Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecatrônica
PMR5248 – Elementos Finitos Não Linear

AULA 01: Tensões e seus invariantes

Relações importantes



Tensor de tensões

Pode ser dividido em uma parte hidrostática e outra desviadora

$$\sigma = s + \sigma_H$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} \\ s_{13} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

$$p = -\frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = -\sigma_m$$

Invariantes do tensor de tensões e de sua parte desviadora

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3$$

$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\,\tau_{xy} \tau_{xz} \tau_{yz} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$$

$$J_2 = \frac{1}{6}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2] + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2$$

$$= \frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]$$

$$= \frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_m)^2 + (\sigma_2 - \sigma_m)^2 + (\sigma_3 - \sigma_m)^2] = \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)$$

Ângulo de Lode

$$\cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}}$$

$$\sigma_1 = \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \cos\theta + \sigma_m$$

$$\sigma_2 = \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + \sigma_m \qquad (\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3)$$

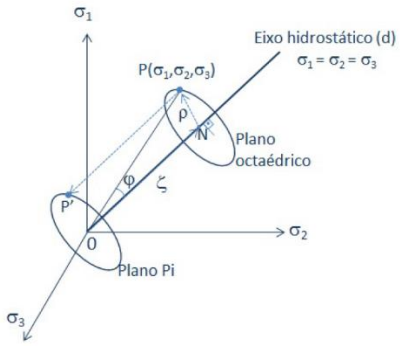
$$\sigma_3 = \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \sigma_m$$

Tensões octaédricas

$$\sigma_{oct} = \sigma_m = \frac{I_1}{3}$$

$$|\tau_{oct}| = \sqrt{\frac{2}{3} J_2}$$

Invariantes geométricos



$$\zeta = \sqrt{3}\sigma_{oct}$$

$$\rho = \sqrt{3}\tau_{oct}$$

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecatrônica
PMR5248 – Elementos Finitos Não Linear

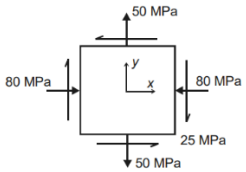
Lista de Exercícios no. 01

Entrega para dia 18/09/2019

1. Deduza as relações entre as tensões principais e os seguintes invariantes: tensão hidrostática (σ_H), tensão equivalente de von Mises (q), ângulo de Lode (θ) e triaxialidade (η), conforme formulário.
2. O que é ângulo de Lode? Qual seu significado físico?
3. Desenhe o modelo de von Mises, da máxima tensão principal e da máxima tensão cisalhante no plano bidimensional. Discuta os modelos com base nos invariantes mencionados no item 1.
4. Deduza os valores das tensões máximas normais e cisalhantes através do Círculo de Mohr.
5. Dado o estado de tensões abaixo, determine a magnitude das tensões principais e os invariantes $I_1,\ I_2, I_3$ e J_2

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} MPa$$

6. O estado de tensões em um ponto é representado ao lado.



   i. Determine as tensões atuando em um elemento orientado 30^o no sentido horário em relação ao elemento original. Para tal, estude círculo de Mohr.

   ii. Determine a magnitude das tensões principais e a normal ao plano onde elas atuam.

   iii. Encontre os invariantes $I_1,\ I_2, I_3$ e $J_1,\ J_2, J_3$

7. Suponha que um extensômetro de roseta, cujos ângulos em relação à direção x são $\theta_P = 20^o$, $\theta_Q = 80^o$ e $\theta_R = 140^o$, meçam as seguintes deformações: ε_P = 43e-6, ε_Q = 7,8e-6 e ε_R = 17,0e-6.
   i. Determine as deformações principais e suas orientações.
   ii. Para as deformações encontradas no problema anterior e usando valores para as constantes elásticas de $E\ =\ 210\ GPa$ e $\nu = 0{,}30$, determine as tensões principais e suas orientações
8. Um aço laminado a quente tem tensão de escoamento $S_y = 690\ MPa$. Estime o fator de segurança para os seguintes estados de tensão em um volume elementar, utilizando os critérios da máxima tensão principal, da máxima tensão cisalhante e de von Mises,
   - $\sigma_x = 500\ MPa, \sigma_y = 500\ MPa, \tau_{xy} = 0\ MPa$
   - $\sigma_x = 400\ MPa, \sigma_y = 270\ MPa, \tau_{xy} = -100\ MPa$
   - $\sigma_x = 0\ MPa,\ \sigma_y = 270\ MPa, \tau_{xy} = 310\ MPa$
   - $\sigma_x = -270\ MPa, \sigma_y = -400\ MPa, \tau_{xy} = 100\ MPa$
   - $\sigma_1 = 200\ MPa, \sigma_2 = 200\ MPa, \sigma_3 = 200\ MPa$