $f$ é diferenciável em $(x_0, y_0)$ então $f$ é contínua em $(x_0, y_0)$.*

**Teorema**

*Se $f$ é diferenciável em $(x_0, y_0)$ então as derivadas parciais dfe $f$ em $(x_0, y_0)$ existem.*

**Teorema**

*Se $f$ é de classe $\mathcal{C}^1$ em $(x_0, y_0)$, isto é se suas derivadas parciais são contínuas em $(x_0, y_0)$, então $f$ é diferenciável em $(x_0, y_0)$.*

Como você poderia usar esses resultados para estudar as funções do slide de Exemplos (slide 7)?

# Atividades

- Todos os exercícios restantes da Seção 1 da Lista 2
- Estude a função $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ quanto à continuidade, existência das derivadas parciais, diferenciabilidade e continuidade das derivadas parciais na origem.
- Encontre o candidato $\pi$ a plano tangente na origem para a função $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ e exiba uma curva no gráfico de $f$ cujo vetor tangente não está contido em $\pi$. O que isso permite concluir a respeito da diferenciabilidade de $f$ em $(0,0)$?

# Compostas do tipo "$(f \circ \gamma)(t)$"

- Sejam $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.
- Compondo temos $f \circ \gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- A derivada de $f \circ \gamma$ em $t_0$ é $(f \circ \gamma)'(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} \frac{(f\circ\gamma)(t) - (f\circ\gamma)(t_0)}{t - t_0}$.
- Tal limite pode exitir mesmo que $f$ ou $\gamma$ não sejam diferenciáveis, em $\gamma(t_0)$ e $t_0$, respectivamente.

**Teorema (Regra da Cadeia - I)**

*Sejam $\gamma\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ e $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e , diferenciáveis em $t_0$ e $(x_0, y_0) = \gamma(t_0)$. Então $f \circ \gamma$ é derivável em $t_0$ e*

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = \left\langle \nabla f(x_0, y_0), \gamma'(t_0) \right\rangle.$$

- O que podemos dizer sobre $\nabla f$ ao longo de uma curva de nível de $f$ nesse caso?

# Intuição e Exemplos

- Podemos interpretar esse resultado como um tipo de projeção do gradiente sobre a direção tangente à curva, ou seja, a componente do gradiente de $f$ na direção da trajetória $\gamma$:

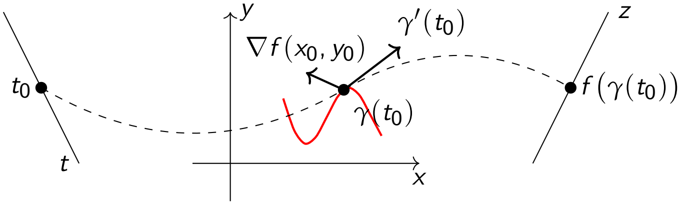



Figura: A composta $f \circ \gamma$ com os vetores $\nabla f(x_0, y_0)$ e $\gamma'(t_0)$.

- Calcule explicitamente $(f \circ \gamma)'(2)$ e, se possível usando o teorema anterior, quando $f(x, y) = xy$ e $\gamma(t) = (t^3, t^2)$.
- Calcule $(f \circ \gamma)'(0)$, bem como $\langle \nabla f(x_0, y_0), \gamma'(t_0) \rangle$, para a função do exercício 1.5 da Lista 2 e $\gamma(t) = (t, t)$. O que podemos concluir da diferenciabilidade de $f$ em $(0, 0)$?

# Compostas do tipo "$f\big(g(x,y),h(x,y)\big)$"

- Se $g, h\colon A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $f\colon B \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são funções tais que $\big(g(x,y),h(x,y)\big) \in B$ então está bem definida a composta $F(x,y) = f\big(g(x,y),h(x,y)\big)$. Vamos pensar em $f$ como dependendo das variáveis em $(u,v) \in B$.
- Se $g$ e $h$ são funções diferenciáveis em $(x_0,y_0)$ e $f$ é diferenciável em $(u_0,v_0) = \big(g(x_0,y_0),h(x_0,y_0)\big)$ podemos tentar calcular a derivadas da composta

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0).$$

- Para tanto basta considerar as curva obtidas ao fixamos uma das variáveis:

$$\gamma(t) = \big(g(t,y_0),h(t,y_0)\big) \quad \text{e} \quad \eta(t) = \big(g(x_0,t),h(x_0,t)\big).$$

A intuição disso você vê na aula.

# A fórmula

- Temos então que

$$\gamma'(x_0) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial h}{\partial x}(x_0, y_0)\right)$$
$$\eta'(y_0) = \left(\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0), \frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0)\right).$$

- Usando regra da cadeia anterior, vem que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = \left\langle \nabla f(u_0, v_0), \gamma'(x_0)\right\rangle$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = \left\langle \nabla f(u_0, v_0), \eta'(y_0)\right\rangle.$$

- Explicitamente:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0)\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)\frac{\partial h}{\partial x}(x_0, y_0)$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0)\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)\frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0).$$

# Exemplos

- Escrevendo $u = g(x, y)$ e $v = h(x, y)$ e omitindo os pontos de aplicação[1]):

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.}$$

- Seja $z(x, y) = f(x^2 - y^2, 2xy)$. Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial z}{\partial y}(x, y)$ em termos das derivadas parciais de $f$. Atenção aos pontos de aplicação!
- Desafio: estabeleça uma relação entre as derivadas parciais de uma função $f$ em coordenadas cartesianas com as suas derivadas parciais em coordenadas polares.

[1] Cuidado! Grandes poderes requerem grandes responsabilidades.

# Atividades

- Exercícios 2.1, 2.2 e 2.3 Lista 2

# Referências

- Aula presencial;
- H. L. Guidorrizi, *Um curso de Cálculo*, vol. 2, 5ª. edição, LTC - São Paulo, 2001. **Seções 10.1 e 14.1; 11.1, 11.2 e 11.3; 12.1**;
- J. Stewart, *Cálculo*, Vol. 2, 7ª. edição, Cengage-Learning - São Paulo, 2013. **Seção 14.3**.

# Até a próxima aula!

lymber@ime.usp.br