MAP 2320 – MÉTODOS NUMÉRICOS EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS II

2º Semestre - 2019

Prof. Dr. Luis Carlos de Castro Santos

lsantos@ime.usp.br

2.1 Teorema de Fourier

Teorema 2.1 (Fourier). *Seja L um número real maior que zero. Para toda função $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes, a série de Fourier de f*

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L},$$

em que

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}dt, \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

converge para f nos pontos de $(-L, L)$ em que f é contínua. Ou seja, podemos representar f por sua série de Fourier:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}, \quad \text{para } t \in (-L, L) \text{ em que } f \text{ é contínua.}$$

2.1.4 Tabela de Coeficientes de Séries de Fourier

Coeficientes das Séries de Fourier de Funções Elementares		
$f:[-L,L]\to\mathbb{R},\ -1\le c<d\le 1$	$a_n(f,L)=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt$	$b_n(f,L)=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(t)\,\text{sen}\,\frac{n\pi t}{L}dt$
$f_{c,d}^{(0)}(t)=\begin{cases}1, & \text{se } t\in[cL,dL]\\ 0, & \text{caso contrário}\end{cases}$	$a_0(f_{c,d}^{(0)},L)=d-c$ $a_n(f_{c,d}^{(0)},L)=\frac{1}{n\pi}\,\text{sen}\,s\Big\vert_{n\pi c}^{n\pi d}$	$b_n(f_{c,d}^{(0)},L)=-\frac{1}{n\pi}\cos s\Big\vert_{n\pi c}^{n\pi d}$
$f_{c,d}^{(1)}(t)=\begin{cases}t, & \text{se } t\in[cL,dL]\\ 0, & \text{caso contrário}\end{cases}$	$a_0(f_{c,d}^{(1)},L)=\frac{L}{2}(d^2-c^2)$ $a_n(f_{c,d}^{(1)},L)=$ $\frac{L}{n^2\pi^2}\left(s\,\text{sen}\,s+\cos s\right)\Big\vert_{n\pi c}^{n\pi d}$	$b_n(f_{c,d}^{(1)},L)=$ $\frac{L}{n^2\pi^2}\left(-s\cos s+\text{sen}\,s\right)\Big\vert_{n\pi c}^{n\pi d}$
$f_{c,d}^{(2)}(t)=\begin{cases}t^2, & \text{se } t\in[cL,dL]\\ 0, & \text{caso contrário}\end{cases}$	$a_0(f_{c,d}^{(2)},L)=\frac{L^2}{3}(d^3-c^3)$ $a_n(f_{c,d}^{(2)},L)=$ $\frac{L^2}{n^3\pi^3}\left((s^2-2)\,\text{sen}\,s+2s\cos s\right)\Big\vert_{n\pi c}^{n\pi d}$	$b_n(f_{c,d}^{(2)},L)=$ $\frac{L^2}{n^3\pi^3}\left(2s\,\text{sen}\,s+(2-s^2)\cos s\right)\Big\vert_{n\pi c}^{n\pi d}$

2.1.1 Séries de Fourier de Funções Pares e Ímpares

Ou seja, se uma função $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ é par a sua série de Fourier tem somente os termos em cossenos,

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L}.$$

Para as funções f que são definidas apenas em $[0, L]$ podemos prolongá-las de forma que elas se tornem par no intervalo $[-L, L]$:

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(-t), & \text{se } -L \leq t < 0 \\ f(t), & \text{se } 0 \leq t < L \end{cases}$$

é a extensão par de f. E assim temos o seguinte resultado.

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt,$$

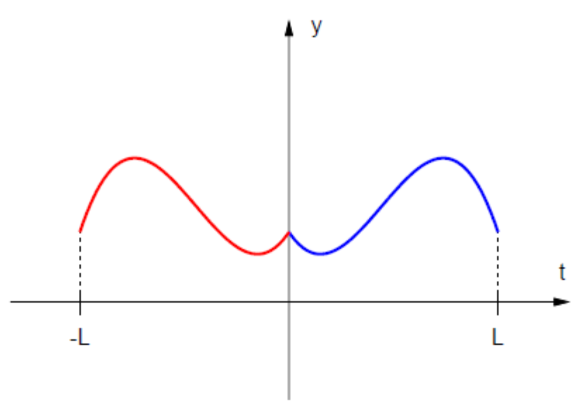


Figura 2.3 – Prolongamento par de uma função definida inicialmente somente no intervalo $[0, L]$

2.1.1 Séries de Fourier de Funções Pares e Ímpares

Ou seja, se uma função $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ é ímpar a sua série de Fourier tem somente os termos em senos,

$$S_f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L}.$$

Para as funções f que são definidas apenas em $[0, L]$ podemos prolongá-las de forma que elas se tornem ímpar no intervalo $[-L, L]$:

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} -f(-t), & \text{se } -L \leq t < 0 \\ f(t), & \text{se } 0 \leq t < L \end{cases}$$

é a extensão ímpar de f. E assim temos o seguinte resultado.

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt,$$

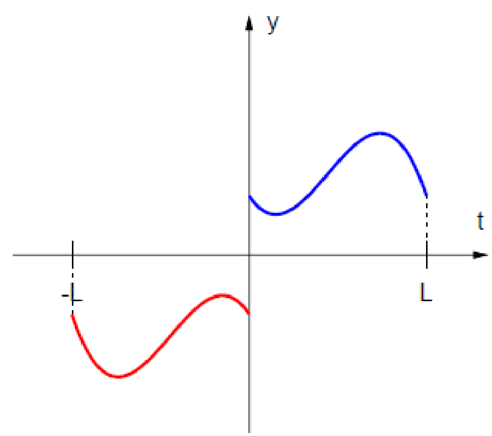


Figura 2.4 – Prolongamento ímpar de uma função definida inicialmente somente no intervalo $[0, L]$

2.2 Séries de Fourier de Senos e de Cossenos de Índices Ímpares

Corolário 2.9. *Seja L um número real maior que zero. Para toda função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes. A* **série de Fourier de senos de índice ímpar** *de f*

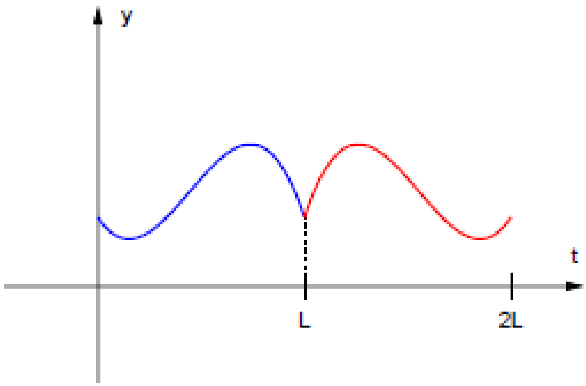
$$Ssi_f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1} \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi t}{2L},$$

em que

$$b_{2k+1} = \frac{4}{2L} \int_0^L f(t) \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi t}{2L} dt \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots$$

converge para f nos pontos do intervalo $(0, L)$ em que f é contínua. Ou seja, podemos representar f por sua série de senos de Fourier de índice ímpar:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1} \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi t}{2L}, \quad \text{para } t \in (0, L) \text{ em que } f \text{ é contínua.}$$



Corolário 2.10. *Seja L um número real maior que zero. Para toda função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes. A* ***série de Fourier de cossenos de índice ímpar*** *de f*

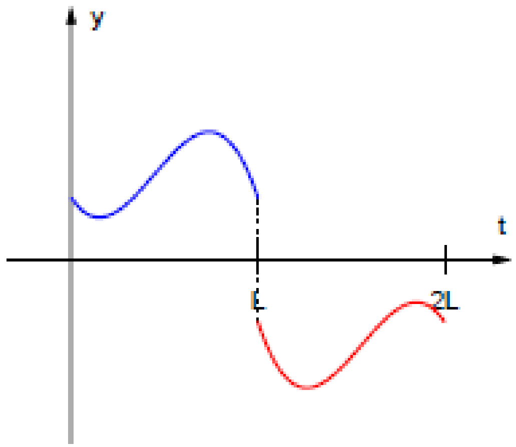
$$Sci_f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \cos \frac{(2k+1)\pi t}{2L},$$

em que

$$a_{2k+1} = \frac{4}{2L} \int_0^L f(t) \cos \frac{(2k+1)\pi t}{2L} dt \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots$$

converge para f nos pontos do intervalo $(0, L)$ em que f é contínua. Ou seja, podemos representar f por sua série de cossenos de Fourier de índice ímpar:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \cos \frac{(2k+1)\pi t}{2L}, \quad \text{para } t \in (0, L) \text{ em que } f \text{ é contínua.}$$



Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução
(Versão Preliminar)

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
http://www.mat.ufmg.br/~regi

Método de Separação de Variáveis

$$u(x, y) = X(x)Y(y)\,.$$

1. Substituição da solução na EDP
2. Construção do Sistema de EDOs
3. Solução do Sistema de EDOs
   1. Espaço (condições de contorno + parâmetro)
   2. Tempo
4. Aproximação em Série da Condição Inicial

Problema Homogêneo
C.C. de Dirichlet
homogêneas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L$$
$$u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0$$

Problema Homogêneo
C.C. de Dirichlet
não-homogêneas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L$$
$$u(0,t) = T_1,\ u(L,t) = T_2$$

Problema Homogêneo
C.C. de Neumann
homogêneas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$$

Problema Homogêneo
C.C. de Mistas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L$$
$$u(0,t) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$$

Problema Não-Homogêneo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x)$$
$$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L$$
$$u(0,t) = T_1,\ u(L,t) = T_2$$

3.1 Extremidades a Temperaturas Fixas

3.1.1 Condições de Fronteira Homogêneas

Problema Homogêneo
C.C. de Dirichlet
homogêneas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0 \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx,\ n = 1, 2, 3 \ldots$$

3.1.2 Condições de Fronteira Não Homogêneas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L \\ u(0,t) = T_1,\ u(L,t) = T_2 \end{cases}$$

✓

Problema Homogêneo
C.C. de Dirichlet
não-homogêneas

$$v(x,t) = T_1 + \left(\frac{T_2 - T_1}{L}\right) x$$

$$u(x,t) = v(x,t) + u_0(x,t),$$

$$u(x,t) = T_1 + \left(\frac{T_2 - T_1}{L}\right) x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}.$$

$$f(x) - T_1 - \left(\frac{T_2 - T_1}{L}\right) x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left[f(x) - T_1 - \left(\frac{T_2 - T_1}{L}\right) x \right] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx,\ n = 1, 2, 3 \ldots$$

3.2 Barra Isolada nas Extremidades

Problema Homogêneo
C.C. de Neumann
homogêneas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{N} c_n u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{N} c_n \cos\frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi x}{L}.$$

$$c_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx,\ c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx,\ n = 1,2,3\ldots$$

3.3 Condições de Fronteira Mistas e Equação não Homogênea

MAP2320

3.3.1 Condições de Fronteira Mistas

Problema Homogêneo
C.C. de Mistas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} u_{2n+1}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} e^{-\frac{\alpha^2 (2n+1)^2 \pi^2}{4L^2} t}$$

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L}.$$

$$c_{2n+1} = \frac{4}{2L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L}\, dx.$$

para $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$

3.3.2 Equação do Calor não Homogênea

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x) \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L \\ u(0,t) = T_1,\ u(L,t) = T_2 \end{cases}$$

Problema Não-Homogêneo ✓

$$u(x,t) = v(x) + u_0(x,t),$$

$$\begin{cases} \alpha^2 v'' = -g(x) \\ v(0) = T_1,\ v(L) = T_2 \end{cases}$$

$u_0(x,t)$ é a solução do PVIF homogêneo com condições de fronteiras homogêneas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x) - v(x),\ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0 \end{cases}$$

Exercícios

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{se } 0 \le t < L/4 \\ L/4, & \text{se } L/4 \le t < 3L/4 \\ L-t, & \text{se } 3L/4 \le t \le L. \end{cases}$$

Encontre as séries para essa função:

a) Fourier Clássica (com Senos e Cossenos)
b) Fourier de Senos
c) Fourier de Cossenos
d) Fourier de Senos de Índices Ímpares
e) Fourier de Cossenos de Índices Ímpares

Compare graficamente as suas respostas

1.3. Resolva o problema de valor inicial e de fronteira usando o método de separação de variáveis

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x} \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0,\quad u(L,t) = 0 \end{cases}$$

3.3. Resolva o PVIF e determine a solução estacionária.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{3}{40} \\ u(x,0) = 20,\ 0 < x < 40 \\ u(0,t) = 0,\ u(40,t) = 60 \end{cases}$$

Desenvolva o problema na forma geral com:

$L = 40$
$g(x) = g = -3/40$
$u(x,0) = T_0 = 20$
$u(L,t) = T_L = 60$

Substitua os valores no final

Visualize graficamente sua resposta

1ª PROVA – Próxima segunda 16/09/2019 – local a ser informado

Trazer:

- Tabela de Coeficientes (pg.202 – material UFMG)
- Tabela de relações trigonométricas
- Tabela de integrais
- Resumo da matéria em uma única folha de papel (frente-e-verso)

MAP 2320 – MÉTODOS NUMÉRICOS EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS II

2º Semestre - 2016

Roteiro do curso

- Introdução
- Séries de Fourier
- Método de Diferenças Finitas
- **Equação do calor transiente (parabólica)**
- Equação de Poisson (elíptica)
- Equação da onda (hiperbólica)