

# Linha de Transmissão Parte 2

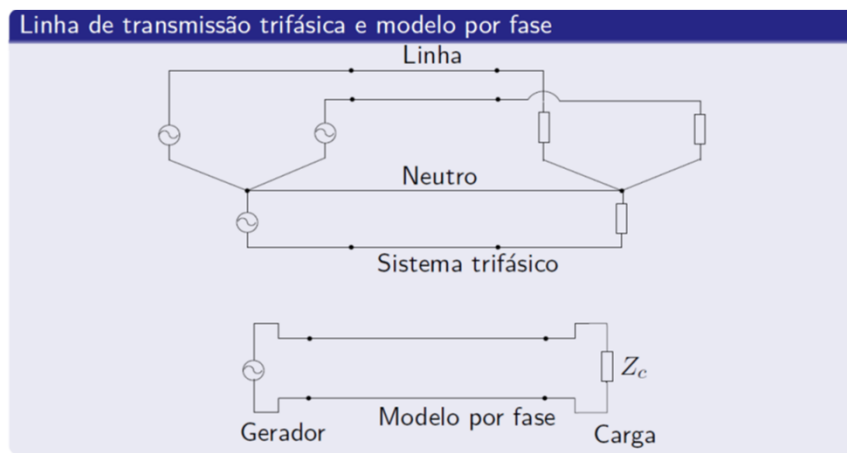
Eduardo Asada (EESC)

03/10/2018

SEL0331 – Análise Estática de Sistemas de energia  
Elétrica- AULA 5

1

## Linha de Transmissão – modelo por fase



03/10/2018

SEL0331 – Análise Estática de Sistemas de energia  
Elétrica- AULA 5

2

## Comprimento de onda

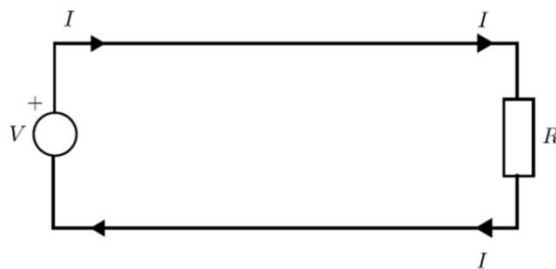
### Transmissão em corrente alternada

Comprimento das linhas varia entre alguns metros até em torno de mil quilômetros. O comprimento de onda ( $\lambda$ ) de um sinal senoidal de  $f = 60$  Hz que se propague com velocidade próxima a da luz é

$$\lambda = \frac{c}{f} \simeq \frac{3 \times 10^5}{60} \simeq 5000 \text{ km}$$

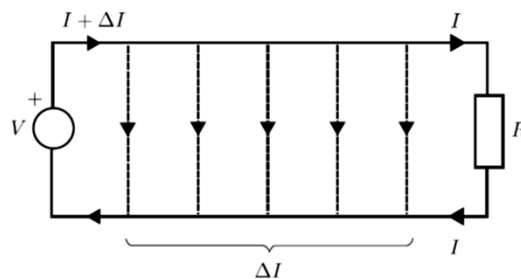
## Circuito CC

- Suponha uma fonte CC alimentando o circuito abaixo.
- Assumindo um condutor perfeito, a corrente  $I$  na saída do gerador será a mesma consumida na carga  $R$ , de intensidade  $V/R$ .



## Circuito CC – Derivação de corrente

- Se assumirmos um dielétrico imperfeito, a corrente na carga diferirá da corrente na saída do gerador, devido ao efeito de correntes 'parasitas'.
- A corrente será maior na saída do gerador e menor no ponto de conexão da carga.



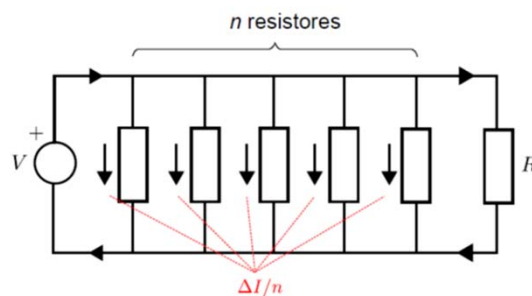
03/10/2018

SEL0331 – Análise Estática de Sistemas de energia Elétrica- AULA 5

5

## Circuito CA

- No caso de uma fonte CA, este efeito é produzido mesmo se o dielétrico for perfeito, devido ao efeito capacitivo entre os condutores.
- Podemos modelar este comportamento introduzindo-se admitâncias apropriadas ao longo dos condutores.



03/10/2018

SEL0331 – Análise Estática de Sistemas de energia Elétrica- AULA 5

6

## Modelos de linhas

- Uma linha de transmissão pode ser representada por uma sequência de segmentos contendo resistores e indutores em série (impedâncias série), e capacitores e resistores em paralelo (admitâncias paralelo).
- Circuitos desta forma são ditos modelados por parâmetros **distribuídos**.

03/10/2018

SEL0331 – Análise Estática de Sistemas de energia  
Elétrica- AULA 5

7

## Parâmetros distribuídos



Figura: LT subdividida em segmentos de comprimento  $\Delta x$

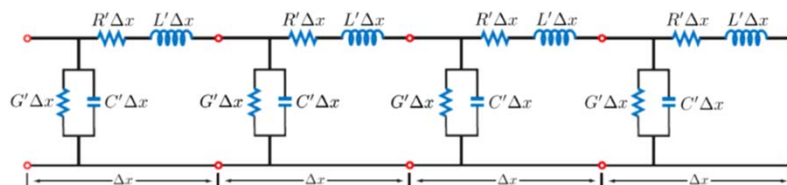


Figura: Circuito equivalente de cada seção

03/10/2018

SEL0331 – Análise Estática de Sistemas de energia  
Elétrica- AULA 5

8

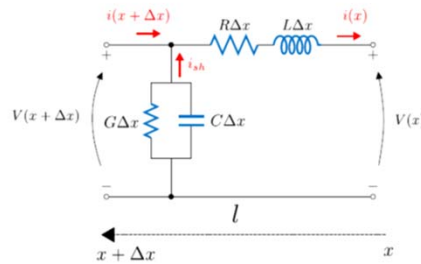
## Modelo incremental da linha – uma fase

$L$  - indutância por fase em [H/m]

$C$  - capacitância fase-neutro em [F/m]

$R$  - resistência em [ $\Omega$ /m] para uma fase

$G$  - condutância ( $G \simeq 0$ ) (para  $f$  entre 50 e 60 Hz) em um ponto qualquer  $x$  da linha [ $\Omega$ /m] para uma fase

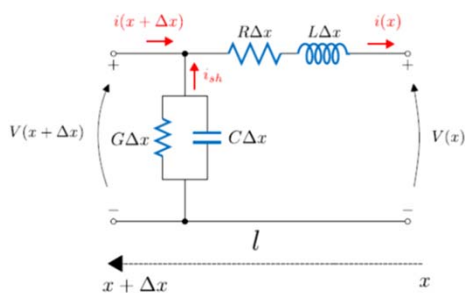


03/10/2018

SEL0331 – Análise Estática de Sistemas de energia Elétrica- AULA 5

9

## Modelo incremental - LTK



$$z = R + j\omega L \quad \Omega/m$$

$$y = G + j\omega C \quad S/m$$

Aplicando LTK, temos:

$$-V(x + \Delta x) + (z\Delta x)I(x) + V(x) = 0$$

Rearranjando:

$$\frac{V(x + \Delta x) - V(x)}{\Delta x} = zI(x)$$

No limite, quando  $\Delta x \rightarrow 0$ :

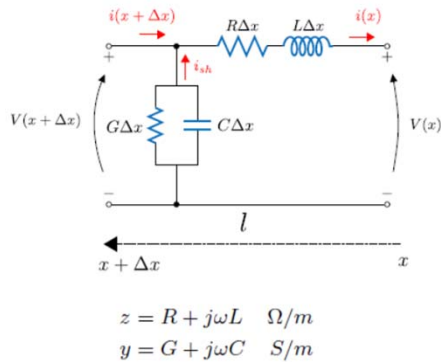
$$\frac{dV(x)}{dx} = zI(x) \quad (1)$$

03/10/2018

SEL0331 – Análise Estática de Sistemas de energia Elétrica- AULA 5

10

## Modelo Incremental - LCK



Aplicando **LCK**, temos:

$$I(x + \Delta x) - I(x) - (y\Delta x)V(x) = 0$$

Rearranjando:

$$\frac{I(x + \Delta x) - I(x)}{\Delta x} = yV(x)$$

No limite, quando  $\Delta x \rightarrow 0$ :

$$\frac{dI(x)}{dx} = yV(x) \quad (2)$$

## Equações de onda

- As equações (1) e (2) são eq. diferenciais lineares homogêneas de primeira ordem, nas variáveis  $V(x)$  e  $I(x)$ .
- Podemos eliminar a variável  $I(x)$  a partir da segunda derivada de (1), da seguinte forma:

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = z \frac{dI(x)}{dx} = zyV(x) \quad (3)$$

ou

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} - zyV(x) = 0 \quad (4)$$

Solução por inspeção:  $V(x) = A_1 e^{\gamma x} + A_2 e^{-\gamma x}$

sendo:  $\gamma = \sqrt{zy}$  (constante de propagação [ $m^{-1}$ ])

$A_1$  e  $A_2$  constantes de integração.

## Resolução das equações de onda

Derivando a eq. característica, e aplicando (1), temos:

$$\frac{dV(x)}{dx} = \gamma A_1 e^{\gamma x} - \gamma A_2 e^{-\gamma x} = zI(x) \quad (5)$$

Resolvendo para  $I(x)$ :

$$I(x) = \frac{A_1 e^{\gamma x} - A_2 e^{-\gamma x}}{z/\gamma} \quad (6)$$

Sendo  $z/\gamma = z/\sqrt{zy} = \sqrt{z/y} = Z_c$  a impedância característica ( $\Omega$ ), teremos:

$$I(x) = \frac{A_1 e^{\gamma x} - A_2 e^{-\gamma x}}{Z_c} \quad (7)$$

## Resolução – condições de contorno

Considera-se as condições de contorno em  $x = 0$  com a tensão e corrente ( $V_R$  e  $I_R$ ) conhecidas, isto é:

$$V_R = V(0) = A_1 + A_2 \quad (8)$$

$$I_R = I(0) = \frac{A_1 - A_2}{Z_c} \quad (9)$$

Resolvendo o sistema em função de  $A_1$  e  $A_2$ , a tensão em um ponto  $x$  da linha será dada por:

$$V(x) = \left( \frac{V_R + Z_c I_R}{2} \right) e^{\gamma x} + \left( \frac{V_R - Z_c I_R}{2} \right) e^{-\gamma x}$$

ou, em termos de  $V_R$  e  $I_R$ :

$$V(x) = \left( \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} \right) V_R + Z_c \left( \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} \right) I_R \quad (10)$$

## Resolução – tensão e corrente

De forma semelhante:

$$\begin{aligned} I(x) &= \left( \frac{V_R + Z_c I_R}{2Z_c} \right) e^{\gamma x} - \left( \frac{V_R - Z_c I_R}{2Z_c} \right) e^{-\gamma x} \\ &= \frac{1}{Z_c} \left( \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} \right) V_R + \left( \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} \right) I_R \end{aligned} \quad (11)$$

Reescrevendo como funções hiperbólicas:

$$V(x) = \cosh(\gamma x) V_R + Z_c \sinh(\gamma x) I_R \quad (12)$$

$$I(x) = \frac{1}{Z_c} \sinh(\gamma x) V_R + \cosh(\gamma x) I_R \quad (13)$$

03/10/2018

SEL0331 – Análise Estática de Sistemas de energia  
Elétrica- AULA 5

15

## Eq. de onda - Formulação Matricial

Em formato matricial:

$$\begin{bmatrix} V(x) \\ I(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(x) & B(x) \\ C(x) & D(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_R \\ I_R \end{bmatrix} \quad (14)$$

em que

$$A(x) = D(x) = \cosh(\gamma x) \quad \text{p.u.} \quad (15a)$$

$$B(x) = Z_c \sinh(\gamma x) \quad \Omega \quad (15b)$$

$$C(x) = \frac{1}{Z_c} \sinh(\gamma x) \quad \text{S} \quad (15c)$$

03/10/2018

SEL0331 – Análise Estática de Sistemas de energia  
Elétrica- AULA 5

16



## Equações de onda – formulação final

Finalmente, considerando que na posição terminal da linha ( $x = l$ ),  $V(x) = V_F$  e  $I(x) = I_F$ , obtemos o quadripolo equivalente monofásico da linha de transmissão (transposta, equilibrada):

$$\begin{bmatrix} V_F \\ I_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_R \\ I_R \end{bmatrix} \quad (16)$$

em que

$$A = D = \cosh(\gamma l) \quad \text{p.u.} \quad (17a)$$

$$B = Z_c \sinh(\gamma l) \quad \Omega \quad (17b)$$

$$C = \frac{1}{Z_c} \sinh(\gamma l) \quad \text{S} \quad (17c)$$

03/10/2018

SEL0331 – Análise Estática de Sistemas de energia  
Elétrica- AULA 5

17

## Exercício

### Parâmetros exatos $ABCD$ - linha longa

Uma linha de transmissão trifásica transposta, de extensão 300 km, 765 kV e 60 Hz, possui a seguinte admitância e impedância de sequência positiva:

$$z = 0,0165 + j0,3306 = 0,3310 \angle 87,14^\circ \quad \Omega/\text{km} \quad (18)$$

$$y = j4,674 \times 10^{-6} \quad \text{S}/\text{km} \quad (19)$$

Calcular os parâmetros  $ABCD$  de sequência-positiva da linha.

03/10/2018

SEL0331 – Análise Estática de Sistemas de energia  
Elétrica- AULA 5

18

## Exercício - solução

$$Z_c = \sqrt{\frac{0,3310 \angle 87,14^\circ}{4,674 \times 10^{-6} \angle 90^\circ}} = \sqrt{7,082 \times 10^4 \angle -2,86^\circ} = 266,1 \angle -1,43^\circ \Omega$$

$$\begin{aligned} \gamma l &= \sqrt{zyl} = \sqrt{(0,3310 \angle 87,14^\circ)(4,674 \times 10^{-6} \angle 90^\circ)} \times (300) \\ &= 0,3731 \angle 88,57^\circ = 0,00931 + j0,3730 \text{ p.u.} \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} e^{\gamma l} &= e^{0,00931} e^{j0,3730} = 1,0094 \angle 0,3730 = 0,9400 + j0,3678 \\ e^{-\gamma l} &= e^{-0,00931} e^{-j0,3730} = 0,9907 \angle -0,3730 = 0,9226 - j0,3610 \end{aligned}$$

03/10/2018

SEL0331 – Análise Estática de Sistemas de energia  
Elétrica- AULA 5

19

## Exercício - solução

Assim:

$$\begin{aligned} \cosh(\gamma l) &= \frac{(0,9400 + j0,3678) + (0,9226 - j0,3610)}{2} \\ &= 0,9313 + j0,0034 = 0,9313 \angle 0,209^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sinh(\gamma l) &= \frac{(0,9400 + j0,3678) - (0,9226 - j0,3610)}{2} \\ &= 0,0087 + j0,3644 = 0,3645 \angle 88,63^\circ \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} A = D &= \cosh(\gamma l) = 0,9313 \angle 0,209^\circ \text{ p.u.} \\ B &= (266,1 \angle -1,43^\circ)(0,3645 \angle 88,63^\circ) = 97,0 \angle 87,2^\circ \Omega \\ C &= \frac{0,3645 \angle 88,63^\circ}{266,1 \angle -1,43^\circ} = 1,37 \times 10^{-3} \angle 90,06^\circ \end{aligned}$$

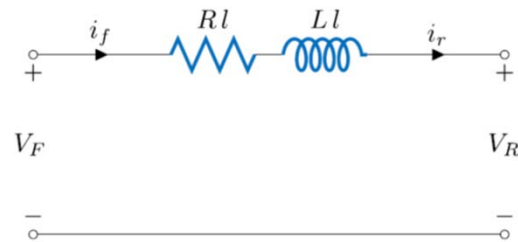
03/10/2018

SEL0331 – Análise Estática de Sistemas de energia  
Elétrica- AULA 5

20

## Linhas curtas

Em linhas curtas ( $l \leq 80$  km), a admitância em derivação é desconsiderada. O modelo resultante (LT monofásica ou trifásica transposta balanceada) pode ser aproximado por:



sendo  $(R + j\omega L)l = zl = Z$  a impedância série total.

## Linhas curtas – parâmetros ABCD

Os parâmetros  $ABCD$  para linhas curtas podem ser obtidos facilmente aplicando-se LTK e LCK:

$$V_F = V_R + ZI_R \quad (20)$$

$$I_F = I_R \quad (21)$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} V_F \\ I_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_R \\ I_R \end{bmatrix} \quad (22)$$

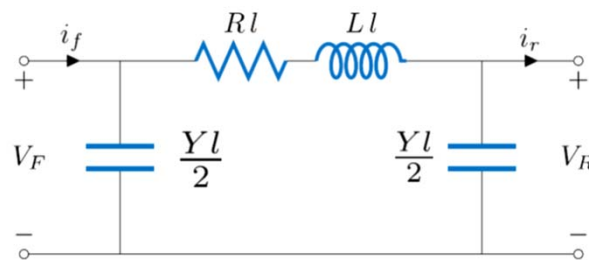
Logo,  $A = D = 1$  p.u.

$$B = Z \quad \Omega$$

$$C = 0 \quad S$$

## Linhas médias – Modelo $\pi$ nominal

Para Linhas médias (entre 80 e 250 km, com  $f = 60Hz$ ), costuma-se concentrar metade do valor total da admitância *shunt* em cada terminação da linha, originando o modelo chamado  $\pi$  nominal.



03/10/2018

SEL0331 – Análise Estática de Sistemas de energia  
Elétrica- AULA 5

23

## Modelo $\pi$ nominal – parâmetros ABCD

Para a obtenção dos parâmetros  $ABCD$  deste circuito, aplica-se novamente LTK e LCK:

$$V_F = V_R + Z \left( I_R + \frac{V_R Y}{2} \right) = \left( 1 + \frac{YZ}{2} \right) V_R + Z I_R \quad (23)$$

$$\begin{aligned} I_F &= I_R + \frac{V_R Y}{2} + \frac{V_F Y}{2} = I_R + \frac{V_R Y}{2} + \left[ \left( 1 + \frac{YZ}{2} \right) V_R + Z I_R \right] \frac{Y}{2} \\ &= Y \left( 1 + \frac{YZ}{4} \right) V_R + Y \left( 1 + \frac{YZ}{2} \right) I_R \end{aligned} \quad (24)$$

03/10/2018

SEL0331 – Análise Estática de Sistemas de energia  
Elétrica- AULA 5

24

## Modelo $\pi$ nominal – notação matricial

Escrevendo em notação matricial:

$$\begin{bmatrix} V_F \\ I_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{YZ}{2}\right) & Z \\ Y \left(1 + \frac{YZ}{4}\right) & \left(1 + \frac{YZ}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_R \\ I_R \end{bmatrix} \quad (25)$$

Assim,

$$A = D = 1 + \frac{YZ}{2} \text{ p.u.} \quad (26a)$$

$$B = Z \ \Omega \quad (26b)$$

$$C = Y \left(1 + \frac{YZ}{4}\right) \text{ S} \quad (26c)$$

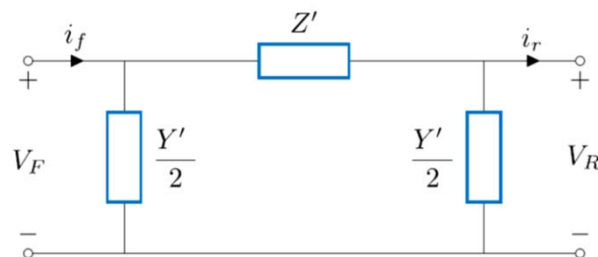
03/10/2018

SEL0331 – Análise Estática de Sistemas de energia  
Elétrica- AULA 5

25

## Linhas longas

- Para cálculos apurados envolvendo linhas longas ( $l \geq 250$  km,  $f = 60$  Hz), as equações do modelo exato devem ser utilizadas.
- É possível, no entanto, determinar um modelo **equivalente  $\pi$**  a partir dos parâmetros do modelo completo. (26a)-(26c) e (17a)-(17c):



03/10/2018

SEL0331 – Análise Estática de Sistemas de energia  
Elétrica- AULA 5

26

## Parâmetro de modelo equivalente

Comparando-se a equações (26a)-(26c) e (17a)-(17c):

$$B = Z' = Z_c \sinh(\gamma l) \quad (27)$$

$$A = D = 1 + \frac{Y' Z'}{2} = \cosh(\gamma l) \quad (28)$$

A partir de (27):

$$\begin{aligned} Z' = Z_c \sinh(\gamma l) &= \sqrt{\frac{z}{y}} \sinh(\gamma l) = z l \left[ \sqrt{\frac{z}{y}} \frac{\sinh(\gamma l)}{z l} \right] = z l \left[ \frac{\sinh(\gamma l)}{\sqrt{z y} l} \right] \\ &= Z F_1 \quad \Omega \end{aligned} \quad (29)$$

onde  $F_1 = \frac{\sinh(\gamma l)}{\gamma l}$ .

03/10/2018

SEL0331 – Análise Estática de Sistemas de energia  
Elétrica- AULA 5

27

## Parâmetros de modelo equivalente

A partir de (28):

$$\frac{Y'}{2} = \frac{\cosh(\gamma l) - 1}{Z'} = \frac{\cosh(\gamma l) - 1}{Z_c \sinh \gamma l} = \frac{\tanh(\gamma l/2)}{Z_c} = \frac{\tanh(\gamma l/2)}{\sqrt{\frac{z}{y}}} \quad (30)$$

Rearranjando em termos da admitância do circuito  $\pi$  nominal,  $Y = yl$ :

$$\frac{Y'}{2} = \frac{yl}{2} \left[ \frac{\tanh(\gamma l/2)}{\sqrt{\frac{z}{y}} \frac{yl}{2}} \right] = \frac{yl}{2} \left[ \frac{\tanh(\gamma l/2)}{\sqrt{z y} l/2} \right] = \frac{Y}{2} F_2 \quad S \quad (31)$$

com  $F_2 = \frac{\tanh(\gamma l/2)}{\gamma l/2}$ .

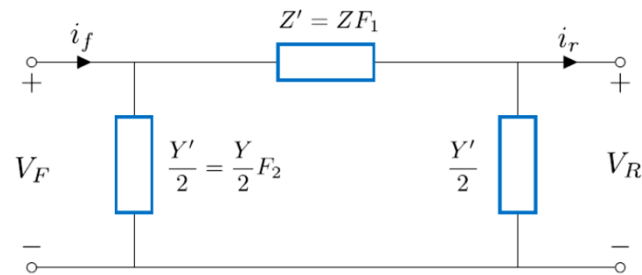
03/10/2018

SEL0331 – Análise Estática de Sistemas de energia  
Elétrica- AULA 5

28

## Modelo $\pi$ equivalente

- Desta forma,  $F_1$  e  $F_2$  são fatores para conversão dos parâmetros  $Z$  e  $Y$  do modelo  $\pi$  nominal para os parâmetros  $Z'$  e  $Y'$  do modelo  $\pi$  equivalente.



03/10/2018

SEL0331 – Análise Estática de Sistemas de energia  
Elétrica- AULA 5

29

## Modelos de linhas de transmissão

Resumo:

Parâmetro	$A = D$	$B$	$C$
Unidade	p.u.	$\Omega$	S
Linha curta	1	$Z$	0
Linha média	$1 + \frac{YZ}{2}$	$Z$	$Y \left( 1 + \frac{YZ}{2} \right)$
Linha longa ( $\pi$ equivalente)	$\cosh(\gamma l) = 1 + \frac{Y'Z'}{2}$	$Z_c \sinh(\gamma l) = Z'$	$(1/Z_c) \sinh(\gamma l)$

03/10/2018

SEL0331 – Análise Estática de Sistemas de energia  
Elétrica- AULA 5

30

## Revisão

### Resumo: Linhas de Transmissão

Para a Análise Estática do sistema de potência, as linhas de transmissão são representadas por um circuito elétrico equivalente ( $\pi$ ) por fase, com:

$$\text{Impedância série: } Z_{se} = R_{se} + jX_{se}$$

$$\text{Admitâncias shunt: } Y_{sh} = jB_{sh}$$

## Exercício

### Exemplo - linha sem perdas

Determine a impedância característica da linha e a constante de propagação

Linha trifásica com:

- $G = R = 0$
- $L = 1,293 \times 10^{-6}$  [H/m/fase]
- $C = 8,948 \times 10^{-12}$  [F/m/fase]
- Comprimento:  $\ell = 362$  km;  $f=60$  Hz.

$$\omega = 2\pi \times 60 = 376.99 \text{ rad/s}$$

$$Z_c = \sqrt{(R + j\omega L)/(G + j\omega C)} = \sqrt{L/C} = 380,1336 \text{ } \Omega$$

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(-w^2 LC)} = j\omega\sqrt{LC} = j 1.2823 \times 10^{-6} \text{ 1/m}$$



## Exercício 2

Considere uma linha do exercício anterior sem perdas e “casada”

- Obtenha a expressão da tensão para uma posição  $\ell$  da linha.
- Obtenha a velocidade de propagação da onda
- Obtenha o comprimento da onda.

## Exercício 3

**Linha muito longa**

Considere o modelo de linha longa. Considerando os parâmetros do exemplo anterior, Se a linha tivesse um comprimento de 1225 km, como ficaria o circuito equivalente ?

## Transformadores de potência

- Transformador elevador (step-up transformer)
- Transformador abaixador (step-down transformer)
- Transformador regulador (regulating transformer)
  - Relação approx 1:1
  - Defasagem entrada-saída

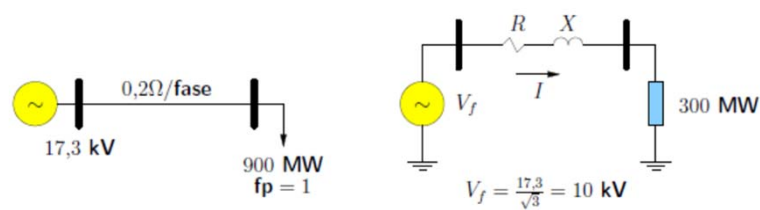
03/10/2018

SEL0331 – Análise Estática de Sistemas de energia  
Elétrica- AULA 5

35

## Vantagens no uso de transformadores

- Considere o diagrama unifilar do circuito trifásico e seu respectivo circuito por fase



03/10/2018

SEL0331 – Análise Estática de Sistemas de energia  
Elétrica- AULA 5

36

## Comparativo de perdas

- Perdas de potência ativa por fase na linha de transmissão:

$$P_p = R|I|^2$$

- Potência ativa por fase fornecida pela fonte:

$$P_\phi = |V_f||I| \text{fp}$$

se fp = 1

$$= |V_f||I| \rightarrow |I| = \frac{P_\phi}{|V_f|}$$

03/10/2018

SEL0331 – Análise Estática de Sistemas de energia  
Elétrica- AULA 5

37

## Coeficiente de perdas

$$\eta = \frac{P_p}{P_\phi} = \frac{R|I|^2}{P_\phi} = \frac{R \left( \frac{P_\phi}{|V_f|} \right)^2}{P_\phi} = \frac{RP_\phi}{|V_f|^2}$$

- Quanto maior a tensão de transmissão, menor o coeficiente de perdas
- Para o circuito trifásico:

$$\eta = \frac{0,2.300.10^6}{(10.10^3)^2} = 0,6$$

Coeficiente de perdas é 60%

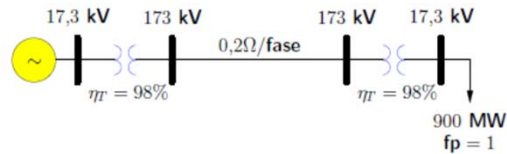
03/10/2018

SEL0331 – Análise Estática de Sistemas de energia  
Elétrica- AULA 5

38

## Caso 2

- Considere que a transmissão é realizada com tensão 10x maior



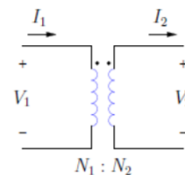
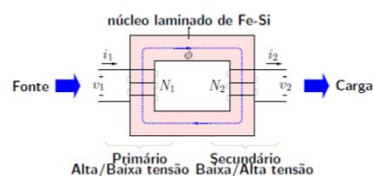
Coeficiente de perdas na linha:

$$\eta_{LT} = \frac{0,2 \cdot 300 \cdot 10^6}{(100 \cdot 10^3)^2} = 0,006$$

Na realidade deve-se considerar também o desempenho do transformador

## Transformador monofásico ideal

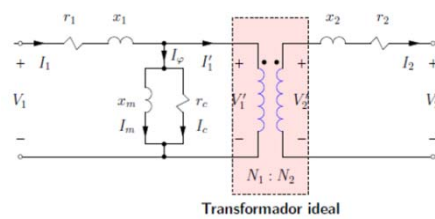
- Sem perdas ôhmicas
- Sem dispersão do fluxo magnético
- Sem perdas no núcleo
- Permeabilidade magnética do núcleo infinita



Modelo equivalente ideal

## Transformador monofásico real

- Perda ôhmica nos enrolamentos
- Perdas no núcleo
- Dispersão de fluxo
- Corrente de magnetização



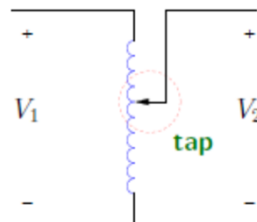
03/10/2018

SEL0331 – Análise Estática de Sistemas de energia  
Elétrica- AULA 5

41

## Autotransformador

- Apresenta maior eficiência
- Não pode ser usado quando a separação física entre os enrolamentos for necessária.



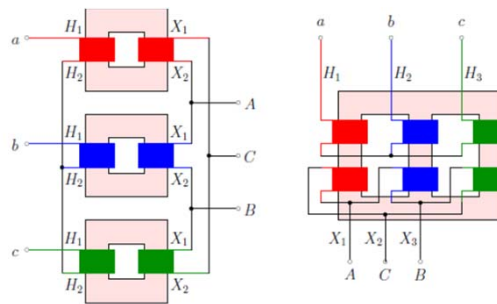
03/10/2018

SEL0331 – Análise Estática de Sistemas de energia  
Elétrica- AULA 5

42

## Transformador trifásico

- Banco Trifásico ou Transformador trifásico

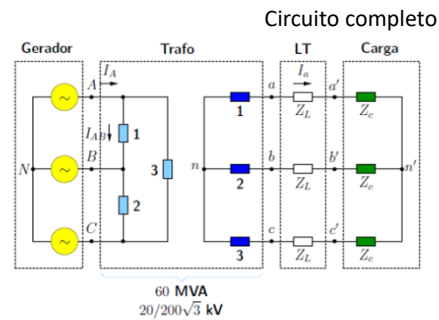
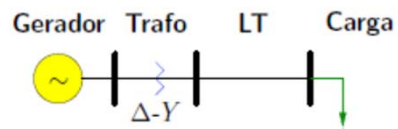


Normalmente H – Alta Tensão, X – baixa tensão

## Transformadores trifásicos

- Ligação  $Y - \Delta$  : Mais utilizada em transformadores abaixadores de tensão
- Ligação  $\Delta - Y$  : Mais utilizada em transformadores elevadores de tensão
- Ligação  $\Delta - \Delta$  : Permite ligação Delta aberto ou V-V
- Ligação  $Y - Y$  : Ligação pouco usada porque terças harmônicas de correntes de excitação introduzem distorções nas formas de onda

## Diagrama unifilar e circuito completo

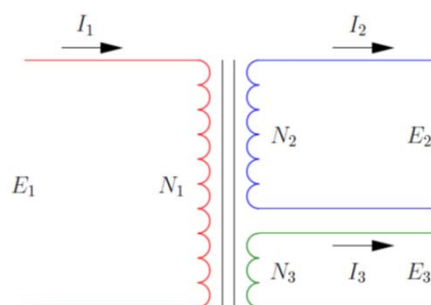


03/10/2018

SEL0331 – Análise Estática de Sistemas de energia Elétrica- AULA 5

45

## Transformadores de três enrolamentos



Terceiro enrolamento:

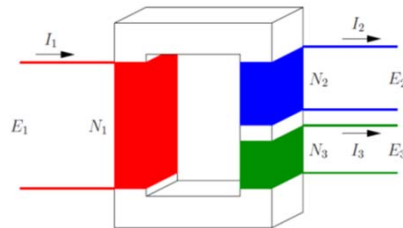
1. Baixa tensão
2. Pode se conectado a fonte suporte de potência reativa
3. Pode ser utilizado para a alimentação da subestação
4. Pode capturar harmônicas e correntes de seq. zero devido ao desbalanceamento de carga

03/10/2018

SEL0331 – Análise Estática de Sistemas de energia Elétrica- AULA 5

46

## Transformador de três enrolamentos



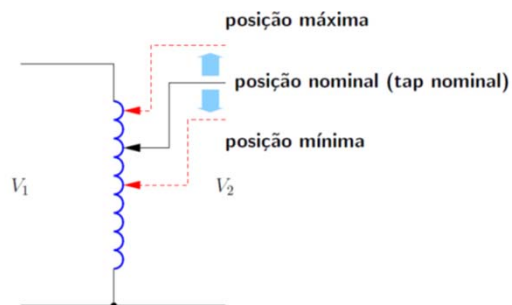
03/10/2018

SEL0331 – Análise Estática de Sistemas de energia  
Elétrica- AULA 5

47

## Transformadores com tap variável

Conversão de níveis de tensão  
 Controle de tensão  
 Algumas possuem relação de espiras variável



03/10/2018

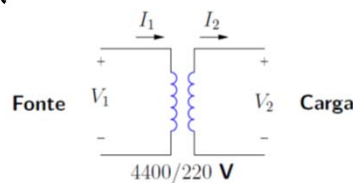
SEL0331 – Análise Estática de Sistemas de energia  
Elétrica- AULA 5

48



## Transformador monofásico em pu

- Ex: transformador monofásico ideal de 4400/220 V. 22 kVA. Alimenta uma carga nominal no lado de baixa tensão. Obter o circuito e pu
- Primário e secundário são eletricamente isolados (valores de base podem ser escolhidos de maneira independente)



03/10/2018

SEL0331 – Análise Estática de Sistemas de energia  
Elétrica- AULA 5

49

## Resolução em pu

- Se as tensões base  $V_{b1}$  e  $V_{b2}$  tais que  $\frac{V_{b1}}{V_{b2}} = a$ . Como potência de entrada deve ser igual para os dois lados.

$$\begin{aligned} V_{b1} &= 4400 \text{ V} \\ V_{b2} &= 220 \text{ V} \\ S_b &= 22 \text{ kVA} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{b1} &= \frac{S_b}{V_{b1}} = 5 \text{ A} \\ I_{b2} &= \frac{S_b}{V_{b2}} = 100 \text{ A} \\ \frac{I_{b1}}{I_{b2}} &= \frac{1}{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{b1} &= \frac{V_{b1}}{I_{b1}} = 880 \Omega \\ Z_{b2} &= \frac{V_{b2}}{I_{b2}} = 2,2 \Omega \end{aligned}$$

Se uma corrente no enrolamento de alta tensão é colocada em pu, como fica?

03/10/2018

SEL0331 – Análise Estática de Sistemas de energia  
Elétrica- AULA 5

50

## Corrente

$$\bullet i_1 = \frac{I_1}{I_{b1}} = \frac{\frac{I_2}{a}}{\frac{I_{b2}}{a}} = \frac{I_2}{I_{b2}} = i_2$$

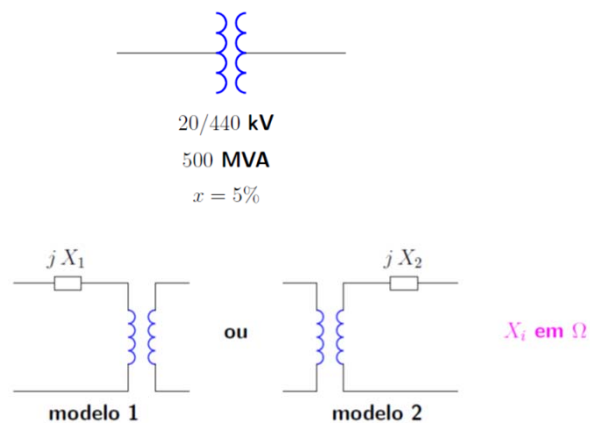
- Como ficam as tensões e impedância ?
  - Tanto as tensões como as impedâncias em pu são iguais nos dois enrolamentos.
  - Em pu o transformador passa a ter uma relação de transformação igual a um

03/10/2018

SEL0331 – Análise Estática de Sistemas de energia  
Elétrica- AULA 5

51

## Exemplo

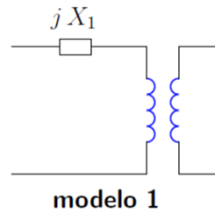


03/10/2018

SEL0331 – Análise Estática de Sistemas de energia  
Elétrica- AULA 5

52

## Modelo 1



$$V_{b2} = 20 \text{ kV e } S_b = 500 \text{ MVA}$$

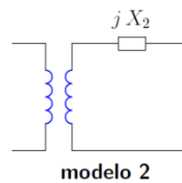
$$X_1 = xZ_{b1} = \frac{xV_{b1}^2}{S_b} = \frac{0,05 \cdot 20^2}{500} = 0,04 \Omega$$

03/10/2018

SEL0331 – Análise Estática de Sistemas de energia  
Elétrica- AULA 5

53

## Modelo 2



$$X_2 = xZ_{b2} = \frac{xV_{b2}^2}{S_b}$$

$$= \frac{0,05 \cdot 440^2}{500} = 19,36 \Omega$$

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{0,04}{19,36} = 0,002066 = \frac{20^2}{440^2} = a^2$$

e os valores em pu serão os mesmos desde que os valores de base adequados sejam escolhidos  
Se

$V_{b1} = 25 \text{ kV } S_b = 250 \text{ MVA}, x^{novo} = 0,016 \text{ pu. Por que ?}$

03/10/2018

SEL0331 – Análise Estática de Sistemas de energia  
Elétrica- AULA 5

54

## Transformadores trifásicos em pu

- Dados de placa (nominais) do Trafo monofásico:  
 $V_1, V_2, S, z_T$  (pu ou %, base nominal)
- Dados de placa (nominais) do Trafo trifásico:  
 $V_{1L}, V_{2L}, S_3, z_T$  (pu ou %, de fase)
- Ideia básica: escolher os valores de base iguais aos valores nominais do Trafo

## Banco trifásico de transformadores ligados em Y-Y

- Para cada Trafo monofásico do banco tem-se:  
 $V_1, V_2, S, z_T$
- Para o banco trifásico tem-se os valores de base
- $V_{b1} = V_{N1} = \sqrt{3}V_1$
- $V_{b2} = V_{N2} = \sqrt{3}V_2$
- $S_b = 3S = S_{3\phi}$
- Para as bases escolhidas, a impedância do circuito equivalente do Trafo trifásico em pu é igual a  $z_T$

## Banco trifásico de transformadores ligados em $Y - \Delta$

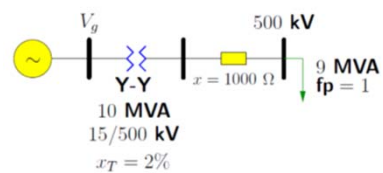
- Os valores de base para o banco são:
- $V_{b1} = V_{N1} = \sqrt{3}V_1$
- $V_{b2} = V_{N2} = V_2$
- $S_b = 3S = S_{3\phi}$
- A impedância do circuito equivalente do Trafo trifásico em pu é igual a  $z_T$

03/10/2018

SEL0331 – Análise Estática de Sistemas de energia  
Elétrica- AULA 5

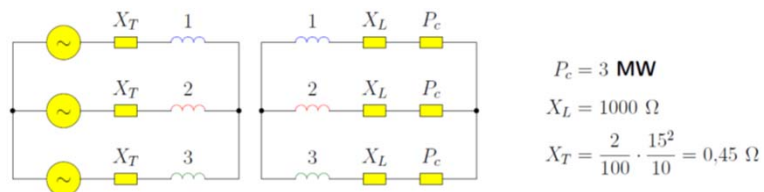
57

## Exemplo



Calcule a tensão  $V_g$  no barramento do gerador e o fator de potência visto do gerador

Circuito trifásico:

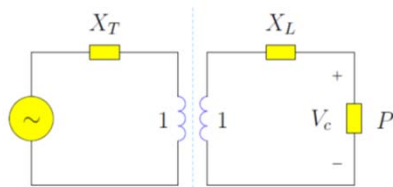


03/10/2018

SEL0331 – Análise Estática de Sistemas de energia  
Elétrica- AULA 5

58

## Circuito por fase



$$15/\sqrt{3} : 500/\sqrt{3} \text{ kV}$$

$$10/3 \text{ MVA}$$

Área 1    Área 2

$$V_c = 500/\sqrt{3} \angle 0^\circ \text{ kV} \quad (\text{ref. angular})$$

$$\text{Área 1} : S_b = 10/3 \text{ MVA} \quad \rightarrow \quad Z_{b1} = 22,5 \Omega$$

$$V_{b1} = 15/\sqrt{3} \text{ kV} \quad I_{b1} = 384,9 \text{ A}$$

$$\text{Área 2} : S_b = 10/3 \text{ MVA} \quad \rightarrow \quad Z_{b2} = 25 \text{ k}\Omega$$

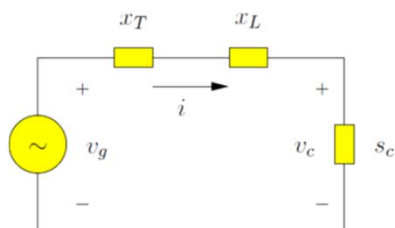
$$V_{b2} = 500/\sqrt{3} \text{ kV} \quad I_{b2} = 11,55 \text{ A}$$

03/10/2018

SEL0331 – Análise Estática de Sistemas de energia  
Elétrica- AULA 5

59

## Circuito em pu



$$v_c = 1 \angle 0^\circ \text{ pu}$$

$$s_c = \frac{3}{10/3} = 0,9 \angle 0^\circ \text{ pu}$$

$$x_L = \frac{1000}{25000} = 0,04 \text{ pu}$$

$$x_T = \frac{0,45}{22,5} = 0,02 \text{ pu}$$

$$i = (s_c/v_c)^* = 0,9 \angle 0^\circ \text{ pu} \quad (346,4 \text{ A no primário e } 10,4 \text{ A no secundário})$$

$$v_g = v_c + j(x_T + x_L)i = 1,0015 \angle 3,1^\circ \text{ pu}$$

$$\text{fp} = \cos(3,1^\circ - 0^\circ) = 0,9985 \text{ (indutivo)}$$

03/10/2018

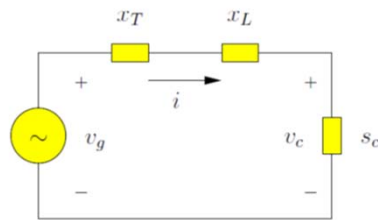
SEL0331 – Análise Estática de Sistemas de energia  
Elétrica- AULA 5

60

## Forma direta de resolver

$$\begin{array}{l}
 V_{b1} = 15 \text{ kV} \\
 V_{b2} = 500 \text{ kV} \\
 S_b = 10 \text{ MVA}
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{l}
 Z_{b1} = 22,5 \ \Omega \\
 Z_{b2} = 25 \text{ k}\Omega
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{l}
 I_{b1} = \frac{S_b}{\sqrt{3}V_{b1}} = 384,9 \text{ A} \\
 I_{b2} = \frac{S_b}{\sqrt{3}V_{b2}} = 11,55 \text{ A}
 \end{array}$$

Circuito em pu (direto a partir do diagrama unifilar):



$$\begin{array}{l}
 x_T = 0,02 \text{ pu} \\
 x_L = \frac{1000}{25000} = 0,04 \text{ pu} \\
 v_c = 1 \angle 0^\circ \text{ pu} \\
 s_c = \frac{9}{10} = 0,9 \angle 0^\circ \text{ pu}
 \end{array}$$

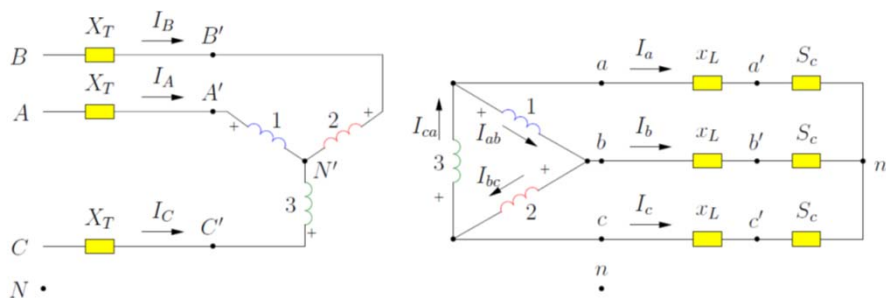
Não é necessário obter o modelo por fase !!!!

03/10/2018

SEL0331 – Análise Estática de Sistemas de energia  
Elétrica- AULA 5

61

Exercício: Resolva o mesmo problema anterior considerando o transformador com ligação  $Y - \Delta$



em que  $S_c = 3 \angle 0^\circ \text{ MVA}$ .

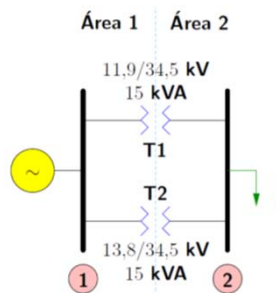
03/10/2018

SEL0331 – Análise Estática de Sistemas de energia  
Elétrica- AULA 5

62

## Transformador em pu com relação 1: $\alpha$

- Com bases adequadas busca-se eliminar o transformador ideal mantendo os seus parâmetros
- Em alguns casos essa eliminação não é possível
- Exemplo:

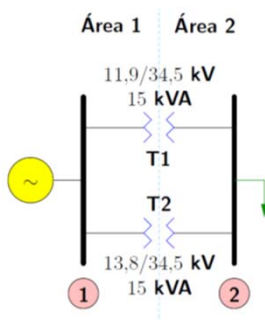


03/10/2018

SEL0331 – Análise Estática de Sistemas de energia  
Elétrica- AULA 5

63

## Choque de base



Tomando T1 como referência,  
 $S_b = 15 \text{ kVA}$ ,  $V_{b1} = 11,9 \text{ kV}$  e  $V_{b2} = 34,5 \text{ kV}$ ,  
 logo T1 é eliminado

Para o lado de baixa de T2 a tensão nominal é diferente de  $V_{b1}$ , embora faça parte da Área 1. Logo adota-se uma relação 1: $\alpha$  em pu

Se  $v_1$  e  $v_2$  são tensões em pu dos barramentos 1 e 2, temos que

$$V_1 = v_1 V_{b1} \text{ e } V_2 = v_2 V_{b2}$$

03/10/2018

SEL0331 – Análise Estática de Sistemas de energia  
Elétrica- AULA 5

64



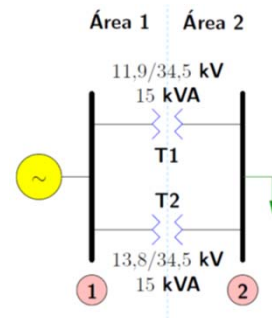
## Choque de base

Relação entre tensões deve ser igual à relação de transformação de T2

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{v_1 V_{b1}}{v_2 V_{b2}} = a_2 = \frac{13,8}{34,5} = 0,4$$

Logo:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{0,4 V_{b2}}{V_{b1}} = 0,4 \cdot \frac{34,5}{11,9} = 1,16 = \frac{1}{0,86} \rightarrow v_1 = \frac{1}{0,86} v_2$$

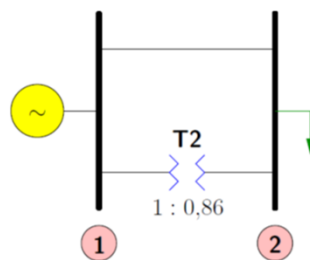


03/10/2018

SEL0331 – Análise Estática de Sistemas de energia  
Elétrica- AULA 5

65

## Circuito em pu



Observe que neste modelo não é possível eliminar T2

03/10/2018

SEL0331 – Análise Estática de Sistemas de energia  
Elétrica- AULA 5

66

## Transformadores com Tap variável

- Posição do tap é alterada
- Deve-se manter as bases de tensão fixas e representar o autotrafo com tap fora do nominal através de um Trafo com relação  $1:\alpha$