S T Q Q S S D __/__/__

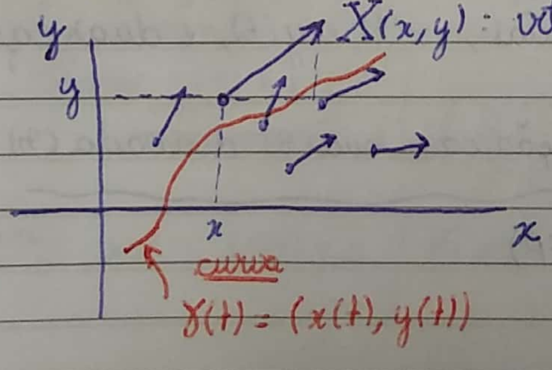
11/09
Monitoria
Nathália
Sextas 13, 20, 27
266 Bloco A - IME
terça 01.10
259 Bloco A - IME
13h - 14h

De hoje até a P1
- um pouco de equações diferenciais ordinárias
- Método de Newton
} ⇒ EP

ATENÇÃO: fica revogada resolução anterior sobre matéria da P1.

O que é uma equação diferencial?
(OBS: aqui, uma equação em vez de um sistema de equações)

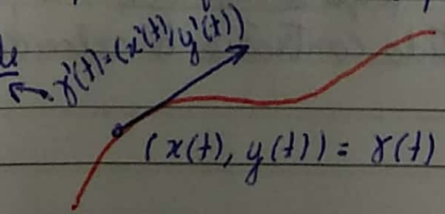
Campo Vetorial



$X(x,y)$: vetor que depende do ponto (dado)

Equação diferencial: diz quais são as curvas permitidas impondo que o vetor tangente (velocidade) da curva em cada ponto coincida com o vetor do campo naquele mesmo ponto.

vetor velocidade



Esse vetor velocidade tem que ser o vetor do campo no mesmo ponto:

$$\boxed{\gamma'(t) = X(\gamma(t))} \quad (*)$$

<u>Em coordenadas</u>

$$\underbrace{X(x,y)}_{\in \mathbb{R}^2} = \big(\underbrace{X_1(x,y)}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{X_2(x,y)}_{\in \mathbb{R}}\big)$$

(*) em coordenadas:

$$(x'(t), y'(t)) = \big(X_1(x(t), y(t)), X_2(x(t), y(t))\big)$$

Equivalente a:

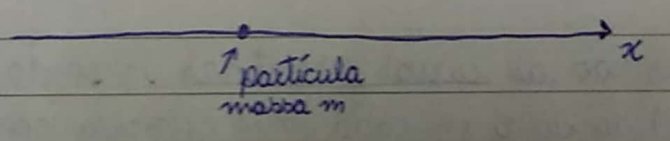
$$\begin{cases} x'(t) = X_1(x(t), y(t)) \\ y'(t) = X_2(x(t), y(t)) \end{cases} \quad (**)$$

Em (*), X é dado e $\gamma(t)$ é a função incógnita e a equação relaciona a própria função com sua derivada, de forma implícita.

No sistema, são duas funções incógnitas, $x(t)$ e $y(t)$, e duas equações.

"diferencial": porque relaciona a função com sua(s) derivada(s).

<u>Exemplo comum na Física</u> (e do EP)



$F(x)$ = força dependente da posição + força <u>dissipativa</u> F_d proporcional à velocidade da partícula e em sentido contrário à velocidade.

S T Q Q S S D

__/__/__

Lei de Newton (2ª)

$x(t)$: posição em função do tempo

$x'(t)$: velocidade "

$x''(t)$: aceleração "

$$m x''(t) = F(x(t)) - \overbrace{\alpha x'(t)}^{Fd} \quad (***)$$

(é uma equação diferencial de 2ª ordem, pois envolve a 2ª derivada)

Obs Em geral, uma equação diferencial é apresentada sem exibir a variável t.

(*) $\gamma' = X(\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{R}^2$

(**) $\begin{cases} x' = X_1(x,y) \\ y' = X_2(x,y) \end{cases}$ $X_1, X_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

(***) $m x'' = F(x) - \alpha x'$, $x \in \mathbb{R}$

"Truque" p/ transformar uma eq. de 2ª ordem em duas de 1ª ordem (um sistema).

1 incógnita: $x(t)$

outra incógnita: $x'(t)$, como se fosse independente

Chame $\underbrace{y(t)}_{\text{nova incógnita}} = x'(t)$ | já será uma equação: $\boxed{x'(t) = y(t)}$

(***) vira: $y'(t) = \frac{1}{m}\left[F(x(t)) - \alpha y(t)\right]$

SISTEMA

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = \frac{1}{m}\left[F(x(t)) - \alpha y(t)\right] \end{cases}$$

spiral

__/__/__

S T Q Q S S D

Notação compacta:

$$\left\{\begin{array}{l} x' = y \qquad\qquad\qquad = X_1(x,y) \\ y' = \frac{1}{m}\left[F(x) - \alpha y\right] = X_2(x,y) \end{array}\right.$$

CONDIÇÕES INICIAIS

Se X_1 e X_2 forem razoavelmente regulares (p. ex. deriváveis com derivada contínua), a imposição de condições iniciais determina a solução unicamente (na teoria)

Condições iniciais

Dizer onde a curva γ começa!

$$\gamma(0) = (x(0), y(0)) = \underbrace{(x_0, y_0)}_{\text{ponto dado}}$$

ou t_0

No exemplo

$$(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$$

$$y(0) = x'(0)$$

Ou seja, numa equação de 2ª ordem, é preciso dar a posição inicial x_0 e a velocidade inicial y_0.

Método de Euler

método mais simples para obter aproximações das soluções de uma equação diferencial

OBS

Problema de Cauchy: eq. diferencial + condição inicial

$$\left\{\begin{array}{l} x' = X_1(x,y) \\ y' = X_2(x,y) \end{array}\right. \qquad (x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$$

S T Q Q S S D

__/__/__

discretização do tempo:

$$\begin{cases} t_0 = 0,\ t_1 = t_0 + h,\ t_2 = t_1 + h, \ldots \\ t_0 = 0,\ t_1 = h,\ t_2 = 2h, \ldots, t_n = nh \\ (\text{se } t \neq 0,\ t_n = t_0 + nh) \end{cases}$$

$\boxed{h: \text{passo}}$

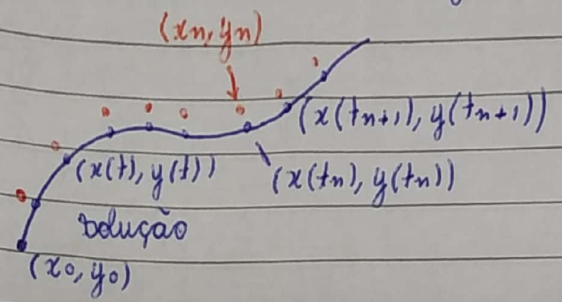
Objetivo: Obter aproximações para

$(x(t_0), y(t_0)), (x(t_1), y(t_1)), (x(t_2), y(t_2)), \ldots$
$\ldots, (x(t_n), y(t_n)), \ldots$] verdadeiros

Aproximações serão:

$[\underbrace{(x_0, y_0)}_{\text{dado}}, (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots]$ aprox

Como se relacionam $(x(t_{n+1}), y(t_{n+1}))$ e $(x(t_n), y(t_n))$



$$x(t_{n+1}) = x(t_n + h) = x(t_n) + x'(t_n) \cdot h + O(h^2)$$
$$y(t_{n+1}) = y(t_n + h) = y(t_n) + y'(t_n) \cdot h + O(h^2)$$

Taylor de 1ª ordem

Ou seja:

$$\begin{cases} x(t_{n+1}) \simeq x(t_n) + hx'(t_n) \\ y(t_{n+1}) \simeq y(t_n) + hy'(t_n) \end{cases}$$

Mas

$$x'(t_n) = X_1(x(t_n), y(t_n))$$
$$y'(t_n) = X_2(x(t_n), y(t_n))$$

$x(t_{n+1}) \simeq x(t_n) + h X_1(x(t_n), y(t_n))$
$y(t_{n+1}) \simeq y(t_n) + h X_2(x(t_n), y(t_n))$

Definição do Método de Euler

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h X_1(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + h X_2(x_n, y_n) \end{cases}$$

fórmula de recorrência (ITERAÇÃO)

Método p/ implementar no EP

Scanned by CamScanner