MAT-2454 – Cálculo II
Aulas 09 e 10: Derivadas Parciais
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Alexandre Lymberopoulos

Para Escola Politécnica – USP

IME–USP — Departamento de Matemática

Ordem do dia

Derivadas Parciais: conceitos

- Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função.
- A ideia é estudar o comportamento de f permitindo variação no domínio em direção paralela a um dos eixos coordenados;
- ou seja, "travamos" todas demais variáveis (se f tiver mais de duas variáveis):

$$g(x) = f(x, y_0) \qquad \text{e} \qquad h(y) = f(x_0, y)$$

- As derivadas parciais de f em (x_0, y_0) são, respectivamente as derivadas $g'(x_0)$ e $h'(y_0)$.
- Formalmente temos

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}}$$

- Outra notação: $f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Interpretação Geométrica

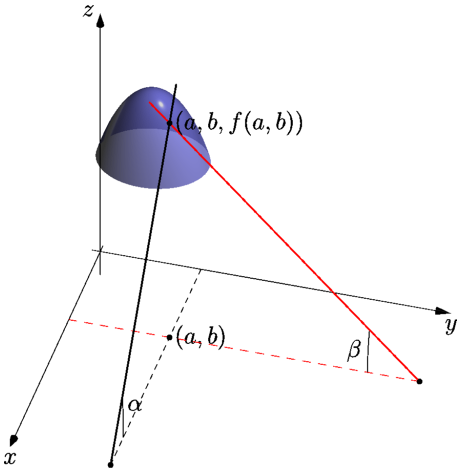


Figura: $\tan(\pi - \alpha) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\tan(\pi - \beta) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Exemplos

- Considere $f(x,y) = 2xy - 4y$ e determine $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$, $f_x(1,1)$ e $f_y(1,1)$.
  Pela definição temos

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2(x+h)y - 4y - (2xy - 4y)}{h} = 2y \\ f_y(x,y) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2x(y+h) - 4y - (2xy - 4(y+h))}{h} = 2x - 4 \end{aligned}$$

  Subsitituindo $x = 1$ e $y = 1$ temos $f_x(1,1) = 2$ e $f_y(1,1) = -2$.
  Poderia derivar diretamente, considerando y "constante" em f_x e vice-versa.
- Calcule $f_x(1,1)$ e $f_y(0,0)$, quando $f(x,y) = \arctan(x^2 + y^2)$.

Exemplos (derivação implícita)

- Se $z = f(x, y) > 0$ é uma função que satisfaz $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, determine suas derivadas parciais.
  1. Pode-se escrever diretamente $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ e derivar.
  2. Usando a expressão que define f temos
  $$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{\partial}{\partial x}1.$$
  Lembrando que $z = f(x, y)$, temos
  $$2x + 2zz_x = 0 \implies z_x = -\frac{x}{z},$$
  o que é possível pois $z > 0$ (o que significa $z = 0$ nesse caso?)
  De modo análogo temos $z_y = -\dfrac{y}{z}$.

  Compare os resultados.
- Atenção à notação:
  $$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) = 2x, \text{ mas } \frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = 2x + 2y(x)y'(x).$$
  Na primeira x e y são independentes; na segunda $y = y(x)$.

Exemplos (Funções radiais)

- $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é *radial* se $f(x, y)$ depende somente da distância de (x, y) à origem.
- Isto equivale a dizer que $f(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$, para alguma função $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- Suponha φ derivável e calcule as derivadas parciais de f em termos da derivada de φ. (dica: faça $u = x^2 + y^2$; depois tente pela definição)
- Conclua que $f_x(a, a) = f_y(a, a)$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
- Pense nessas funções em termos de coordenadas polares (vide aula 08).

Às vezes não fugimos da definição

- Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^2}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

  Determine, se existirem, as derivadas parciais de f.

  1. Se $(x,y) \neq (0,0)$ então, fixando uma das variáveis, f é uma função derivável da outra. Podemos derivar diretamente usando as regras de derivação, obtendo:

  $$f_x(x,y) = \frac{x^4+3x^2+y^2+2xy^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{e} \quad f_y(x,y) = -\frac{2x^2y(1+x)}{(x^2+y^2)^2}.$$

  2. Se $(x,y) = (0,0)$, precisamos da definição:

  $$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1;$$
  $$f_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{h},$$

  que não existe pois $g(y) = f(0,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } y \neq 0 \\ 0, & \text{se } y = 0 \end{cases}$ não é sequer contínua em $y=0$. Qual o domínio de f_x e f_y?

Derivada parcial nula: o que significa?

- Suponha que $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é tal que $f_x(x, y) = 0$, para todo $x \in A$. Mostre que $f(x, y) = \varphi(y)$, para alguma $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

  Para qualquer y fixado, a função $h(x) = f(x, y)$ é constante, pois $h'(x) = f_x(x, y) = 0$.
  Logo $h(x) = h(x_0)$, ou seja, $f(x, y) = f(x_0, y)$. Tomando $\varphi(y) = f(x_0, y)$ temos $f(x, y) = \varphi(y)$.

Derivadas Parciais e Continuidade

- Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

  Estude a existência de $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ e a continuidade de f em $(0,0)$.

  1. $f_x(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$.
  2. Analogamente $f_y(0,0) = 0$.
  3. Componto f com $\gamma(t) = (t,t)$, temos $\lim\limits_{t\to 0}(f\circ\gamma)(t) = 1/2 \neq 0 = f(0,0)$. Donde f não é contínua em $(0,0)$.

- Conclusão: a existência das derivadas parciais só garante a continuidade da função ao longo dos eixos coordenados, mas nada diz a respeito da composição com outras curvas.

Para casa:

- Exercícios 1.1 e 1.2 da Lista 2
- Tente calcular todas as derivadas parciais de primeira ordem das funções que aparecem até o exercício 1.6 dessa mesma lista, estudando a continuidade dessas derivadas. Uma função é *de classe* $\mathcal{C}^1(A)$ se suas derivadas parciais existem e são contínuas em todo ponto de $A \subset \mathbb{R}^2$.

Derivadas de Ordem Superior

- Se $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ admite derivadas parciais em cada $(x, y) \in A$ podemos calcular a derivada parciais de $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$:

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + h, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{h}}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{k}}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + h, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{h}}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{k}}$$

- Notações alternativas: f_{xx}, f_{xy}, f_{yx} e f_{yy}, respectivamente.
- Terceiras derivadas? Claro que sim! Quantas existem?

EXEMPLO

- Considere $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = 4x^5y^4 - 6x^2y + 3y - 4x + 9$. Então $f_x(x,y) = 20x^4y^4 - 12xy - 4$ e $f_y(x,y) = 16x^5y^3 - 6x^2 + 3$. Daí:

$$
\begin{tikzcd}
 & f_x(x,y) \arrow[dl, "\frac{\partial}{\partial x}"'] \arrow[dr, "\frac{\partial}{\partial y}"] & \\
f_{xx}(x,y) & & f_{xy}(x,y)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & f_x(y,y) \arrow[dl, "\frac{\partial}{\partial x}"'] \arrow[dr, "\frac{\partial}{\partial y}"] & \\
f_{yx}(x,y) & & f_{yy}(x,y)
\end{tikzcd}
$$

Obtemos então

$$
\begin{aligned}
f_{xx}(x,y) &= 80x^3y^4 - 12y, \\
f_{xy}(x,y) &= 80x^4y^3 - 12x = f_{yx}(x,y) \text{ e} \\
f_{yy}(x,y) &= 48x^5y^2.
\end{aligned}
$$

- Note que $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$. Coincidência?

QUANDO $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$?

- Lembramos que uma função $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é de classe $\mathcal{C}(A)$ se todas as suas derivadas parciais de segunda ordem são contínuas.

TEOREMA (SCHWARZ)

Seja $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^2(A)$. Então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0),$$

para todo $(x_0, y_0) \in A$.

- De modo análogo temos derivadas parciais de ordem k e funções de classe $\mathcal{C}^k(A)$. Um teorema do tipo acima também vale para derivadas mistas de ordem k.

EXEMPLO

- Seja $f\colon \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

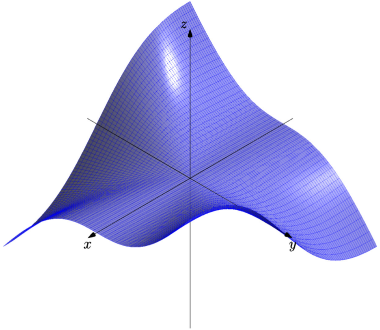
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Nesse caso, calculando diretamente[1] temos

$$f_x(x,y) = \frac{y^5 - x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{xy^4 + 3x^3y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.



Com isso as derivadas mistas, de segunda ordem na origem, são $f_{xy}(0,0) = 1$ e $f_{yx}(0,0) = 0$

[1] Quando é preciso usar a definição?

Referências

- Aula presencial;
- H. L. Guidorrizi, *Um curso de Cálculo*, vol. 2, 5ª. edição, LTC - São Paulo, 2001. **Seções 10.1 e 14.1**;
- J. Stewart, *Cálculo*, Vol. 2, 7ª. edição, Cengage-Learning - São Paulo, 2013. **Seção 14.3**.

Até a próxima aula!

lymber@ime.usp.br