

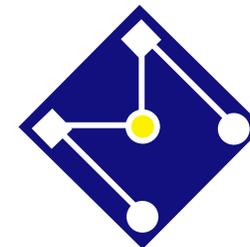


PMR5248

Elementos Finitos Não Linear

WELCOME!

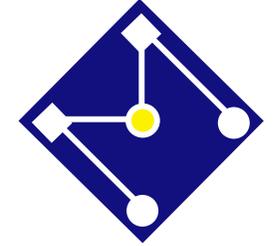
Larissa Driemeier
Marcilio Alves
Rafael T. Moura



CRONOGRAMA TEORIA

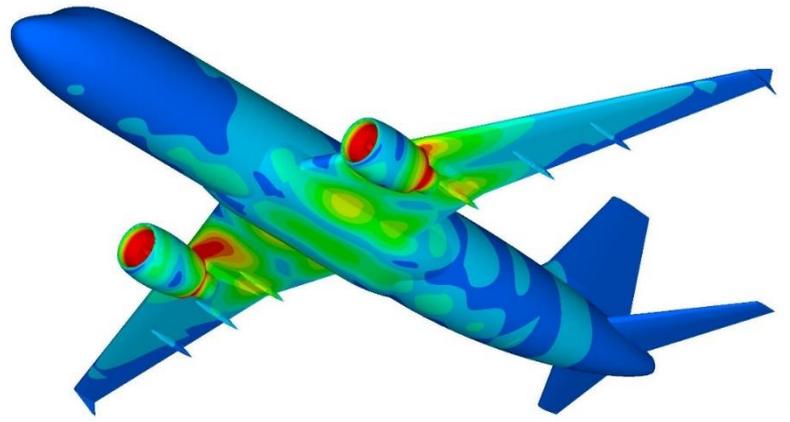
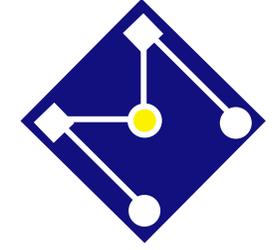
AULA	CONTEÚDO	DATA [2 ^a /5 ^a]	PROFESSOR
1	Definições básicas em análise não linear	11/9	Larissa
2	Newton-Raphson	18/9	Marcilio
3	Elementos finitos não lineares de treliça: geometria	25/9	Marcilio
4	Elementos finitos não lineares de treliça: plasticidade	2/10	Larissa
5	Elementos finitos para vigas: deslocamentos moderados	16/10	Marcilio
6	Elementos finitos 3D: plasticidade	23/10	Larissa
7	Elementos finitos 3D: plasticidade	30/10	Larissa
8	Cinemática de grandes deformações	06/11	Marcilio
9	Impacto em cascas	13/11	Marcilio
10	Programa de treliça: geometria	20/11	Rafael
11	Programa 3D: plasticidade	27/11	Rafael
12	Apresentações	4/12	Rafael

Nota será composta da média entre os trabalhos semanais e a apresentação final do programa.



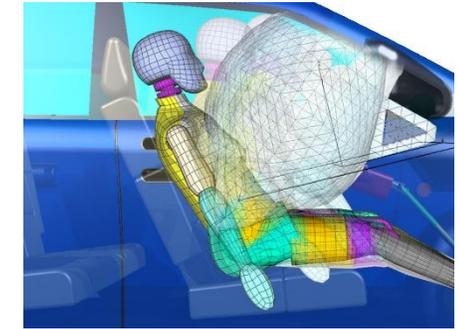
BIBLIOGRAFIA

- ❑ M. Alves, *Impact Engineering: Fundamentals, Experiments and Nonlinear Finite Elements*, www.impactbook.org
- ❑ K.J. Bathe, *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, 2006.
- ❑ P.T.R. Mendonça e E.A. Fancello, *O Método de Elementos Finitos Aplicado à Mecânica dos Sólidos*, Orsa Maggiore, 2019
- ❑ S. Proença, *Plasticidade Computacional: Introdução aos problemas não-lineares*
- ❑ J.N. Reddy, *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*, Oxford, 2004



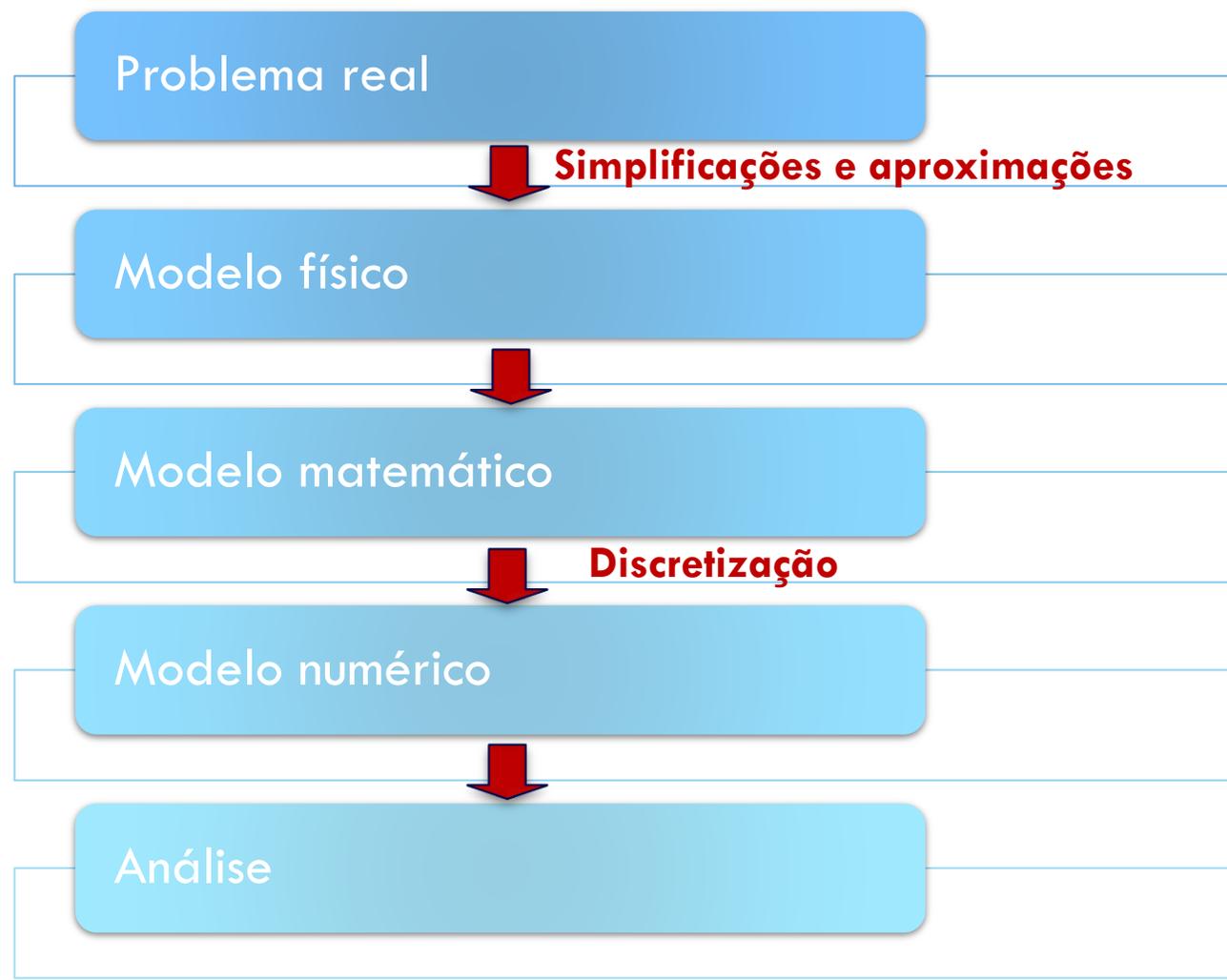
O problema é bem resumido pelo Dr A. R. Sykes, do *British Institution of Engineers*, que, em 1976, disse:

Engineering is the art of modelling materials we do not wholly understand, into shapes we cannot precisely analyse, so as to withstand forces we cannot precisely assess, in such a way that the public has no reason to suspect the extent of our ignorance.



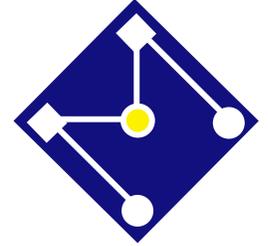


MODELAMENTO X ANÁLISE



O MUNDO É TRIDIMENSIONAL, DINÂMICO E NÃO LINEAR.





MODELO

O **engenheiro** constrói um **modelo**,
a partir de um problema que não
possui solução exata, e acha uma
solução aproximada ótima.

Modelar é o processo de escrever uma equação ou sistema de equações que descreve o movimento de um mecanismo físico. O sucesso do modelo é determinado por quão bem a solução da equação prevê o comportamento observado no sistema real.

Serão desprezados quaisquer efeitos dinâmicos

Peso concentrado na posição correspondente ao centro de gravidade do corpo

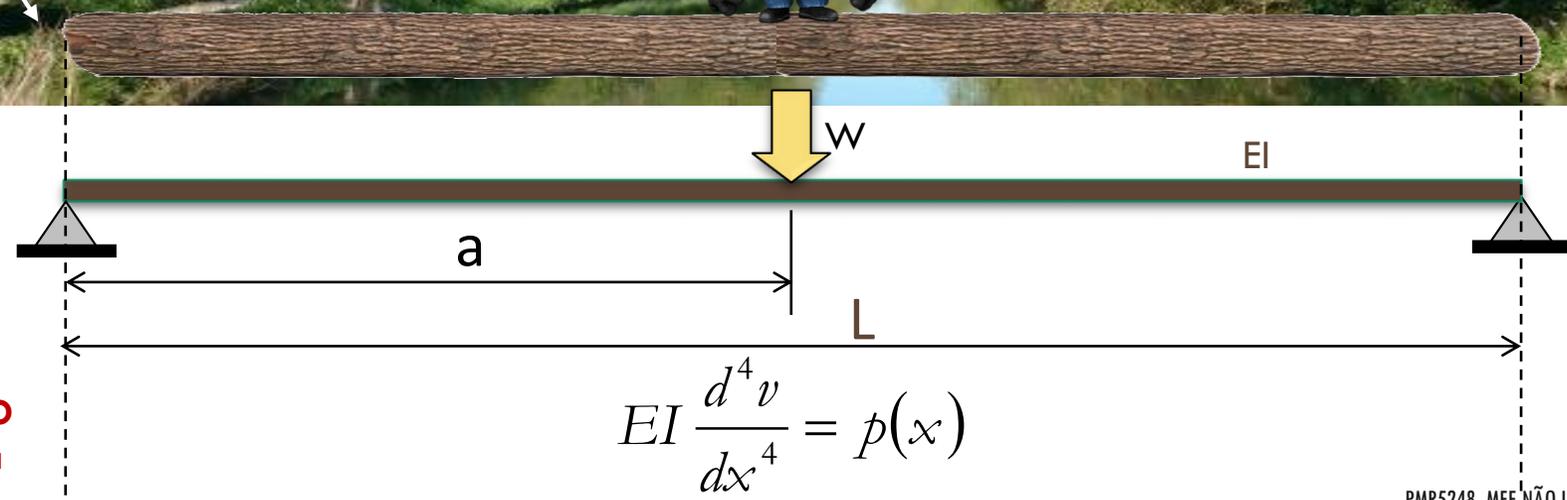
O tronco tem seção transversal constante e a madeira é um material homogêneo

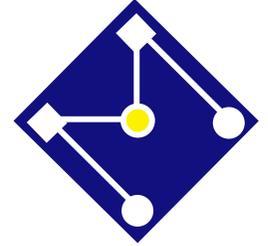
SISTEMA REAL

Apoios ideais

MODELO FÍSICO
Viga bi-apoiada

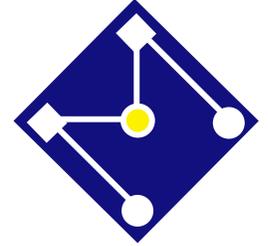
MODELO MATEMÁTICO
Teoria simples de Viga





MODELOS DE ENGENHARIA

- Um bom modelo deve:
 - Considerar os aspectos essenciais do problema;
 - Desprezar os fatores secundários;
 - Fornecer resultados próximos *o suficiente* das respostas reais.
- Habilidade em modelamento é baseada na visualização do problema físico e relacionamento com o que queremos analisar:
 - Distribuição de temperatura?
 - Campo de tensões?
 - Campo de deformações?
- Se as previsões do modelo não estão de acordo com as respostas reais ou esperadas é necessário refinar o modelo:
 - Incluir aspectos inicialmente desprezados.

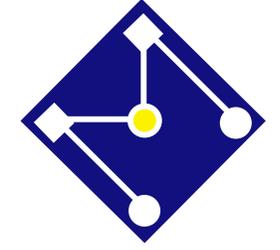


FILOSOFIA

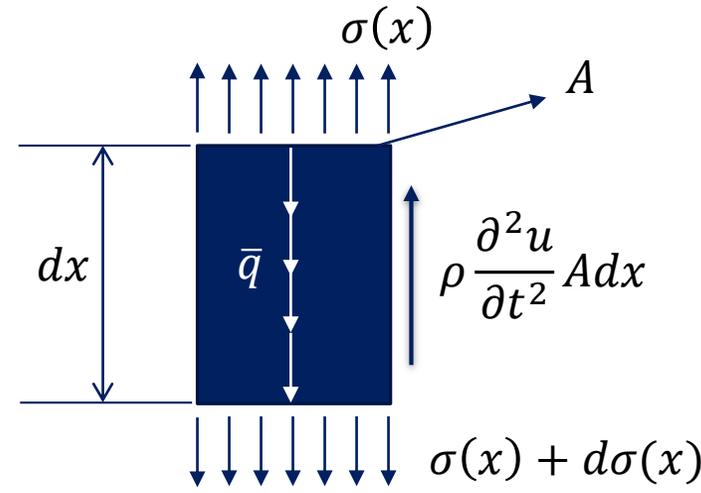
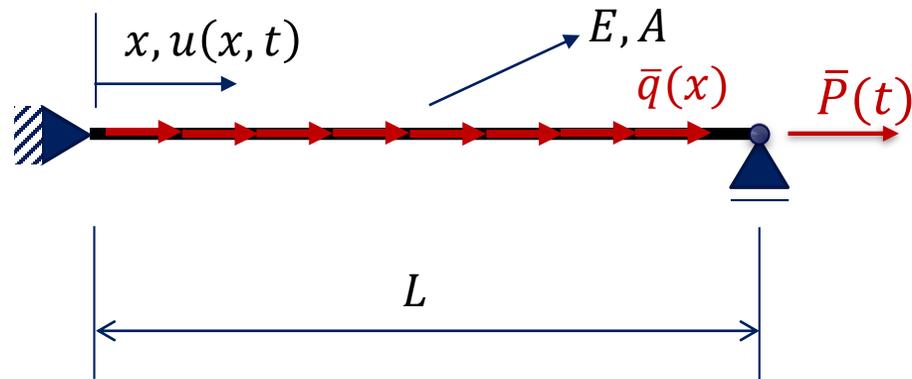
Segundo Prof. Dr. *Avelino Alves Filho*,

“Um dos pontos mais importantes que contribui comprovadamente para o sucesso e progresso dos recursos de CAE, e que tive a oportunidade de verificar nos anos de trabalho nesta área, está relacionado aos **CONCEITOS OBRIGATÓRIOS NA UTILIZAÇÃO DA TECNOLOGIA CAE**. Muitos profissionais que iniciam suas aplicações na área de Elementos Finitos encontram dificuldades, pois o aprendizado de uso de software é feito sem base conceitual, confundindo o aprendizado de manuseio de programa com o conhecimento do Método dos Elementos finitos. Justifica-se portanto, a filosofia de abordagem:

SE O ENGENHEIRO NÃO SABE MODELAR O PROBLEMA SEM TER O COMPUTADOR, ELE NÃO DEVE FAZÊ-LO TENDO O COMPUTADOR!”



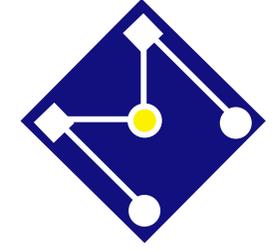
CASO UNIDIMENSIONAL



$$-\sigma(x)S + [\sigma(x) + d\sigma(x)]A + \bar{q}dx - \rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{d\sigma}{dx} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\bar{q}}{A}$$

ρ é a densidade do material



$$\frac{d\sigma}{dx} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\bar{q}}{A}$$



$$\sigma = E\varepsilon \rightarrow \varepsilon(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$$

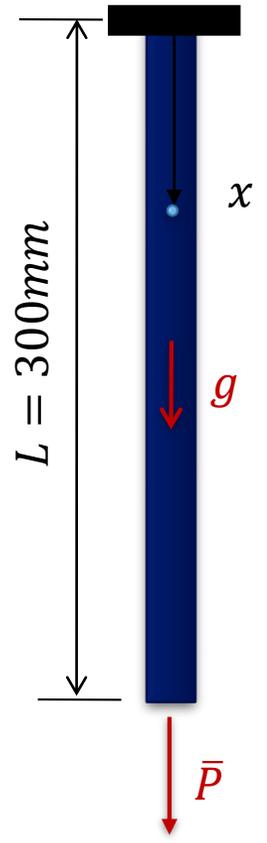
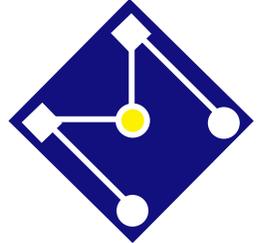
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\bar{q}}{EA}$$

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

velocidade de propagação de uma onda no meio elástico

Forma forte de equilíbrio, explicitada por uma equação diferencial e condições de contorno.

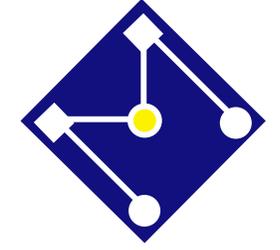




EXEMPLO

A barra de alumínio ($E = 72GPa$) tem $L = 300mm$ de comprimento e *seção transversal constante* $A = 120 mm^2$. Calcule os deslocamentos da barra, considerando:

- Força \bar{P} ;
- Peso próprio;
- Peso próprio + força \bar{P} .

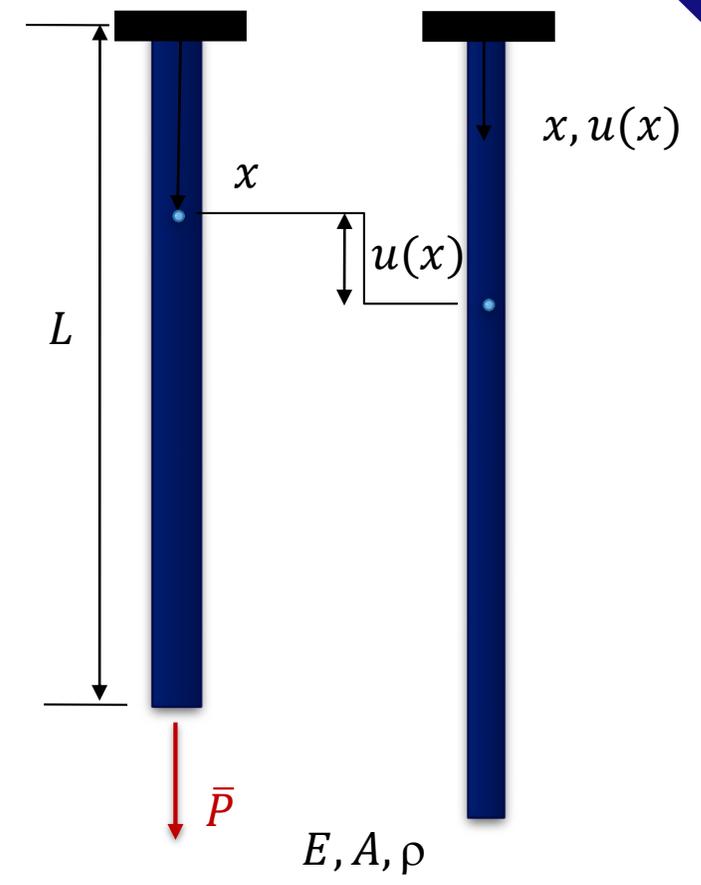


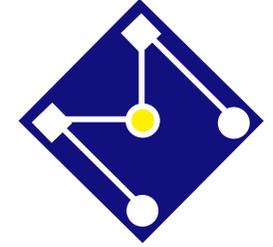
FORÇA P

Equilíbrio estático: $\frac{d\sigma}{dx} = 0$

Lei constitutiva:
Elástica linear $\sigma = E\varepsilon$

Cinemática: $\varepsilon(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$





Equação diferencial (ODE):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Condições de contorno:

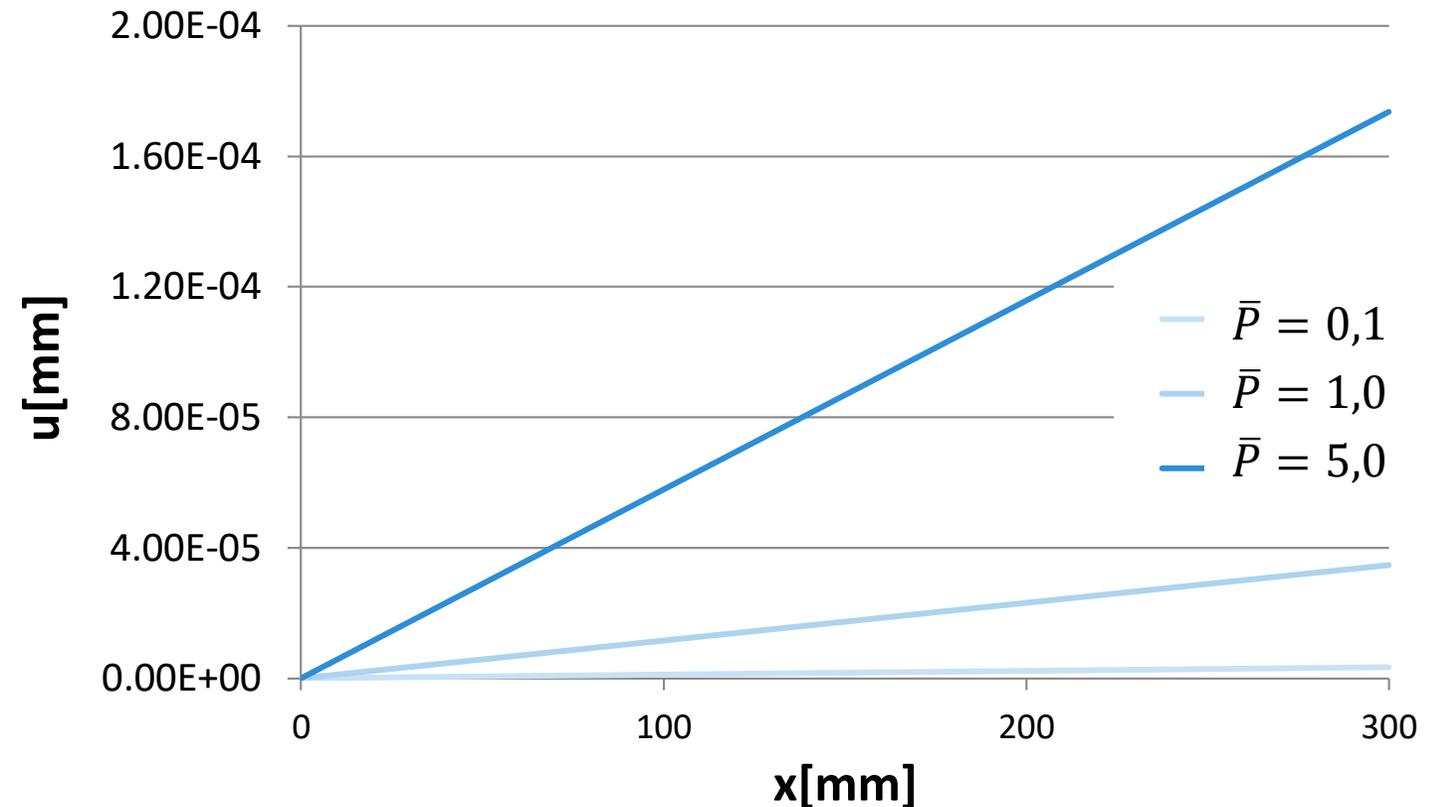
$$u(0) = 0$$

$$\sigma(L)S = \bar{P}$$

Solução analítica do problema:

$$u(x) = \frac{\bar{P}}{EA} x$$

$L = 300\text{mm}$
 $E = 72\text{GPa}$
 $A = 120\text{ mm}^2$



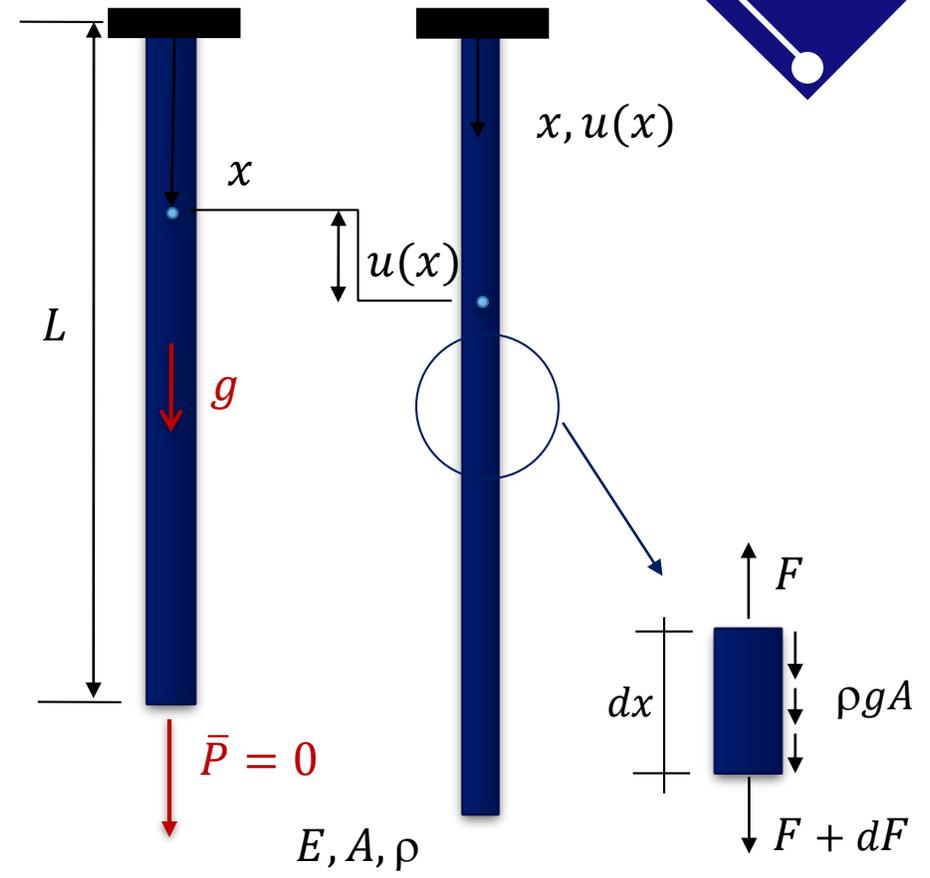


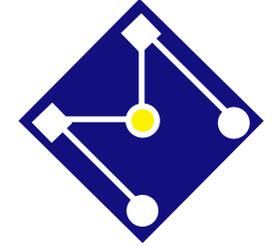
PESO PRÓPRIO

Equilíbrio estático: $\frac{d\sigma}{dx} = -\rho g$

Lei constitutiva:
Elástica linear $\sigma = E\varepsilon$

Cinemática: $\varepsilon(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$





Equação diferencial (ODE):

$$E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho g = 0$$

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2$$

$$L = 300 \text{ mm}$$

$$E = 72 \text{ GPa}$$

$$A = 120 \text{ mm}^2$$

$$\rho = 2,7000 \text{ E} - 06 \text{ kg/mm}^3$$

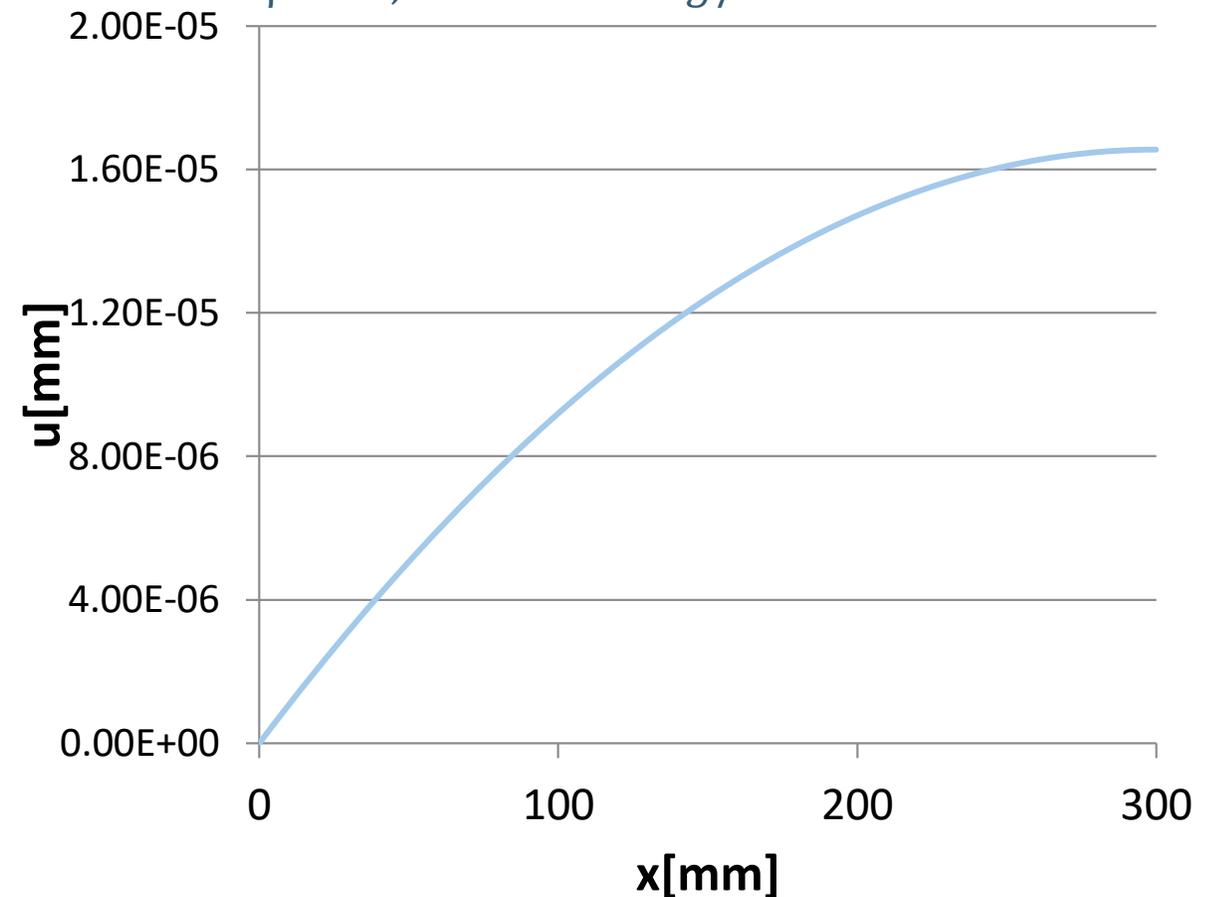
Condições de contorno:

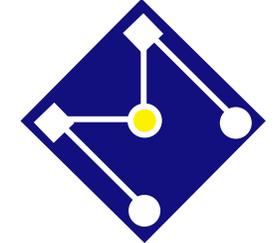
$$u(0) = 0$$

$$\sigma(L)S = 0 = EA \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \quad \therefore \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0$$

Solução analítica do problema:

$$u(x) = \frac{\rho g}{E} \left(L - \frac{x}{2} \right) x$$



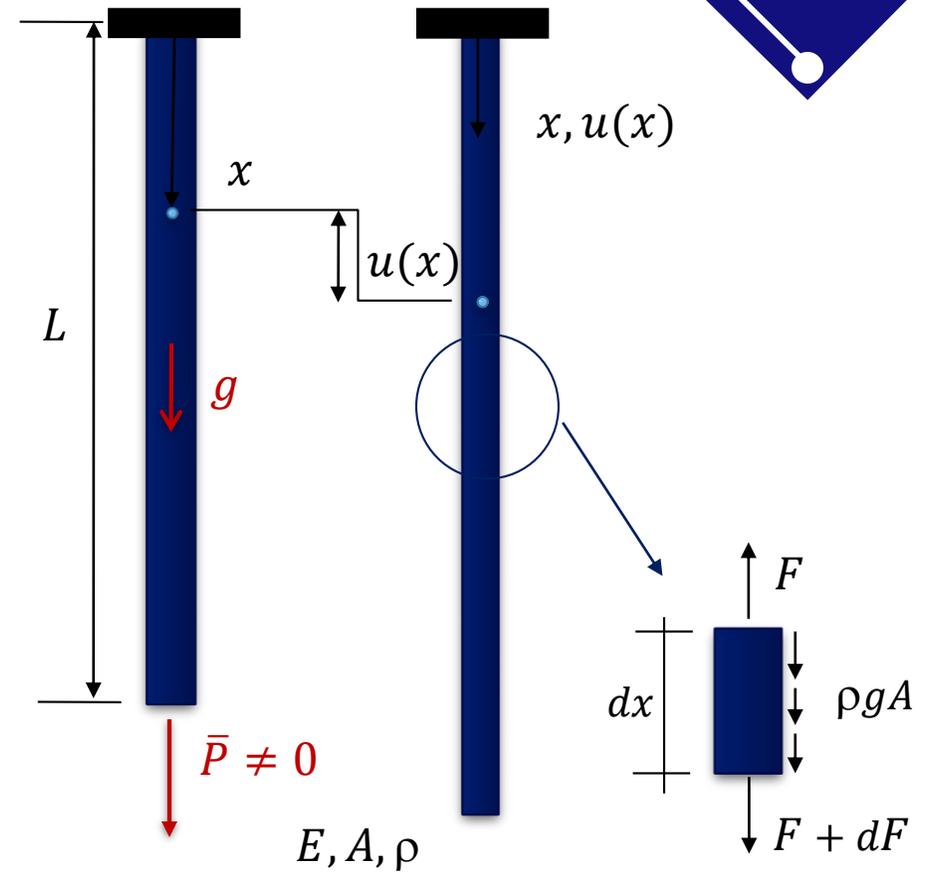


PESO PRÓPRIO + FORÇA \bar{P}

Equilíbrio estático: $\frac{d\sigma}{dx} = -\rho g$

Lei constitutiva:
Elástica linear $\sigma = E\varepsilon$

Cinemática: $\varepsilon(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$



Equação diferencial (ODE):

$$E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho g = 0$$

Condições de contorno:

$$u(0) = 0$$
$$\sigma(L)S = P = EA \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \quad \therefore \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = \frac{P}{EA}$$

Solução analítica do problema:

$$u(x) = \left[\frac{\rho g}{E} \left(L - \frac{x}{2} \right) + \frac{P}{EA} \right] x$$

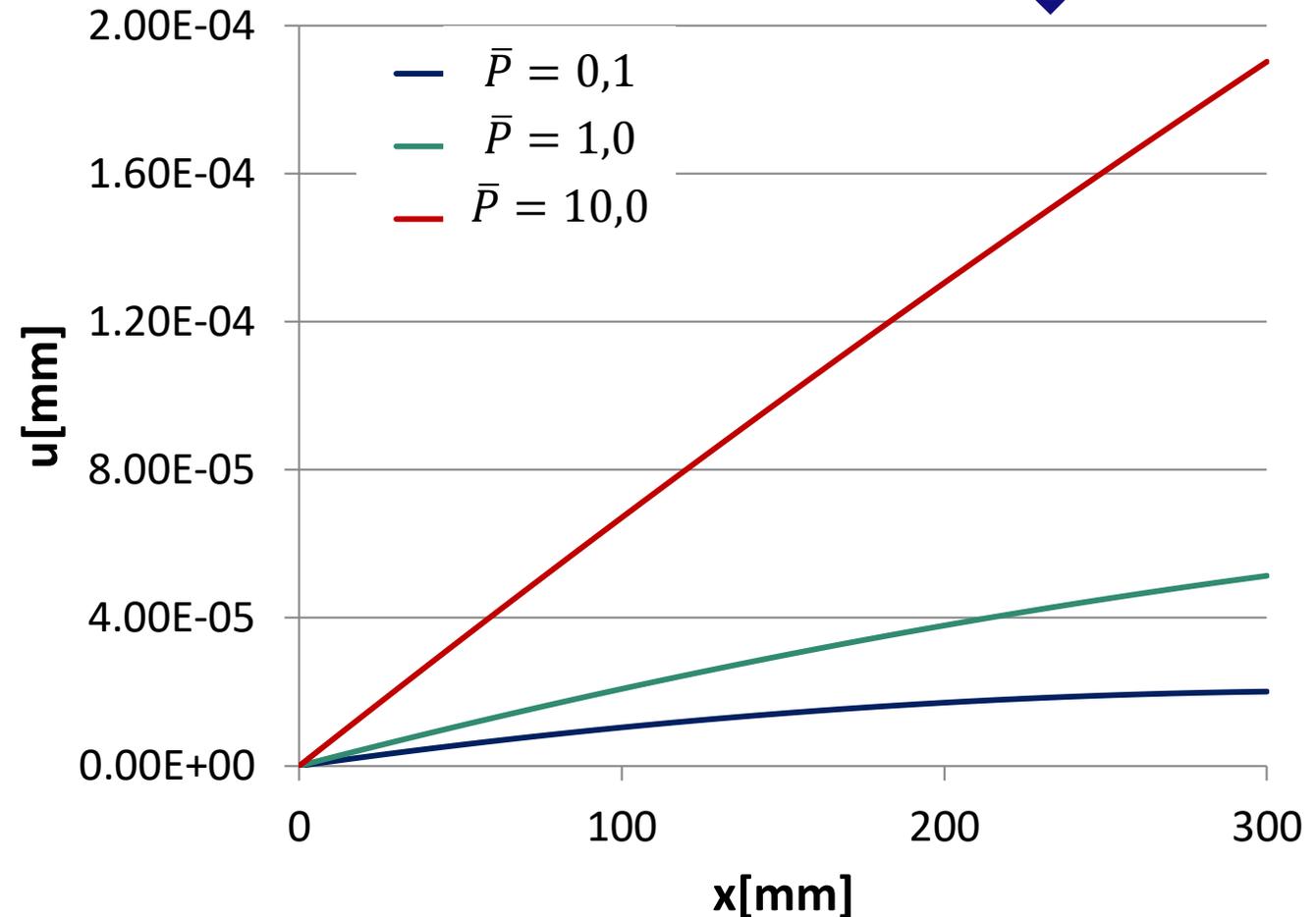
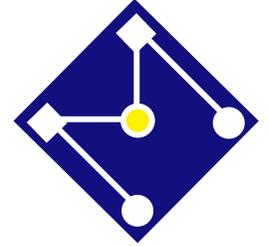
$$g = 9,81 \text{ m/s}^2$$

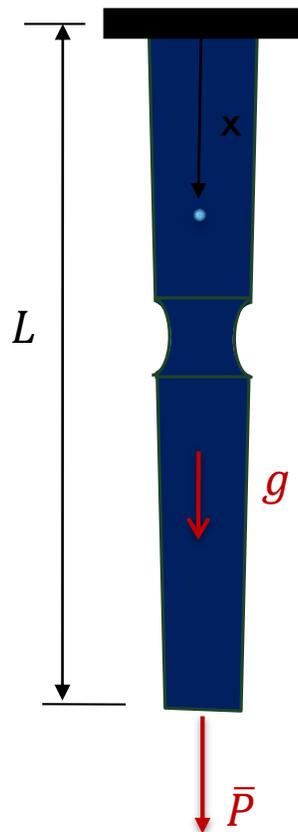
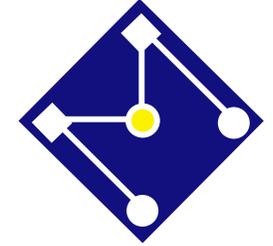
$$L = 300 \text{ mm}$$

$$E = 72 \text{ GPa}$$

$$A = 120 \text{ mm}^2$$

$$\rho = 2,7000 \text{ E} - 06 \text{ kg/mm}^3$$

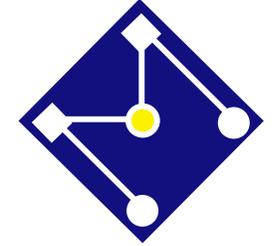




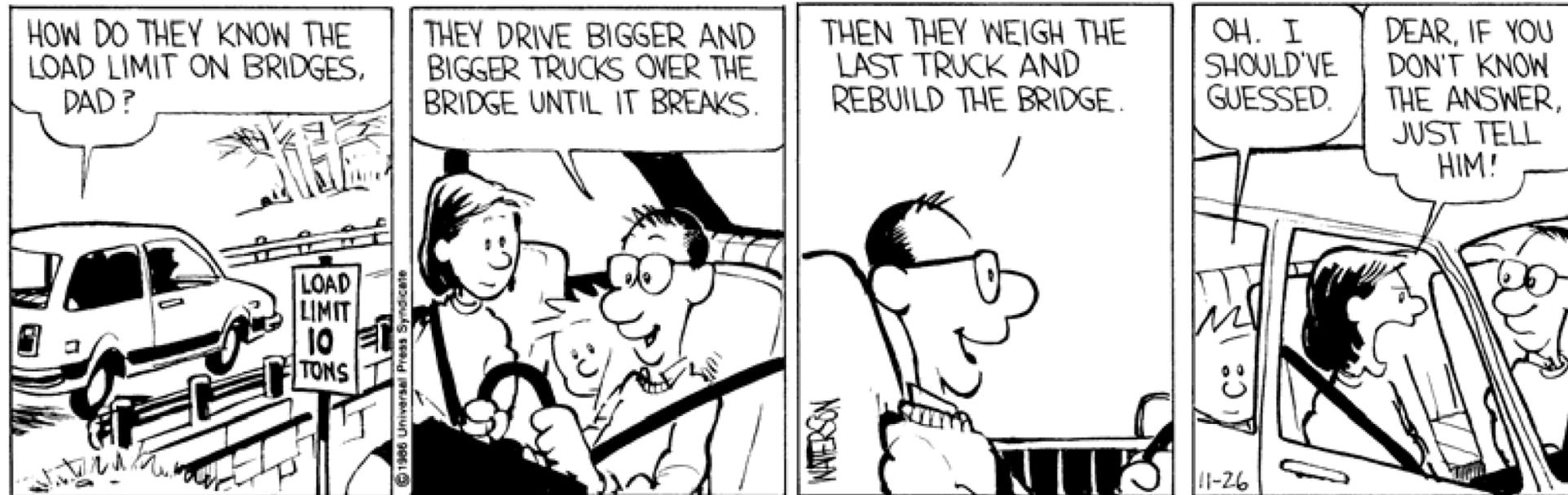
A medida que nos distanciamos dos problemas acadêmicos e nos aproximamos dos problemas reais de engenharia, estes vão se tornando mais complexos!

Dessa forma, encontrar a solução da equação diferencial, quando esta existir, é um trabalho árduo...

Além disso, os casos foram unidimensionais...



ENTÃO, COMO FAZER?



Problemas devem ser simplificados usando certas aproximações...

Métodos numéricos são *aproximações* dos modelos matemáticos.

Forma forte de equilíbrio ponderada por uma função peso δu (diferenciável e homogênea na condição de contorno essencial $\delta u(0) = 0$)

$$\int_0^L \left[\frac{d\sigma}{dx} + \left(\frac{\bar{q}}{A} \right) \right] \delta u dx = 0 \quad \forall \delta u$$

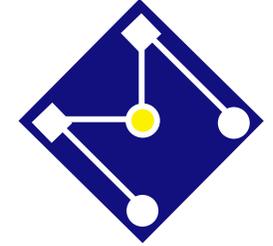
$$\int_0^L \frac{d}{dx} (\sigma \delta u) dx - \int_0^L \left[\sigma \frac{d\delta u}{dx} \right] dx + \int_0^L \frac{\bar{q}}{A} \delta u dx = 0$$

$$\underbrace{\sigma(L) \delta u(L)}_{\bar{P}/S} - \underbrace{\sigma(0) \delta u(0)}_{=0} - \int_0^L \left[\sigma \frac{d\delta u}{dx} \right] dx + \int_0^L \frac{\bar{q}}{A} \delta u dx = 0$$

$$\int_0^L \left[\sigma S \frac{d\delta u}{dx} \right] dx = \bar{P} \delta u(L) + \int_0^L \bar{q} \delta u dx \quad \forall \delta u$$

Forma fraca de equilíbrio. Chamada de fraca porque exige-se um grau de continuidade menor para σ se comparada à condição de equilíbrio em forma forte.





Admitindo-se que a função peso $\delta u(x)$ seja representativa de um campo de deslocamentos virtuais, a forma fraca passa a ser interpretada como o Princípio dos Trabalhos Virtuais (P.T.V.) escrito para o problema em estudo.

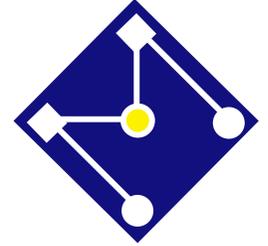
$$\int_0^L \left[\sigma A \frac{d \delta u}{d x} \right] dx = \bar{P} \delta u(L) + \int_0^L \bar{q} \delta u dx \quad \forall \delta u$$

Trabalho Virtual Interno

Trabalho Virtual das Forças Externas

O chamado **problema de valor de contorno** se resume em encontrar $u(x)$ tal que

$$\int_0^L \left[E(u) A \frac{du}{dx} \frac{d \delta u}{d x} \right] dx = \bar{P} \delta u(L) + \int_0^L \bar{q} \delta u dx \quad \forall \delta u$$

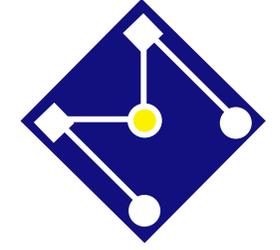


TÉCNICA DOS ELEMENTOS FINITOS

O domínio da solução é discretizado pela união de um conjunto de subdomínios, ou elementos finitos. Uma aproximação global da solução (para todo o domínio do problema) pode ser construída pelas contribuições de aproximações locais definidas nos domínios de cada elemento finito.

No domínio de um elemento, as aproximações de Galerkin para os campos de deslocamento e deslocamento virtual são construídas por uma base de funções de forma polinomiais,

$$u^e(x) = u_i^e N_i^e(x); \quad \delta u^e(x) = \delta u_j^e N_j^e(x) \quad N_i^e(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$



EM NOSSO EXEMPLO:

$$u^e(x) = N_1^e(x)u_1^e + N_2^e(x)u_2^e$$

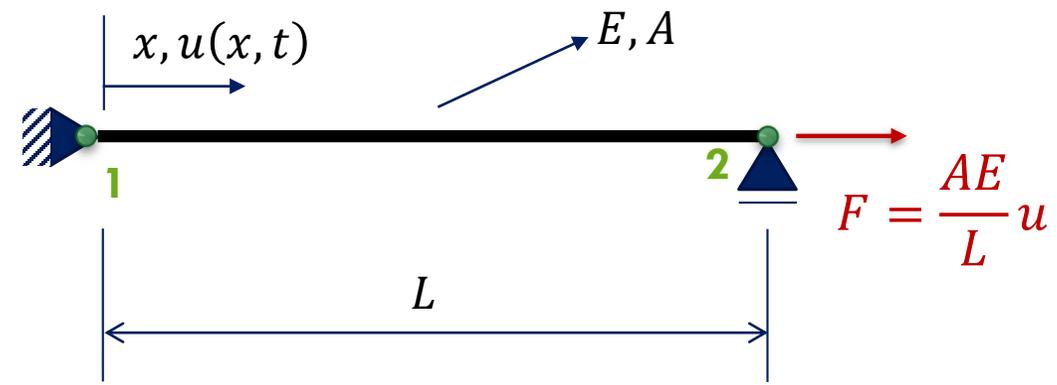
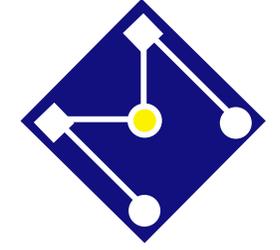
$$N_1^e(x) = 1 - \frac{x}{L^e}; \quad N_2^e(x) = \frac{x}{L^e} \quad c/ \quad 0 \leq x \leq L^e$$

Segue daí que:

$$K^e = \begin{bmatrix} \int_0^{L^e} \left[EA \frac{dN_1^e}{dx} \frac{dN_1^e}{dx} \right] dx & \int_0^{L^e} \left[EA \frac{dN_1^e}{dx} \frac{dN_2^e}{dx} \right] dx \\ \int_0^{L^e} \left[EA \frac{dN_2^e}{dx} \frac{dN_1^e}{dx} \right] dx & \int_0^{L^e} \left[EA \frac{dN_2^e}{dx} \frac{dN_2^e}{dx} \right] dx \end{bmatrix}$$

$$K_{ij}^e(u) u_j^e = f_j^e$$

$$\underline{f}^e = \begin{Bmatrix} \bar{P}_1^* + \int_0^{L^e} \bar{q} N_1^e(x) dx \\ \bar{P}_2^* + \int_0^{L^e} \bar{q} N_2^e(x) dx \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_1^* + \frac{\bar{q} L^e}{2} \\ \bar{P}_2^* + \frac{\bar{q} L^e}{2} \end{Bmatrix}$$



$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}; \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

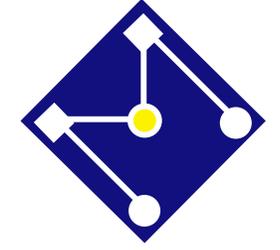
$$K = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F = Ku$$

Rigidez de um elemento de treliça unidimensional

E OS PROBLEMAS NÃO
LINEARES???





$$\mathbf{K} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}$$



$$\varepsilon = \mathbf{B} \mathbf{u}$$

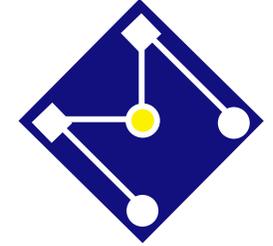


$$\sigma = E \varepsilon$$

σ depende de ε
 que depende de u
 que é calculado
 através da matriz
 de rigidez \mathbf{K} ...



\mathbf{K} depende dos parâmetros
 do material (\mathbf{E}) e da
 geometria (\mathbf{S}, \mathbf{L})



PROBLEMA LINEAR

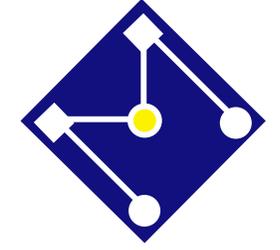
$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}$$

Constantes! Não dependem dos deslocamentos!

PROBLEMA NÃO LINEAR

$$[\mathbf{K}(\mathbf{u})]\mathbf{u} = [\mathbf{F}(\mathbf{u})]$$

Rigidez e/ou forças são em função dos deslocamentos!



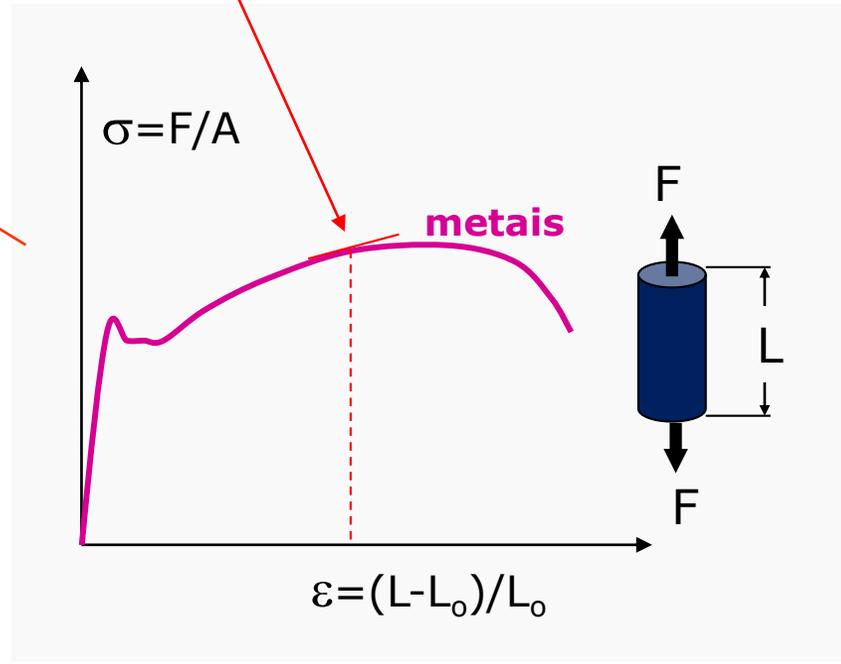
MATERIAL

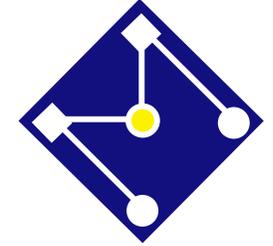
$$[K] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

K depende de **E**, que depende de ϵ , que depende de **u** e...

$$...[u] = [K]^{-1}[F]...$$

... **u** depende de **K**

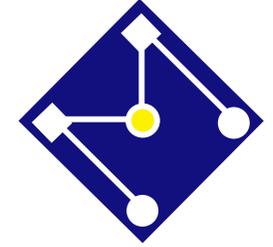




PROPRIEDADES DOS MATERIAIS

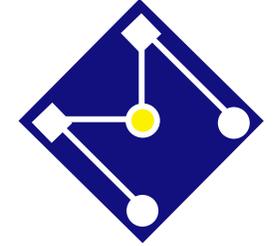
- Os programas de E.F. apresentam uma biblioteca de modelos de materiais – o Dyna e o Abaqus têm mais de 100 modelos diferentes para escolher.
- Cada modelo necessita de parâmetros, que são características do material extraídas de ensaios experimentais...
 - Modelo elástico linear, por exemplo, necessita dos parâmetros: módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson e densidade.
 - Modelos mais sofisticados requerem parâmetros que nem sempre podem ser obtidos de ensaios de tração uniaxial simples.

A dificuldade está em encontrar valores relevantes para os parâmetros requeridos pelo modelo.



MODELO ELÁSTICO LINEAR

- Por definição, o material elástico apresenta as seguintes características,
 - Relação tensão deformação é linear;
 - O comportamento do material é completamente reversível: isto é, se você impõe uma dada temperatura fixa ou previne a troca de calor com o ambiente, e submete o material a um ciclo fechado de deformação (i.é, começa e termina no mesmo ponto), o trabalho feito no material é nulo;
 - A tensão em um ponto depende apenas da medida de deformação total naquele ponto;
 - Deformações são pequenas.



Lei de Hooke

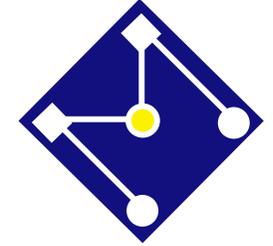
$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$$

Material elástico linear isotrópico:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 - \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1 - \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Rigidez: \mathbf{D}

Flexibilidade = \mathbf{D}^{-1}



MATERIAIS MAIS COMPLICADOS

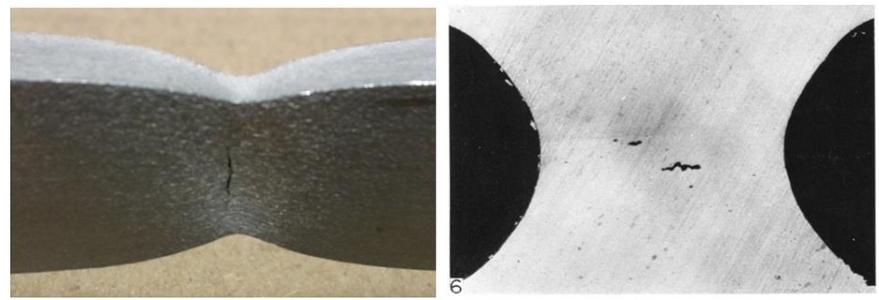
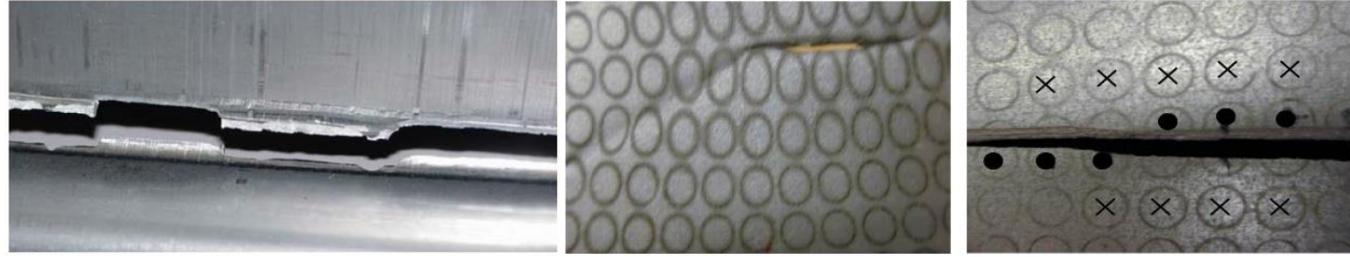
- Além do modelo de material elástico linear, tem-se :
 - material não linear (elástico ou não)
 - resposta dependente do tempo
 - resposta dependente da temperatura
 - dano do material com perda de rigidez...

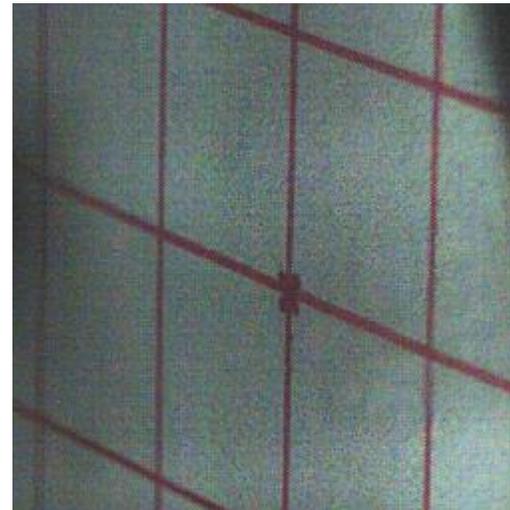
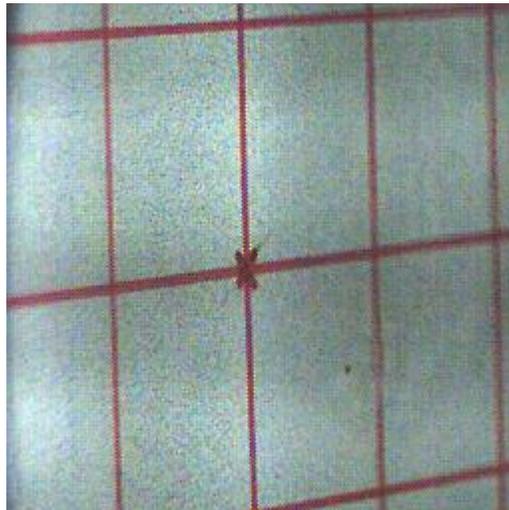
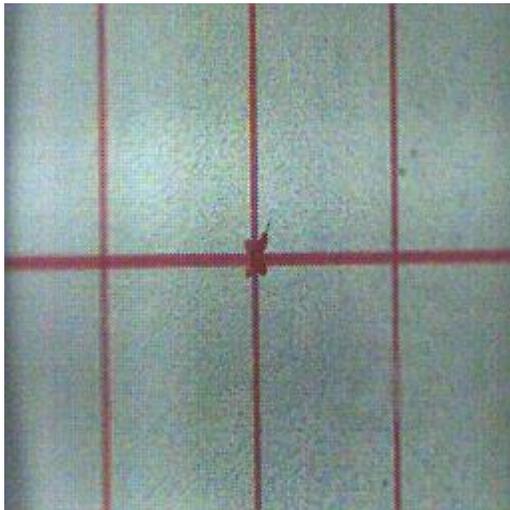
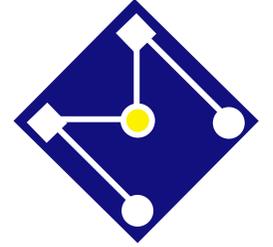
- Em princípio, estes representam a realidade encontrada

- Esses modelos, entretanto, requerem, algumas vezes, complicados parâmetros de entrada...



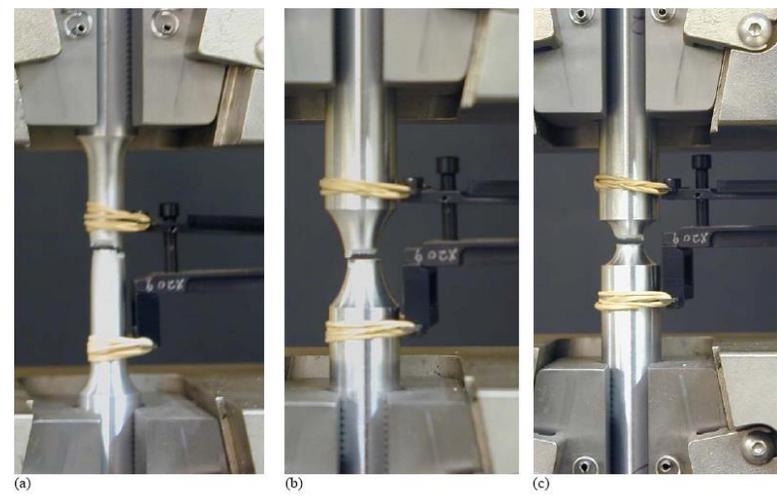
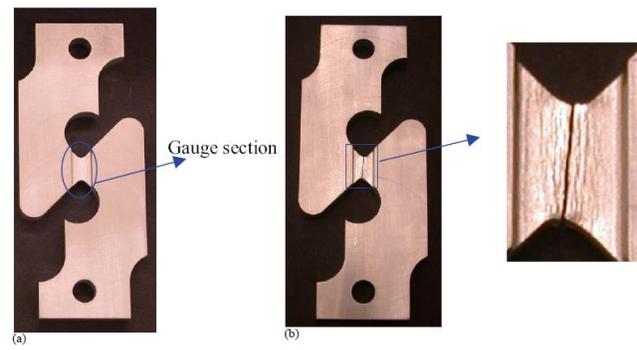
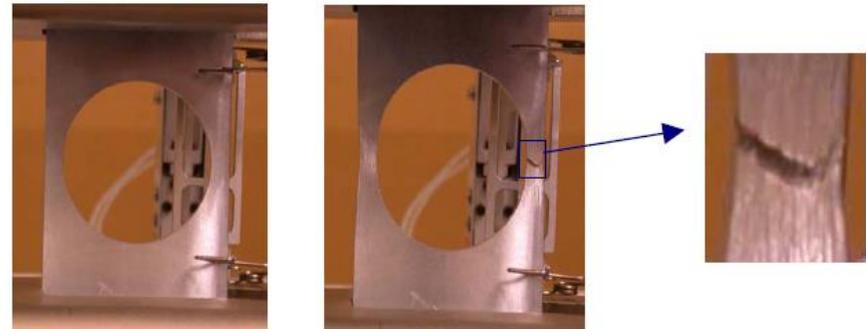
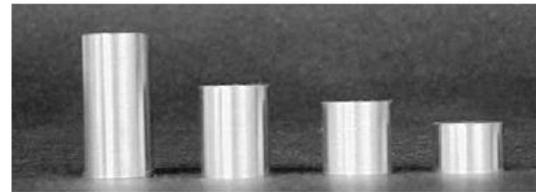
FALHA: UM UNIVERSO



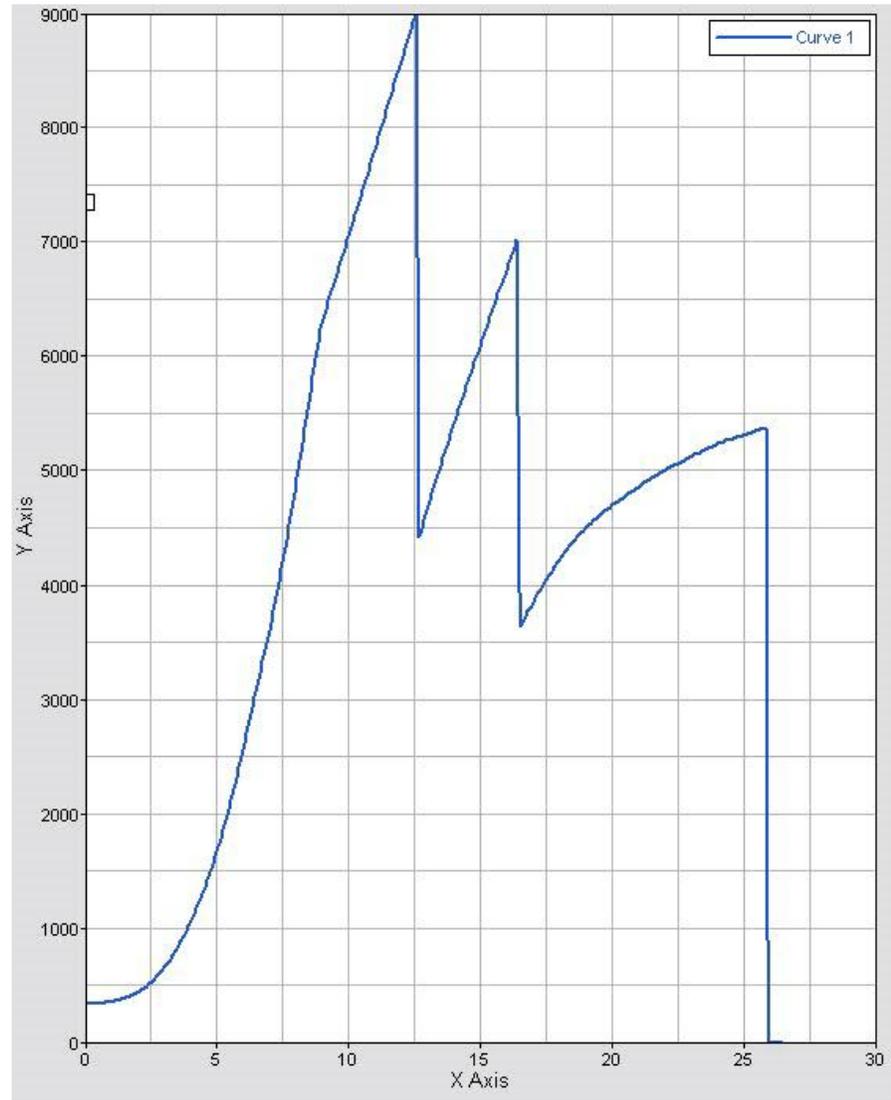
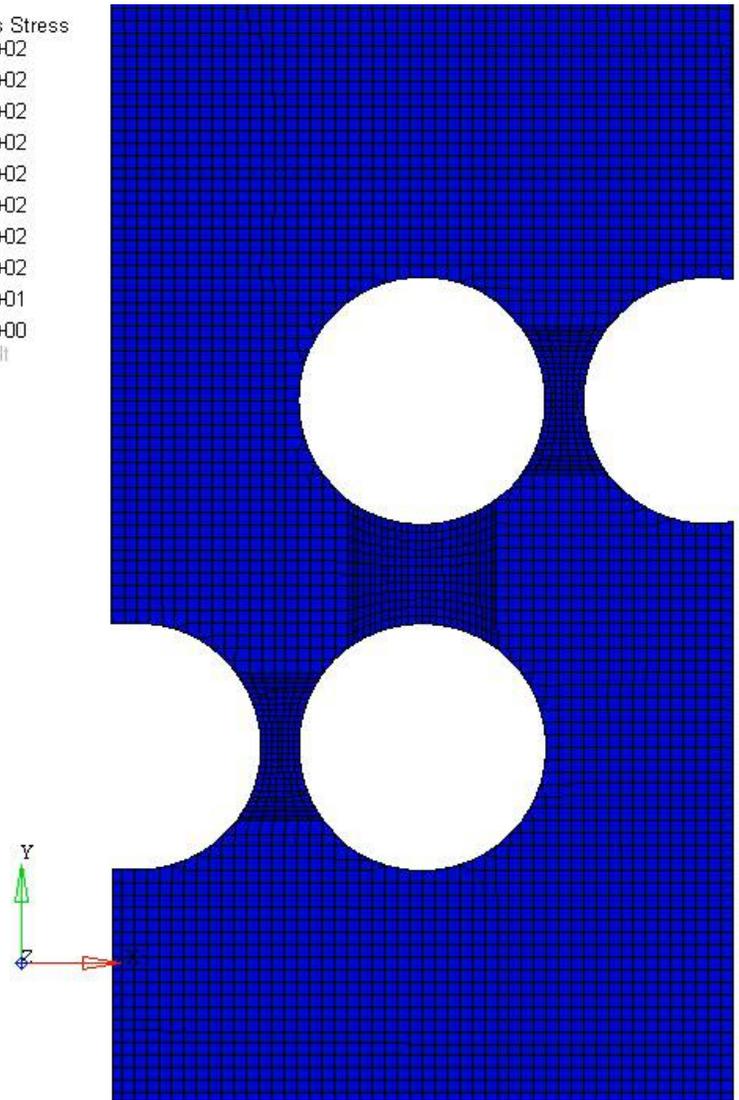
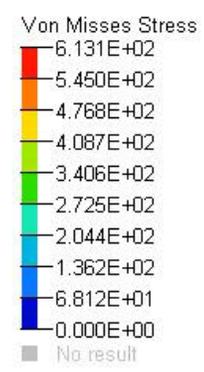
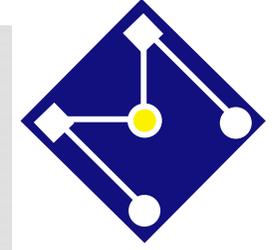


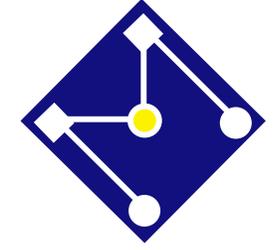


ENSAIOS DE CARACTERIZAÇÃO

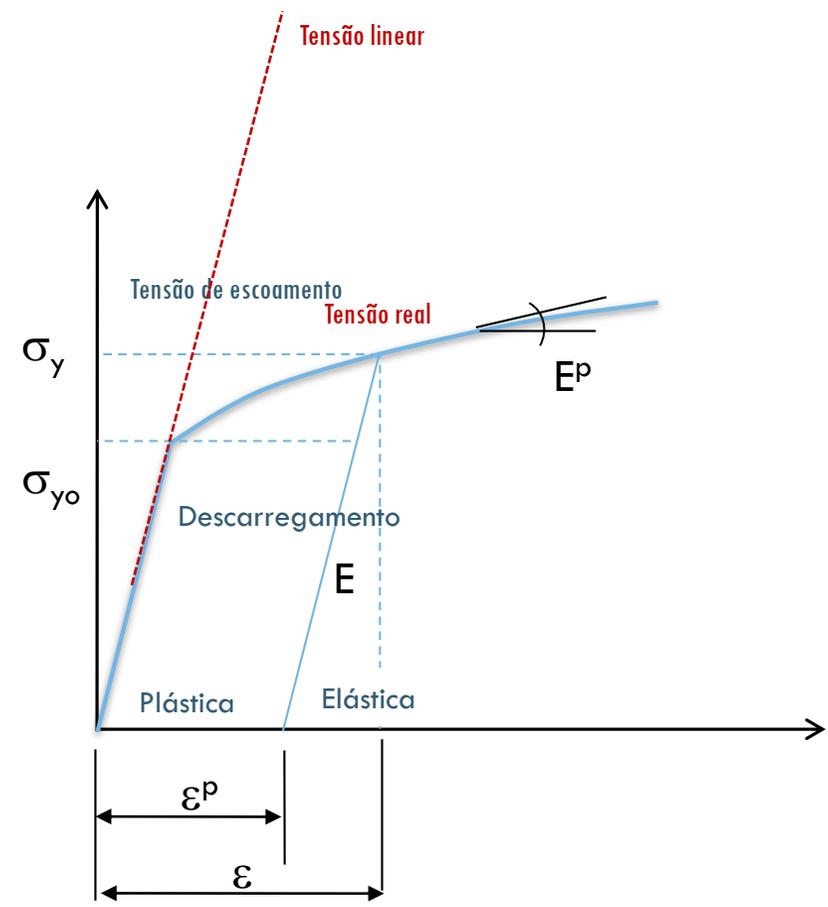


Yingbin Bao, Tomasz Wierzbicki. On fracture locus in the equivalent strain and stress triaxiality space, *International Journal of Mechanical Sciences* 46 (2004) 81–98.



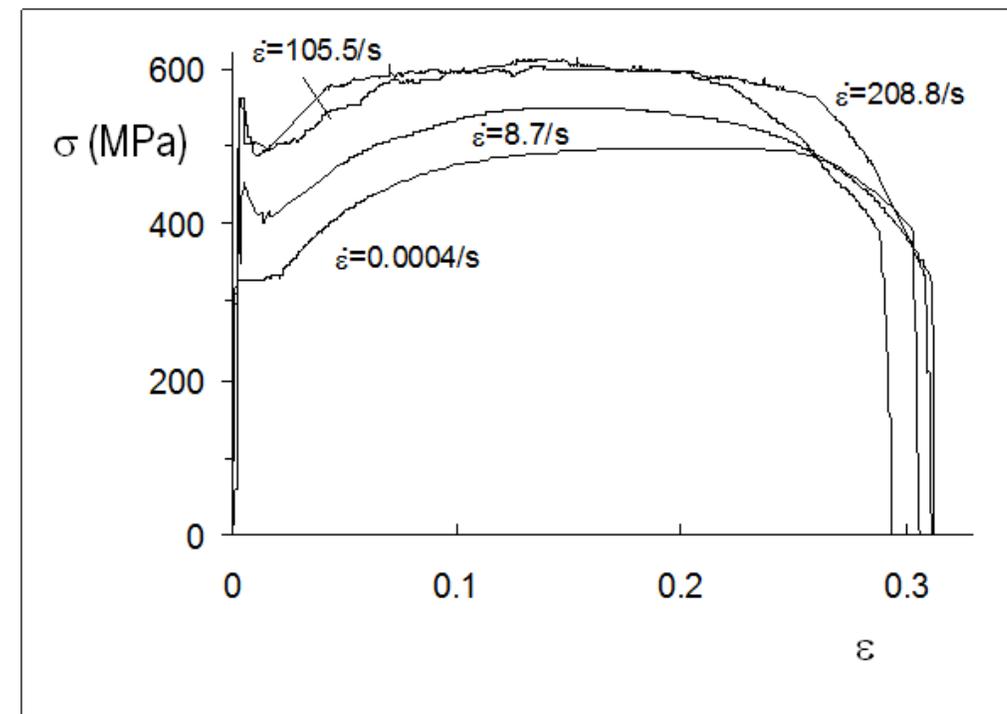


PLASTICIDADE





MATERIAL DEPENDENTE DA TAXA DE DEFORMAÇÃO E TEMPERATURA



aço

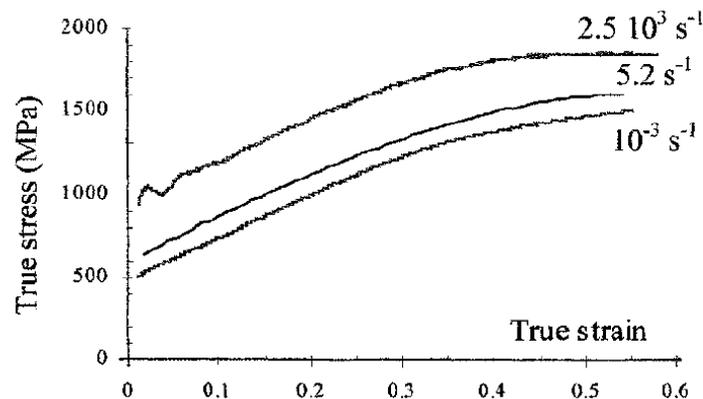
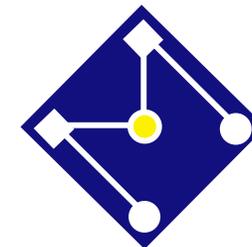


Figure 1: Stress-strain curves of Uranus B66* at different strain rates at room temperature

* nitrogen austenitic stainless steel

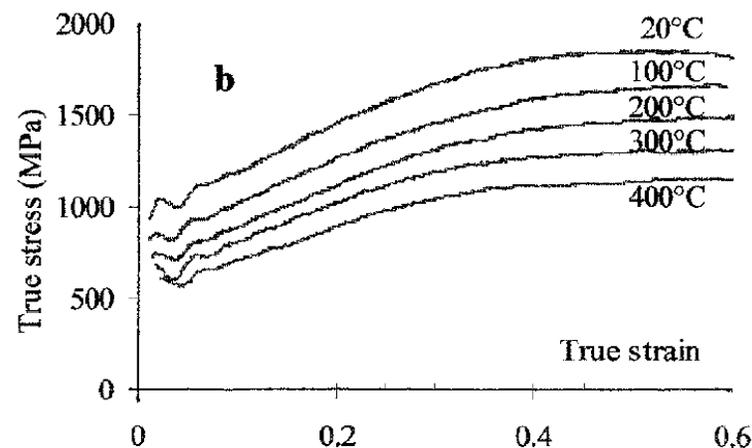
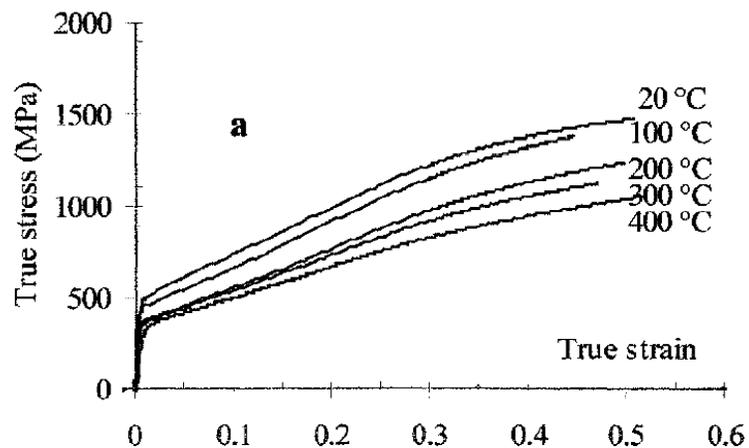
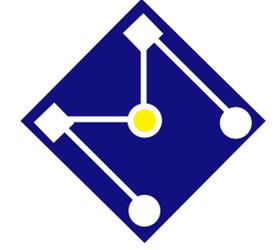


Figure 2: Stress-strain curves of Uranus B66 at different temperatures: a) at 10^{-3} s^{-1} and b) at $2.5 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$

S. Fréchar, A. Lichtenberger, F. Rondot, N. Fader, A. Redjaïmia and M. Adoum *A new constitutive model for nitrogen austenitic stainless steel* J. Phys. France 110 (2003)



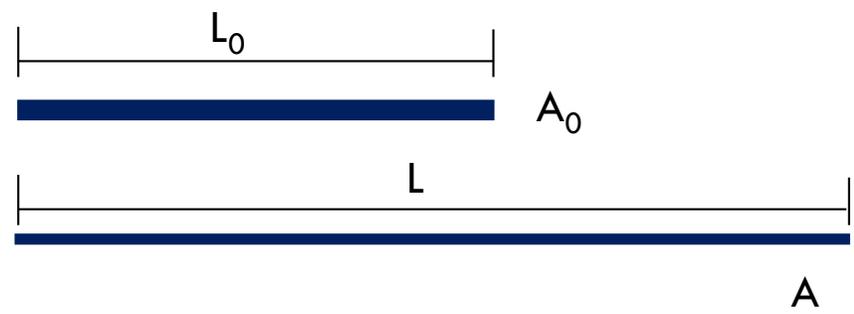
GEOMETRIA

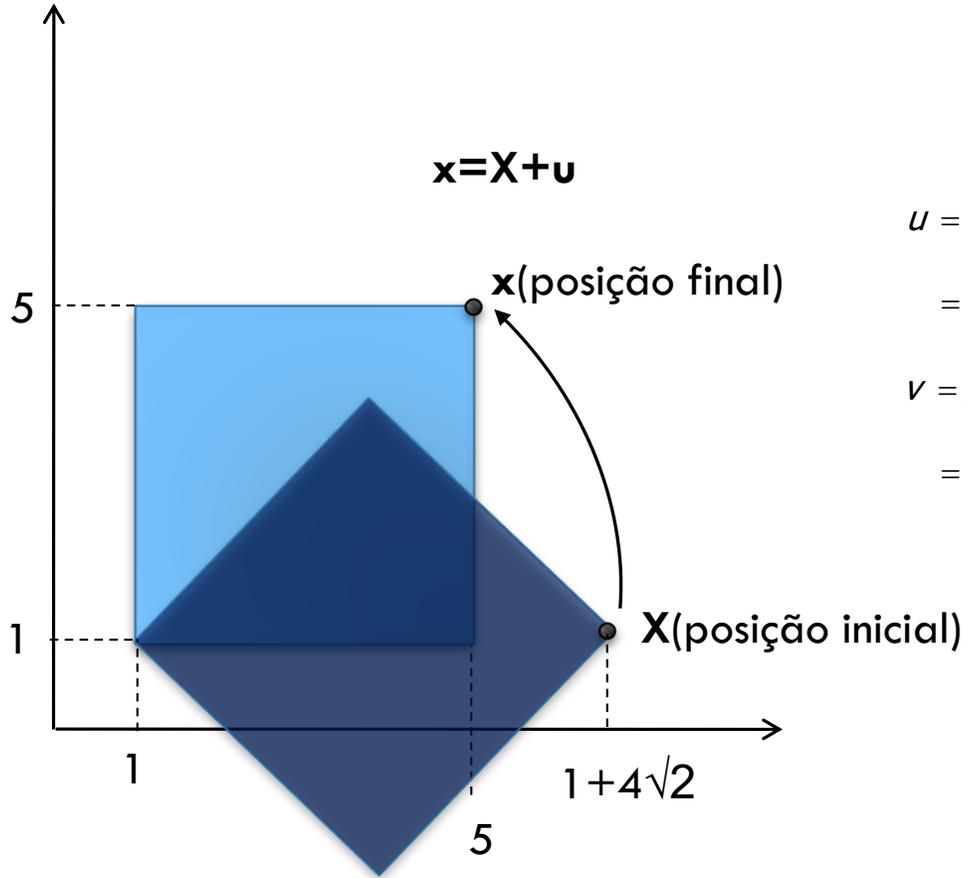
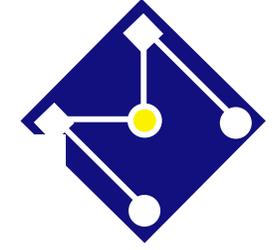
$$[K] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

***K** depende de **A** e **L**,
que dependem de **u**
e...*

$$...[u] = [K]^{-1} [F] ...$$

*... **u** depende de **K***



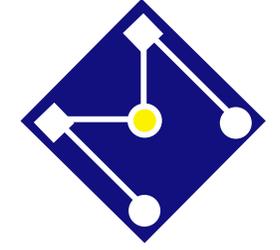


$$\begin{aligned}
 u &= x - X \\
 &= 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y - X = 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y \\
 v &= y - Y \\
 &= 1 - \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y - Y = 1 - \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}X + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)Y
 \end{aligned}$$

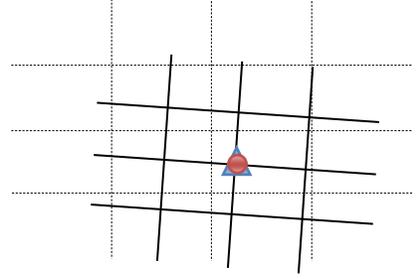
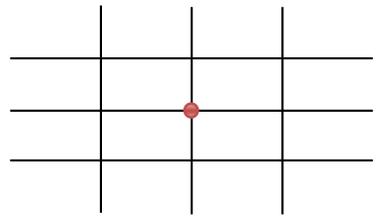
$$\begin{aligned}
 x &= 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y \\
 y &= 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y - \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial X} \\ \frac{\partial v}{\partial Y} \\ \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X} \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$$

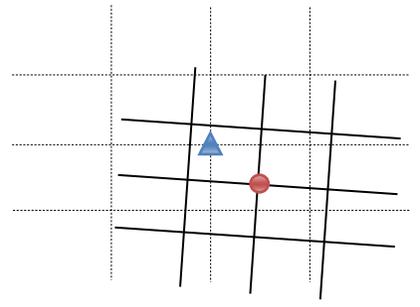
• A idéia básica da *OBJETIVIDADE* é que rotações de corpo rígido não induzam deformação ao material.



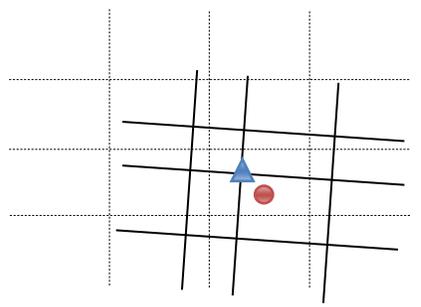
ADAPTAÇÃO DE MALHA



Malha Lagrangiana

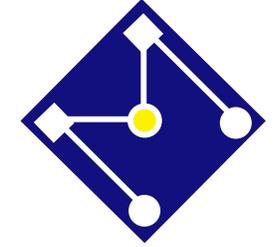


Malha Euleriana

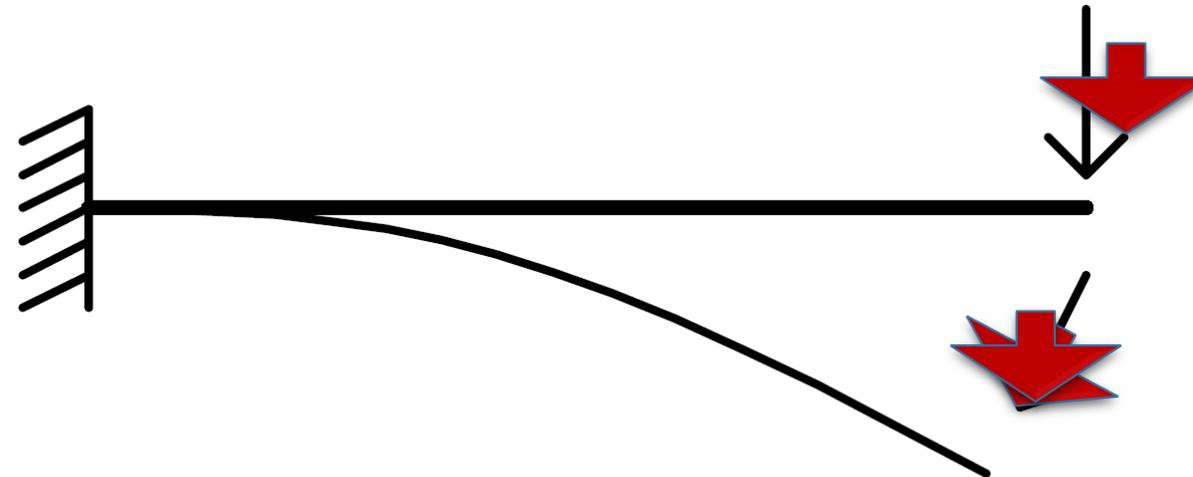


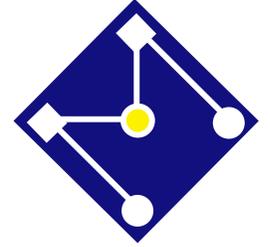
Malha ALE – Lagrangiana Euleriana arbitrária

▲ Ponto material sendo analisado
● Posição original do ponto material



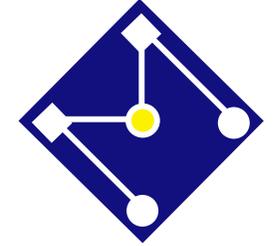
GRANDES DESLOCAMENTOS — PENSE SOBRE O CARREGAMENTO...





HIPERELASTICIDADE

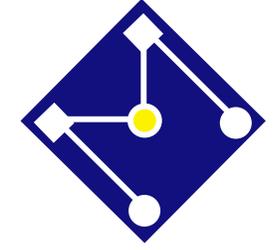
- Inclui não linearidade geométrica e do material.
- Com a hiperelasticidade é possível modelar, por exemplo, borracha, espumas elásticas, tecido humano, etc...



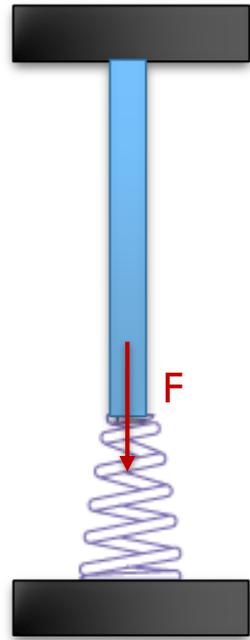
MELHORES MODELOS DE HIPERELASTICIDADE

Neo-hookean	9.26%
Arruda-Boyce	19.91%
Mooney-Rivlin	25.00%
Ogden	13.43%
Marlow	6.02%
Polynomial	4.17%
Yeoh	9.72%
Wan der Waals	0.46%
Flory	0.93%
My own model	5.56%
Hyperelasticity is not good enough	5.56%

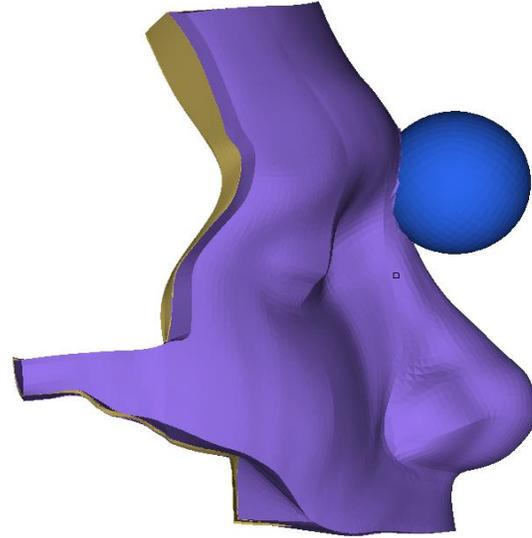
Total Votes: 216
<http://polymerfem.com>



CONTORNO

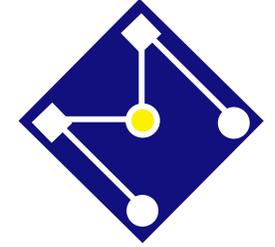


As condições de contorno dependem de **u**...



$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

... Mas elas são impostas em **K**
para calcular **u**

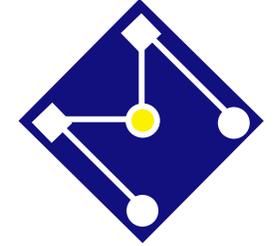


TODOS OS TIPOS DE NÃO LINEARIDADE



MODELO TRIDIMENSIONAL

Como devemos passar nossas ideias para o 3D?



FORÇAS DE VOLUME

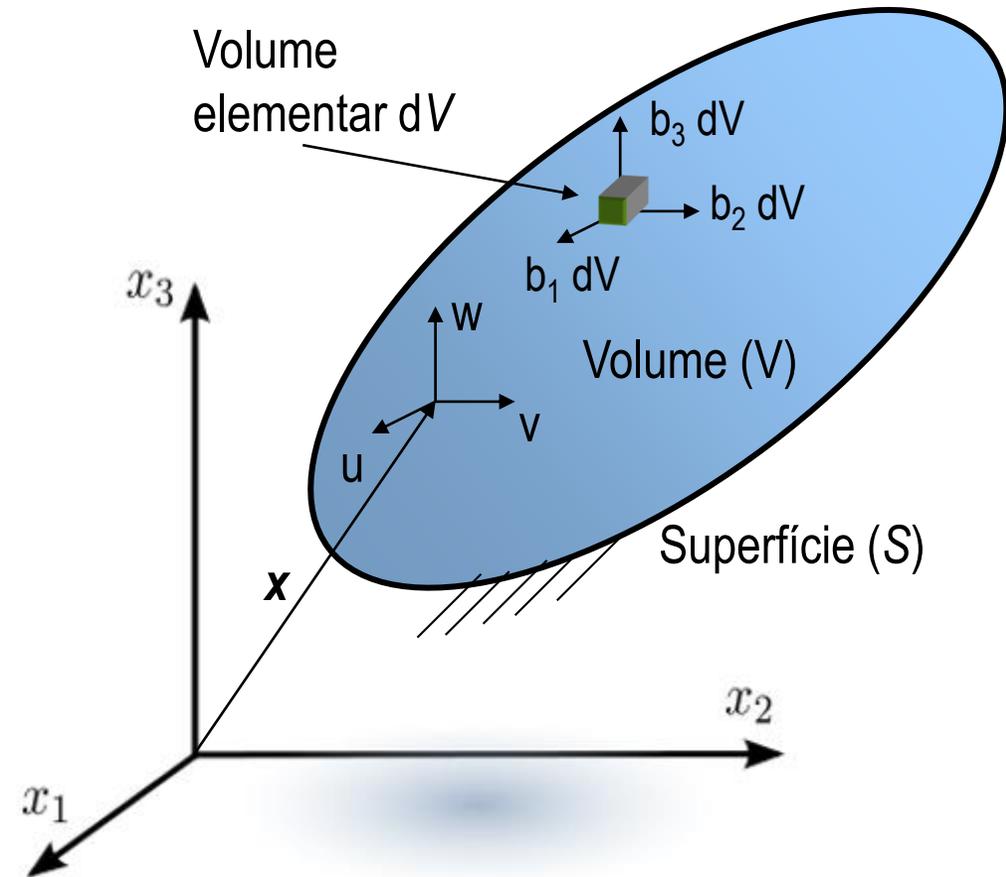
Forças totais de volume: $\mathbf{X} = \mathbf{b} - \rho \ddot{\mathbf{u}}$

Forças de volume:

$$\mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$$

Se o corpo é acelerado, então as forças de inércia,

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} \rho \ddot{u} \\ \rho \ddot{v} \\ \rho \ddot{w} \end{Bmatrix}$$

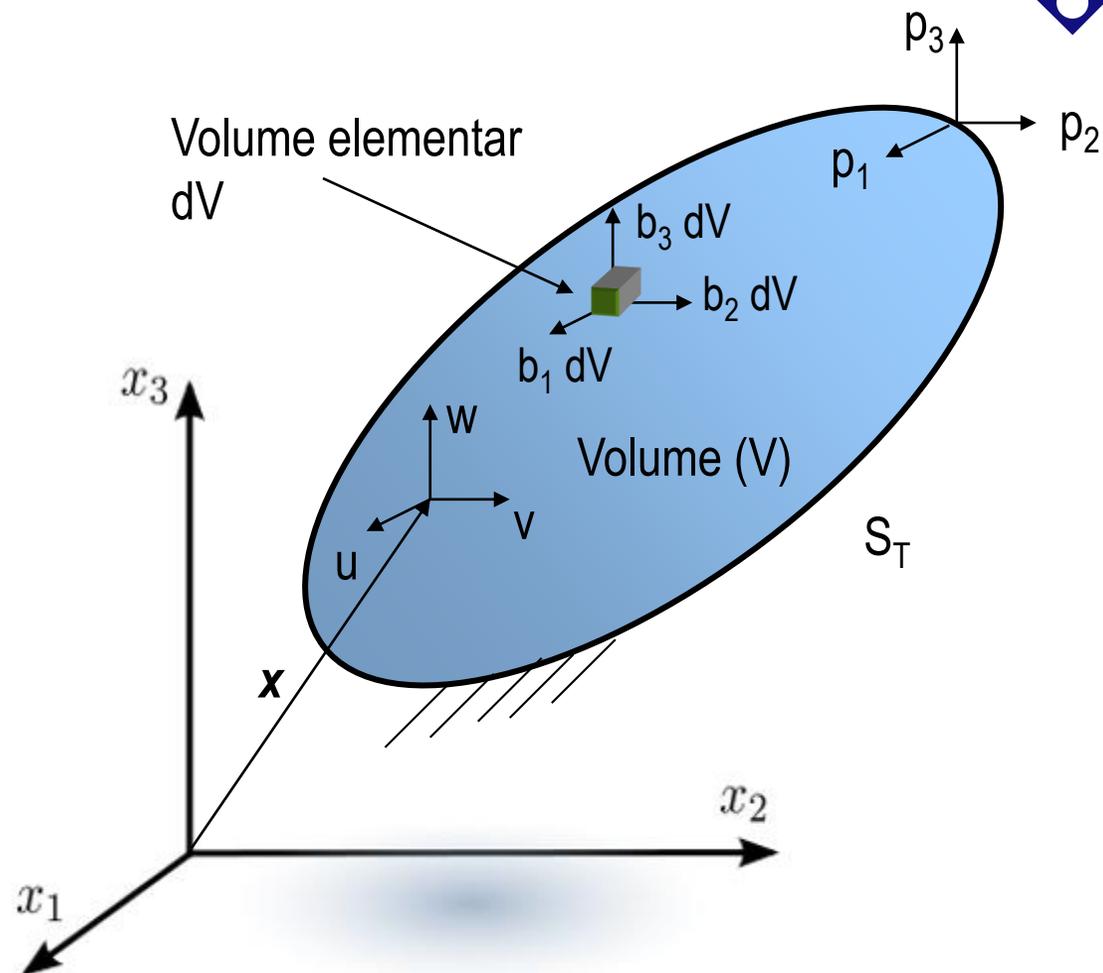


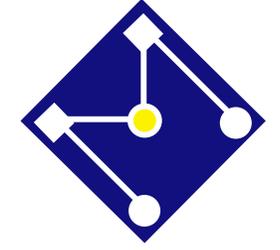


FORÇAS DE SUPERFÍCIE

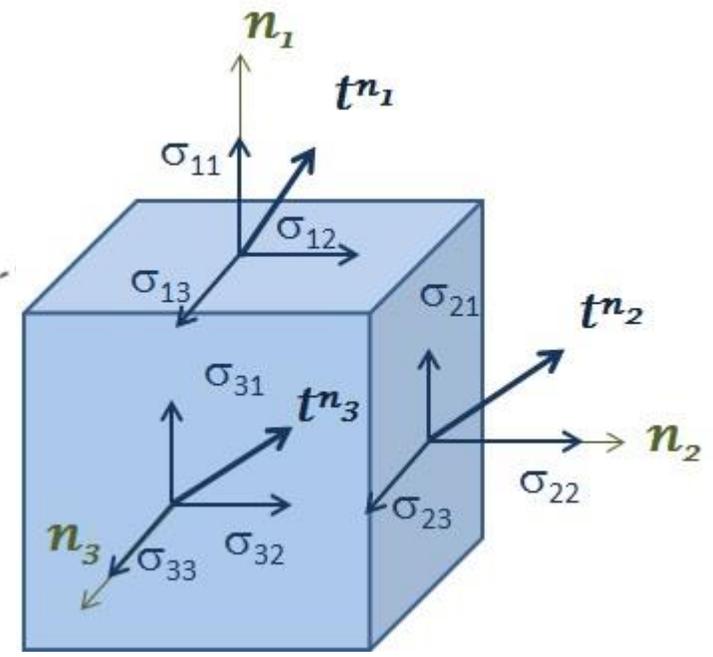
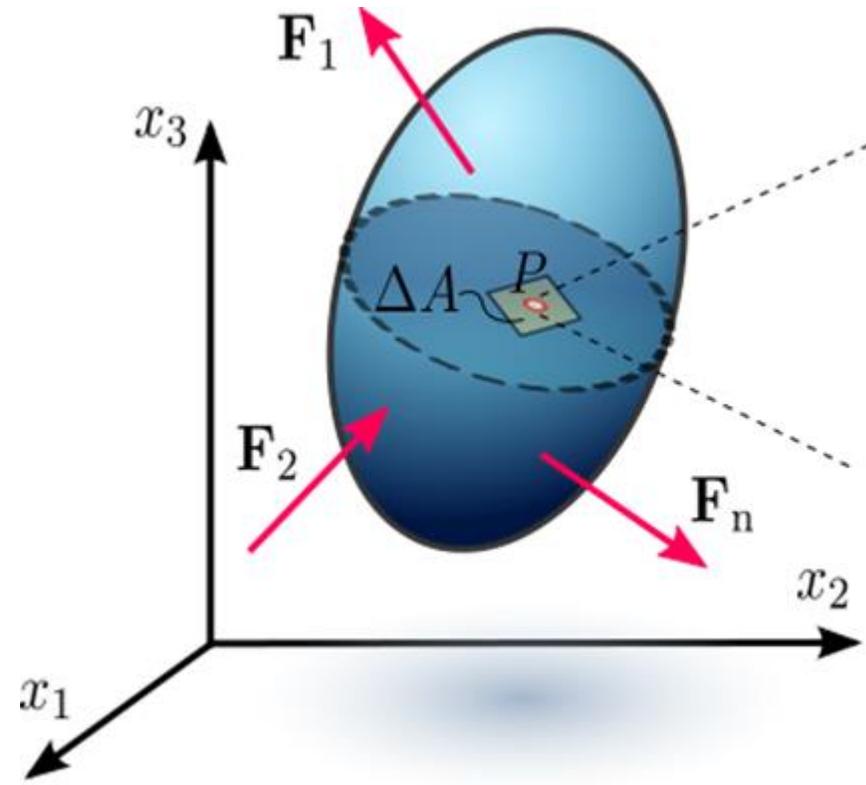
Força distribuída por unidade de superfície

$$\mathbf{T}_s = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix}$$



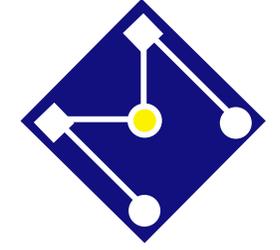


ESTADO TRIDIMENSIONAL DE TENSÕES



Se extrairmos um *volume elementar* do corpo vamos ver que, devido às forças externas aplicadas, há forças de reação.

Para o cubo, as **forças internas por unidade de área** (t^{n_i}), em cada face, podem ser decompostas em três componentes ortogonais.



Pode-se decompor os vetores de tensão em componentes normais e cisalhantes

$$\mathbf{t}^n = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n} = \sigma_{ij} n_j$$

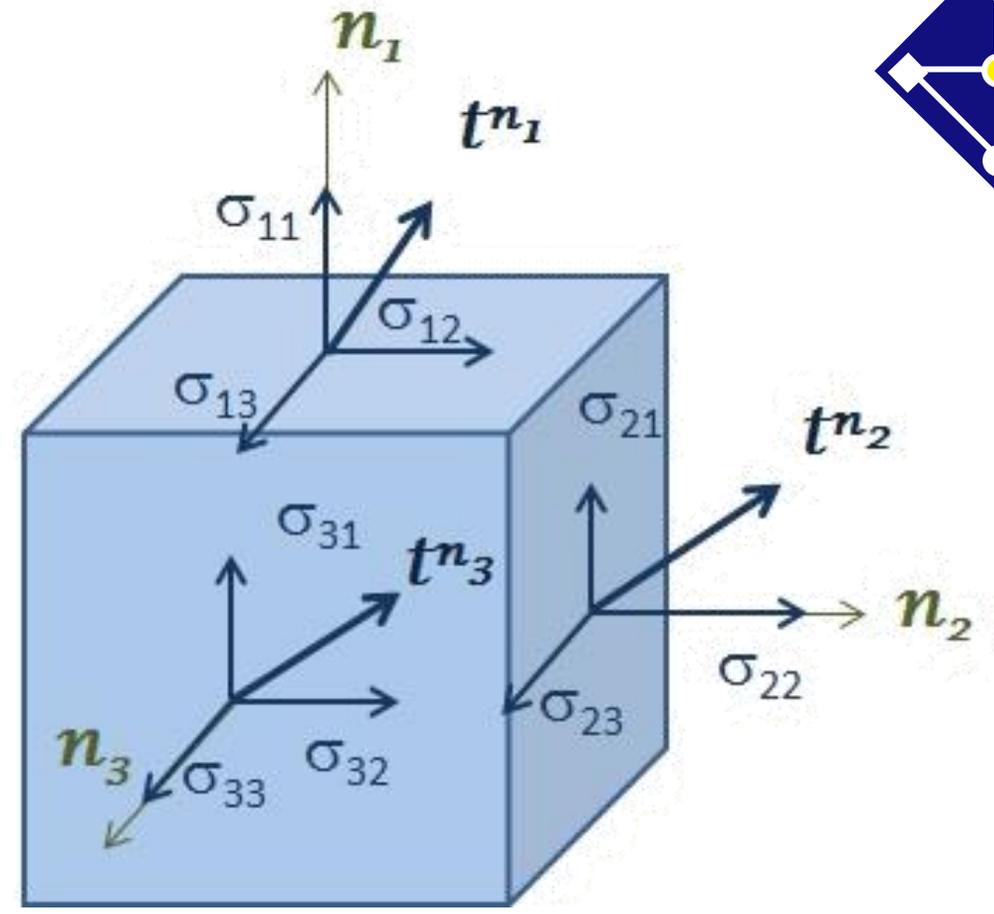
$$t^{(n_1)} = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3$$

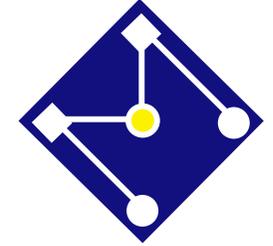
$$t^{(n_2)} = \sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{23} n_3$$

$$t^{(n_3)} = \sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 + \sigma_{33} n_3$$

Tensor de tensões de Cauchy

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$





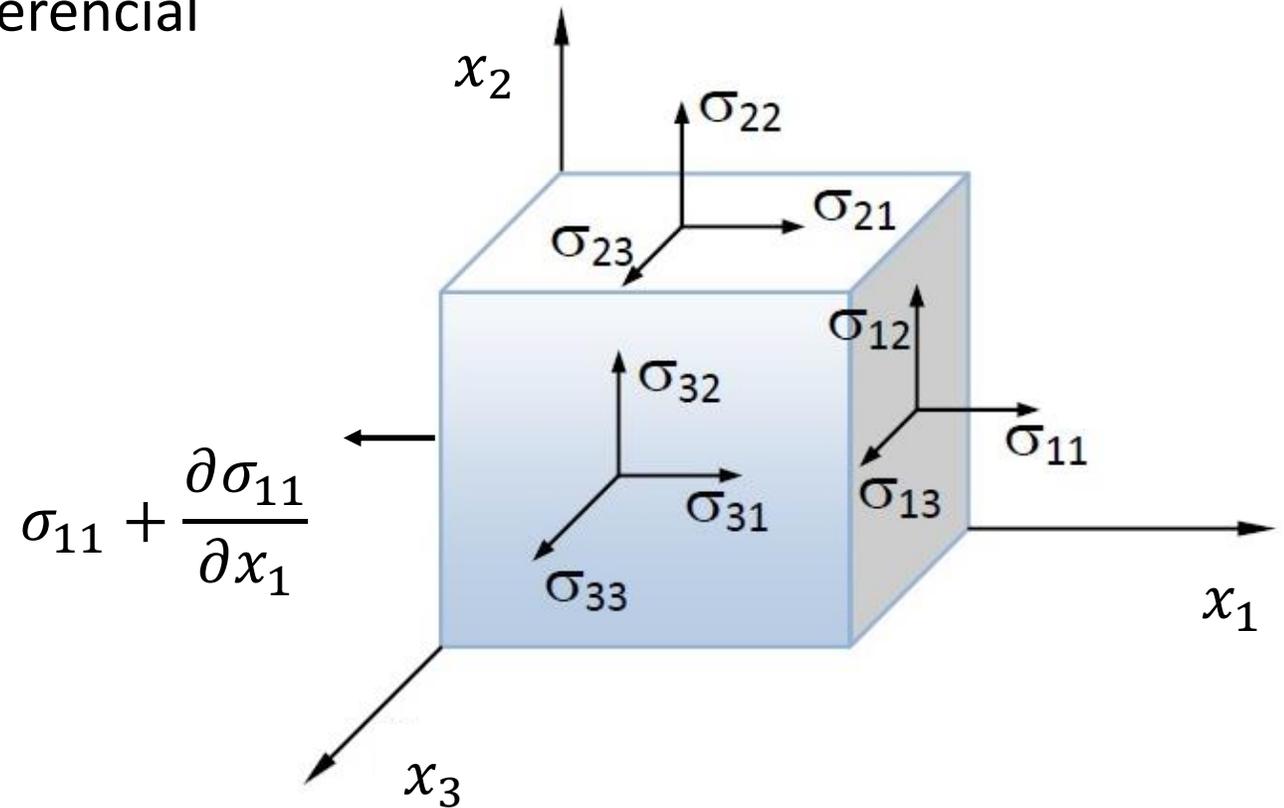
EQUILÍBRIO

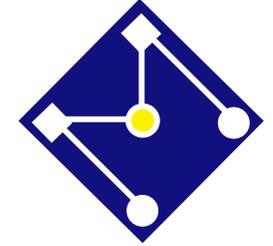
Considere o equilíbrio de um volume diferencial para obter as 3 equações de equilíbrio,

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + b_1 = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + b_2 = 0$$

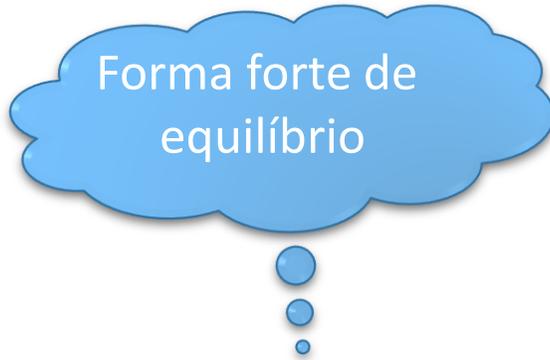
$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + b_3 = 0$$





FORMULAÇÃO DIFERENCIAL DO EQUILÍBRIO

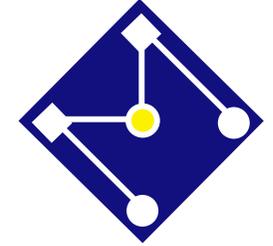
De forma compacta,



$$\partial^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = m \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{t^2}$$

onde

$$\partial = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix}$$



PROBLEMA

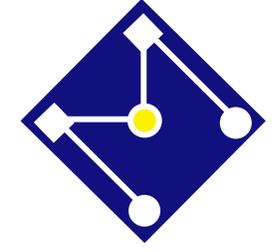
“Dado o carregamento externo aplicado (em S^T e em V) e os deslocamentos prescritos (em S^u) queremos encontrar deslocamentos, deformações e tensões, que mantêm o corpo em equilíbrio.”

Equações de equilíbrio $\partial^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{X} = \mathbf{0}$ em V

Condições de contorno 1. **Deslocamentos no contorno:** Deslocamentos são prescritos na parte S^u do contorno

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{presc} \text{ em } S^u$$

2. **Forças no contorno:** Forças são especificadas na parte S^T do contorno.



TENSÕES PRINCIPAIS

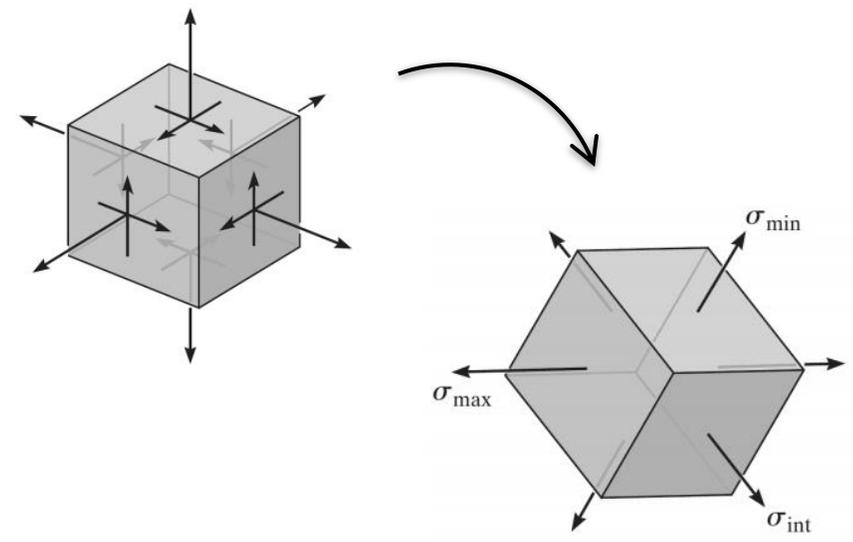
A equação associa cada direção n ao vetor de tensão t^n correspondente. Existe uma direção n , dita principal, em que t^n e n são colineares, para qual as tensões normais atingem os seus valores máximos e as tensões cisalhantes são nulas,

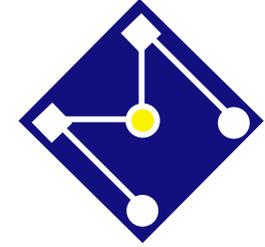
$$t^n = \sigma n$$

$$\sigma_{ij} n_j = \sigma \delta_{ij} n_j$$

Nesse caso, σ é um escalar.

$$|\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}| = \begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{vmatrix} = 0$$





$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$$

$$I_1 = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \left\{ \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^2) + [\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})]^2 \right\} = \frac{1}{2} (\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ij})$$

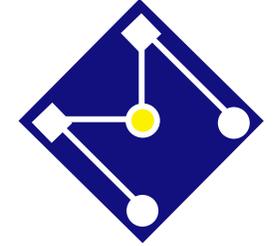
$$= \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{13}^2$$

$$I_3 = |\boldsymbol{\sigma}| = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{13}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2 + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13}$$

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$



TENSÃO CISALHANTE MÁXIMA

- A componente de cisalhamento resulta da diferença entre o módulo do vetor de tensão e de sua componente normal:

$$\begin{aligned} \tau_n^2 &= |t^n|^2 - \sigma_n^2 = t^n \cdot t^n - (Tn \cdot n)^2 \\ &= Tn \cdot Tn - (Tn \cdot n)^2 \end{aligned}$$

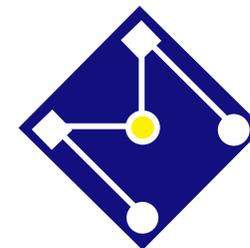
- Supondo o sistema de referências alinhado com as direções principais,

$$t^n = T^* n \quad \text{com} \quad T^* = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_n = T^* n \cdot n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$$

$$\tau_n^2 = |t^n|^2 - \sigma_n^2 = |t^n|^2 - (\sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2)$$

$$\tau_n^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - [\sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2]$$



$$\tau_n^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - \left[\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \right]^2$$

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \rightarrow n_3^2 = 1 - n_1^2 - n_2^2$$

$$\tau_n^2 = (\sigma_1^2 - \sigma_3^2) n_1^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_3^2) n_2^2 + \sigma_3^2 - \left[(\sigma_1 - \sigma_3) n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) n_2^2 + \sigma_3 \right]^2 = f(n_1, n_2)$$

$$\frac{\partial \tau_n^2}{\partial n_1} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \tau_n^2}{\partial n_2} = 0$$

A solução trivial $n_1 = n_2 = 0$ e $n_3 = \pm 1$ corresponde a $\tau_n^2 = 0$ (valor mínimo). Outras soluções resultam de $n_1 \neq 0, n_2 = 0$ e $n_1 = 0, n_2 \neq 0$ e são de maior interesse por conduzirem a valores máximos.



$$2n_1(\sigma_1^2 - \sigma_3^2) - 4n_1^3(\sigma_1 - \sigma_3)^2 - 4n_1(\sigma_1 - \sigma_3)\sigma_3 = 0$$

$$(\sigma_1^2 - \sigma_3^2) - 2(\sigma_1 - \sigma_3)^2 n_1^2 - 2(\sigma_1 - \sigma_3)\sigma_3 = 0$$

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2(1 - 2n_1^2) = 0 \quad \therefore$$

$$n_1^2 = \frac{1}{2} \rightarrow n_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} e n_3 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tau_n^2 = \frac{1}{4}(\sigma_1 - \sigma_3)^2 \text{ ou } |\tau_n| = \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_3|$$

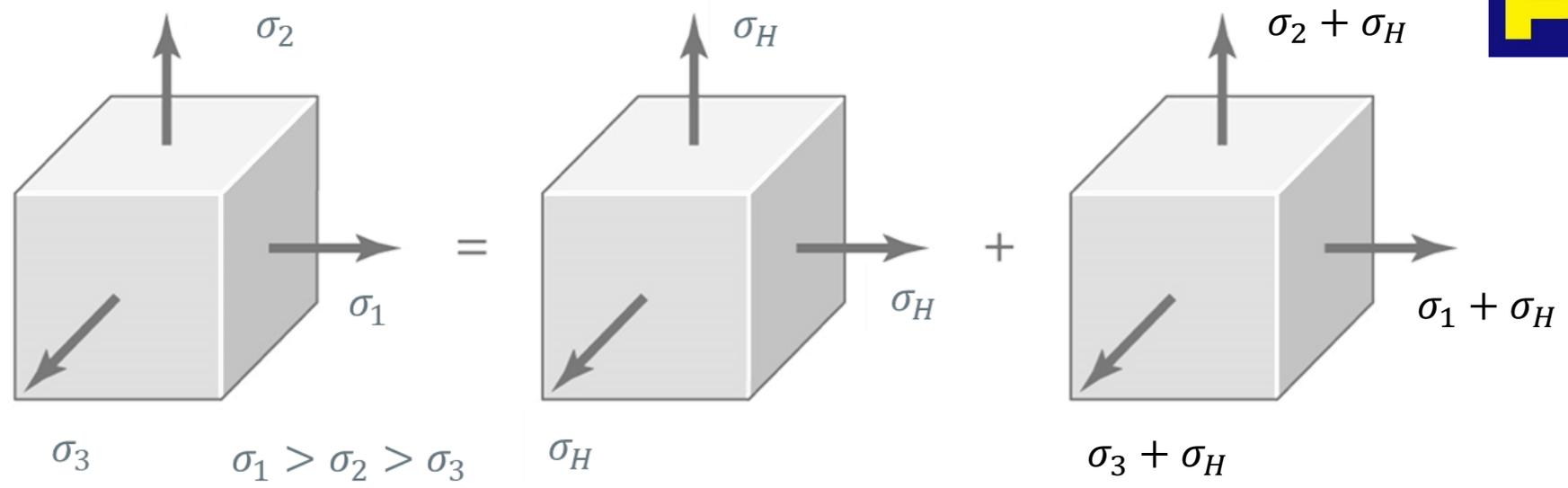
$$2n_2(\sigma_2^2 - \sigma_3^2) - 2[(\sigma_2 - \sigma_3)n_2^2 + \sigma_3]2(\sigma_2 - \sigma_3)n_2 = 0$$

$$(\sigma_2 - \sigma_3)^2(1 - 2n_2^2) = 0$$

$$n_2^2 = \frac{1}{2} \therefore n_2 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} e n_3 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$|\tau_n| = \frac{1}{2} |\sigma_2 - \sigma_3|$$

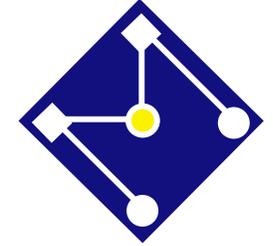
Nota-se que os planos de tensões de cisalhamento máximas formam 45° com os eixos principais de tensão normal.



$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{s} + \boldsymbol{\sigma}_H$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} \\ s_{13} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

$$p = -\frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = -\sigma_m$$



Invariantes da parte desviadora do tensor de tensões:

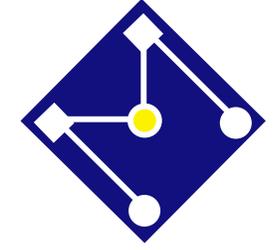
$$-s^3 - J_1 s^2 - J_2 s - J_3 = 0$$

$$J_1 = \text{tr}(\mathbf{s}) = s_{11} + s_{22} + s_{33} = 0$$

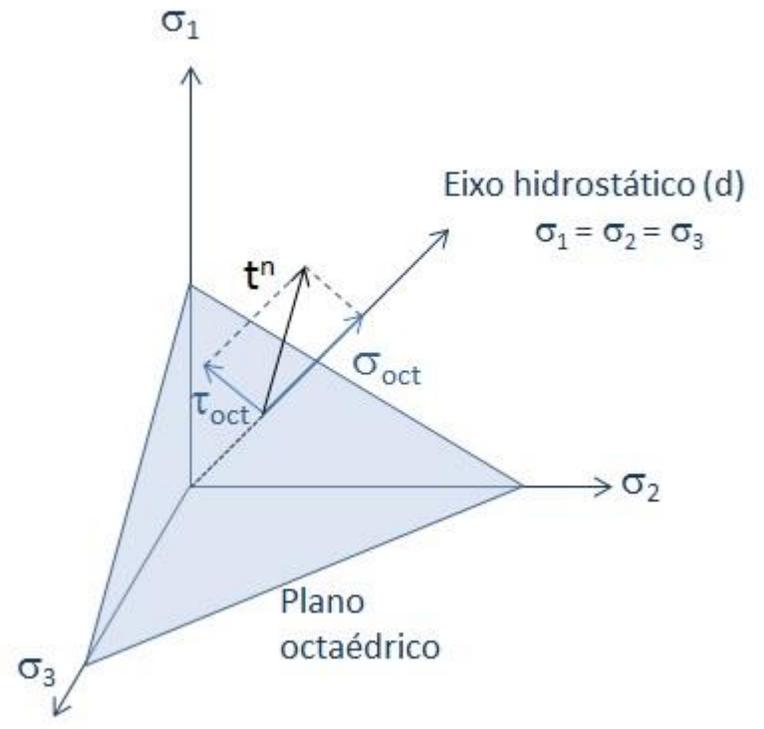
$$J_2 = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{s}^2) = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ji} = \frac{I_1^2}{3} - I_2$$

$$= \frac{1}{6} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \right]$$

$$J_3 = |\mathbf{s}| = \frac{1}{3} s_{ij} s_{jk} s_{ki} = \frac{2I_1^3}{27} - \frac{1}{3} I_1 I_2 + I_3$$



TENSÕES OCTAÉDRICAS

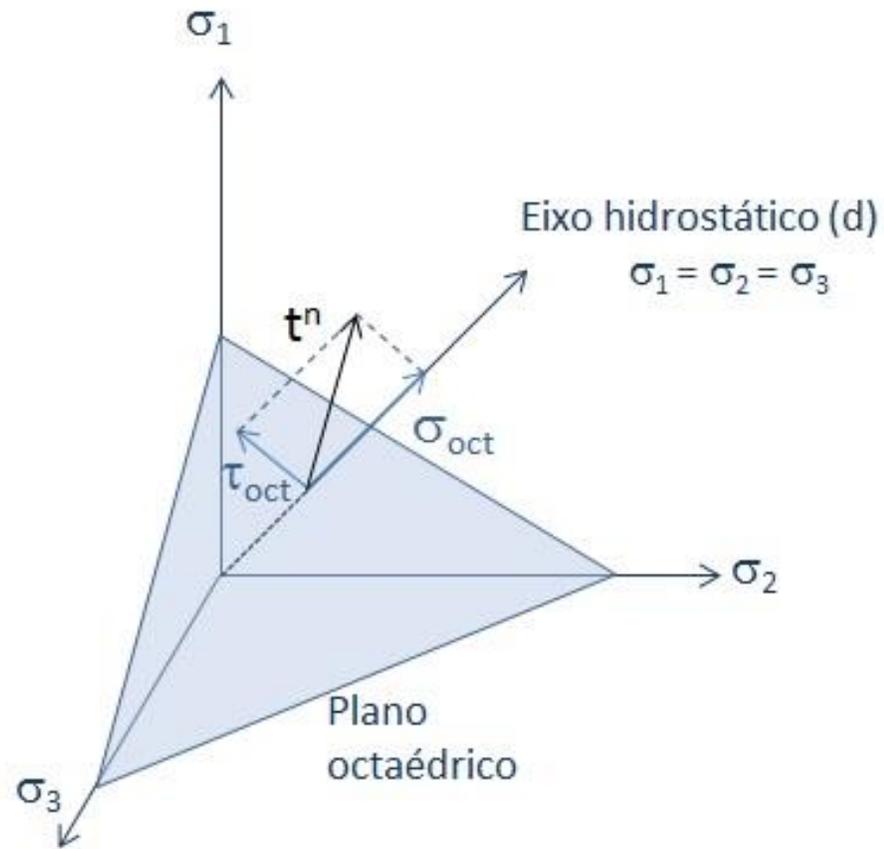
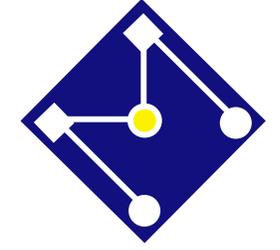


$$\mathbf{d} = [d_1, d_2, d_3]^T = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{e}_3$$

$$\sigma_{oct} = \mathbf{t}^n \cdot \mathbf{d} = \sigma_{ij}n_i d_j$$

$$\mathbf{n} \equiv \mathbf{d},$$

$$\sigma_{oct} = \sigma_1 d_1^2 + \sigma_2 d_2^2 + \sigma_3 d_3^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$



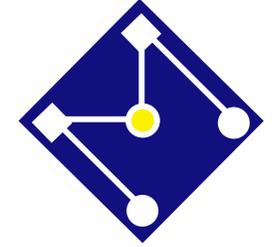
$$\|t^n\|^2 = \tau_{oct}^2 + \sigma_{oct}^2$$

$$\tau_{oct}^2 = \frac{1}{9} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

$$\tau_{oct} = \frac{2}{3} \sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2}$$

$$\tau_{oct}^2 = \frac{1}{3} (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)$$

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3} J_2}$$



SAIBA MAIS...

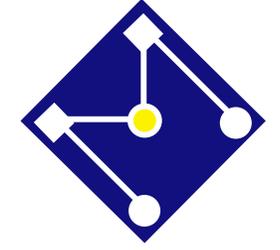
Os invariantes de tensão mais utilizados são I_1 , J_2 e J_3 . Esses invariantes são combinados na forma de tensão hidrostática (σ_H) ou pressão (p), tensão equivalente de von Mises (q), ângulo de Lode (θ) e triaxialidade (η)

$$\sigma_H = -p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{I_1}{3} = \sigma_{oct}$$

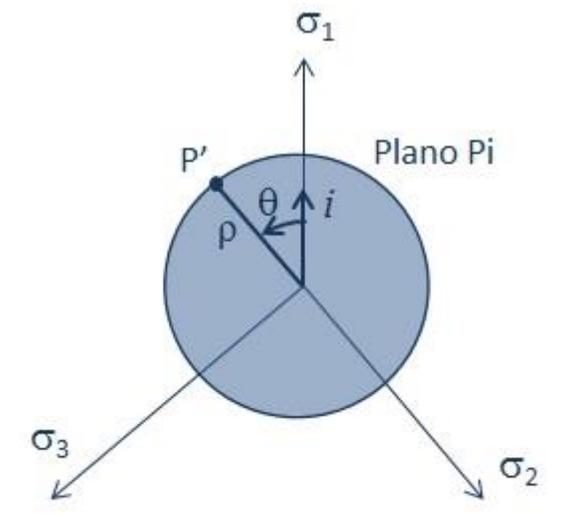
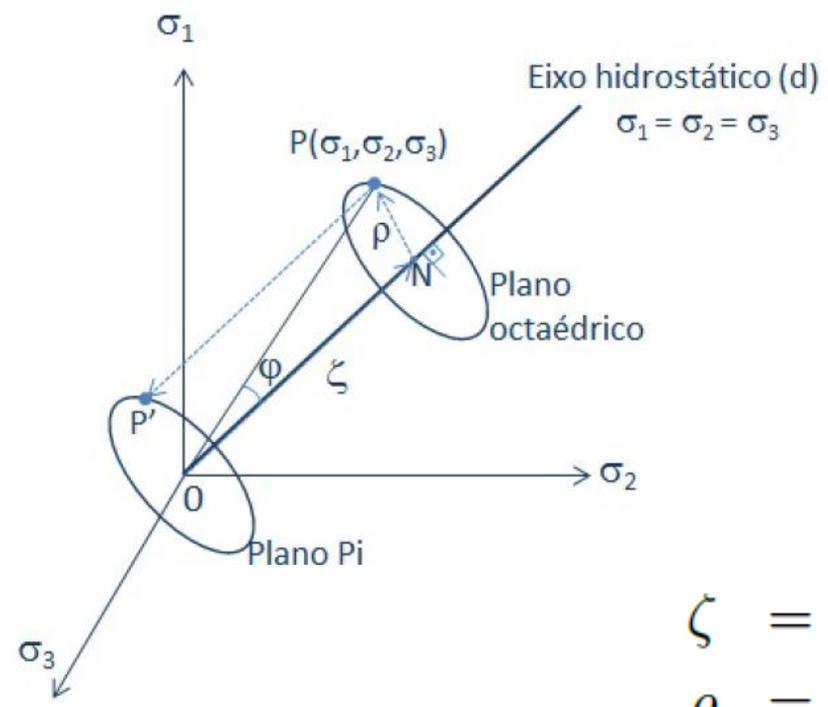
$$q = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s}} = \sqrt{3J_2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \tau_{oct}$$

$$\theta = \frac{1}{3} \cos^{-1} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right)$$

$$\eta = \frac{\sigma_H}{q}$$

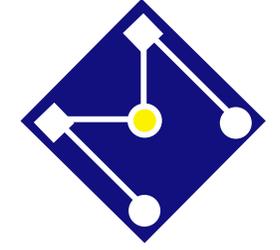


SIGNIFICADO FÍSICO DOS INVARIANTES

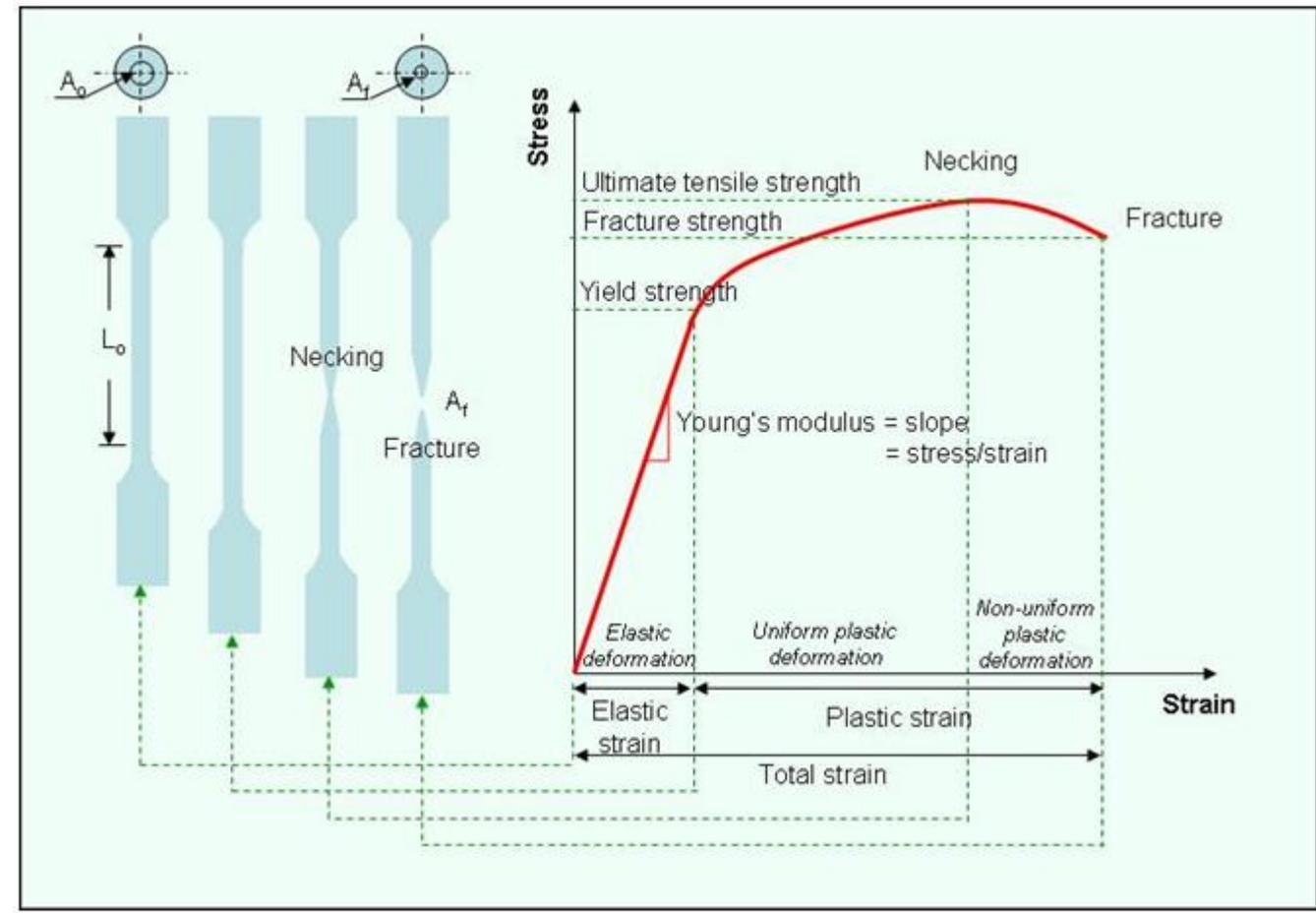


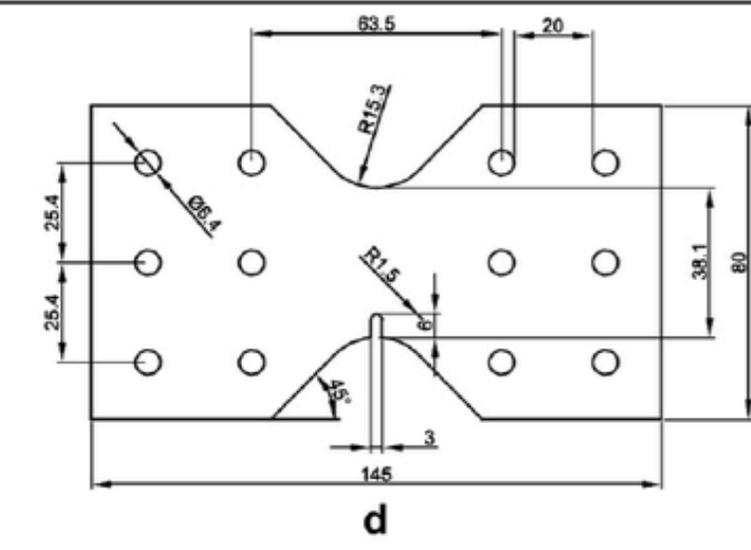
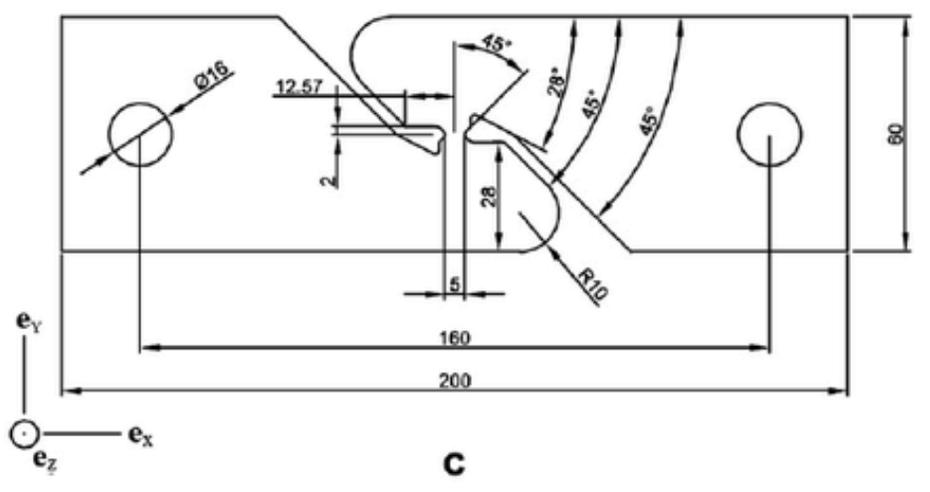
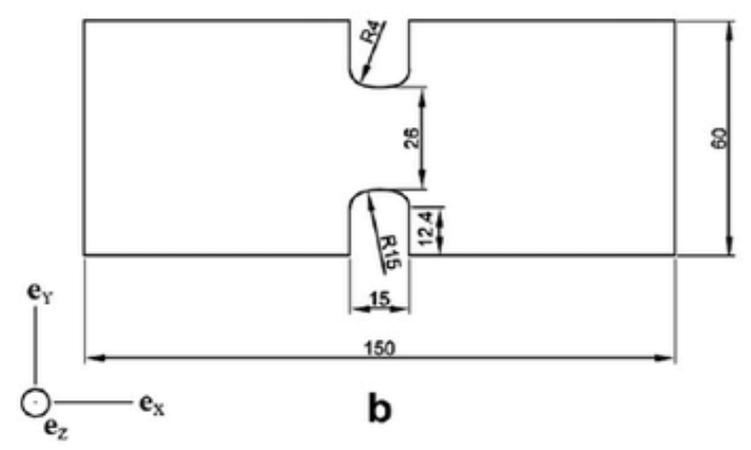
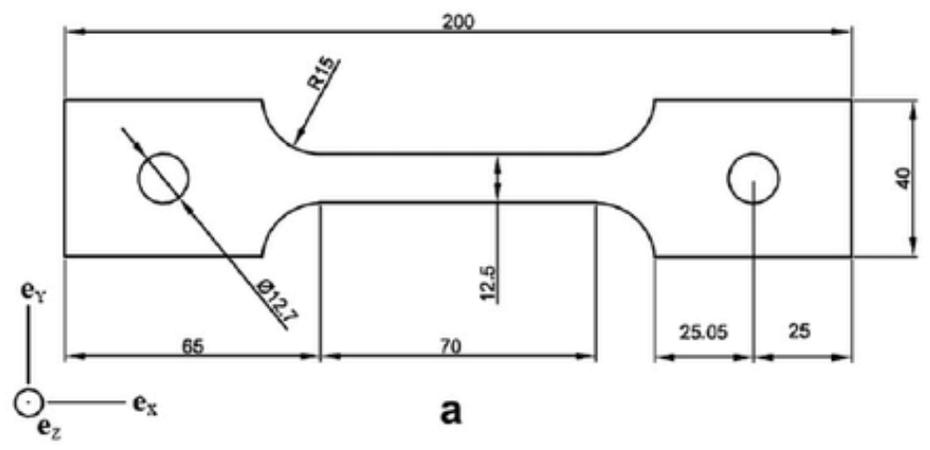
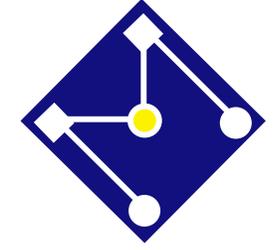
$$\zeta = \left\| \vec{ON} \right\| = \vec{OP} \cdot \mathbf{d} = \frac{\sqrt{3}}{3} I_1 = \sqrt{3} \sigma_{oct}$$

$$\rho = \left\| \vec{NP} \right\| = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} = \sqrt{2J_2} = \sqrt{3} \tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3}} q$$

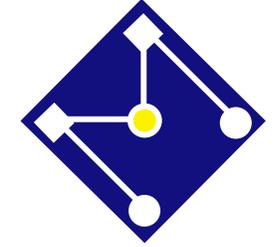


A NECESSIDADE DE ENTENDER TENSÕES E SEUS INVARIANTES





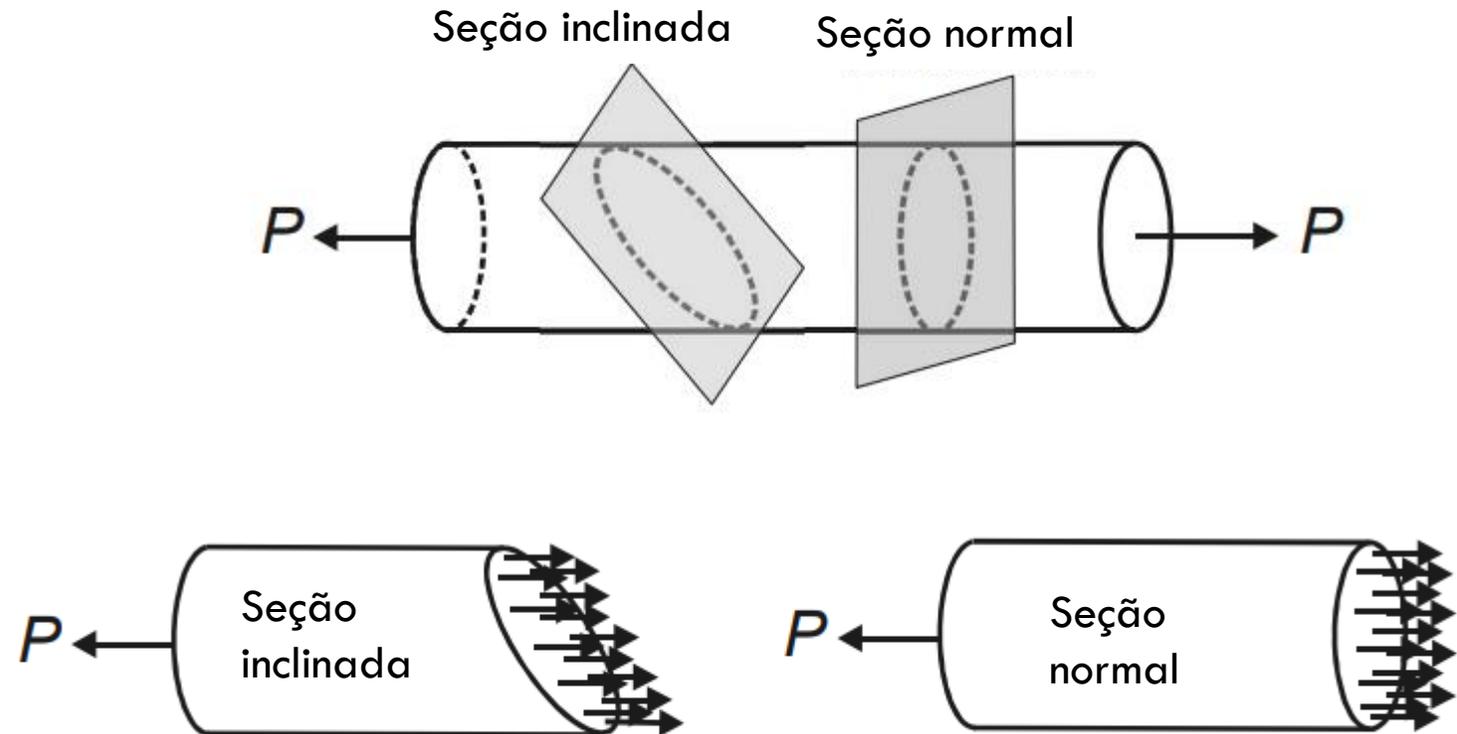
Gruben, G., Fagerholt, E., Hopperstad, O.S., Børvik, T., *European Journal of Mechanics A-solids*, Fracture characteristics of a cold-rolled dual-phase steel, v. 30, p. 204-218, 2011.



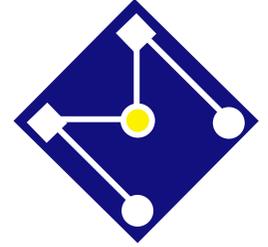
ESTADO UNIAXIAL VS TRIAXIAL DE TENSÕES

$$\sigma \text{ e } \sigma_y$$

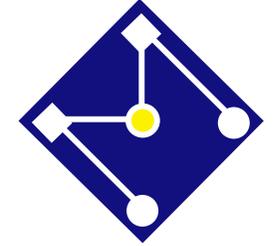
A melhor maneira de analisar é uma comparação direta entre esses dois valores ?!?!?!?



TEORIA DA ENERGIA DE DISTORÇÃO, OU DE VON MISES

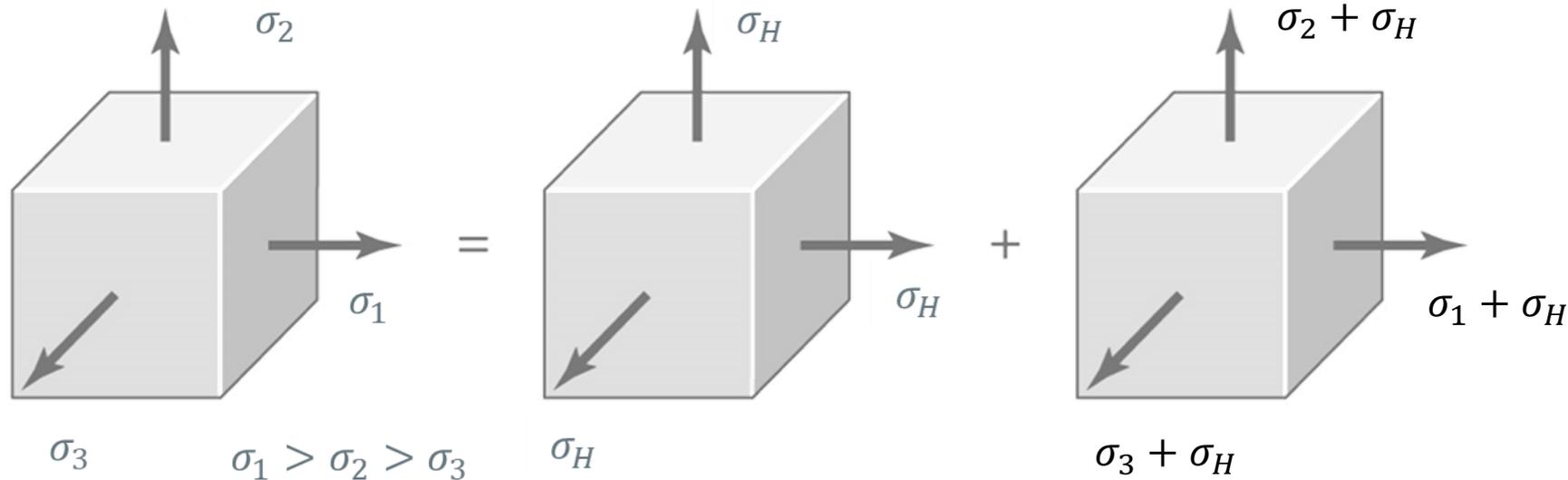


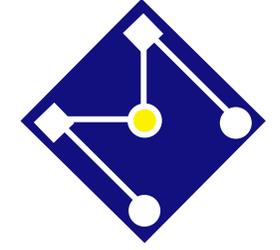
Origina-se da observação de que a tensão hidrostática em materiais dúcteis (tensões principais iguais) apresenta níveis de escoamento extremamente superiores aos valores esperados.



PORTANTO,

O escoamento ocorre quando a energia de distorção por unidade de volume atinge a energia de distorção por unidade de volume necessária para o escoamento em um ensaio uniaxial de tração do do mesmo material.





SHIGLEY...

Energia de deformação,
por unidade de volume

$$u = \frac{1}{2} [\sigma_1 \epsilon_1 + \sigma_2 \epsilon_2 + \sigma_3 \epsilon_3]$$

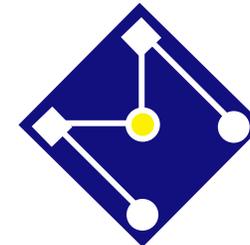
Relação tensão-deformação
(Lei de Hooke)

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]$$



$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]$$

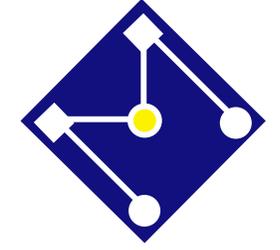
Energia volumétrica (obtida substituindo $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ por σ_m),

$$u_v = \frac{3\sigma_m^2}{2E} (1 - 2\nu)$$

$$u_v = \frac{1 - 2\nu}{6E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_2\sigma_3 + 2\sigma_3\sigma_1)$$

Energia desviadora,

$$u_d = u - u_v = \frac{1 + \nu}{3E} \left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \right]$$



$$u_d = u - u_v = \frac{1 + \nu}{3E} \left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \right]$$

$$u_d = \frac{1 + \nu}{3E} S_y^2$$

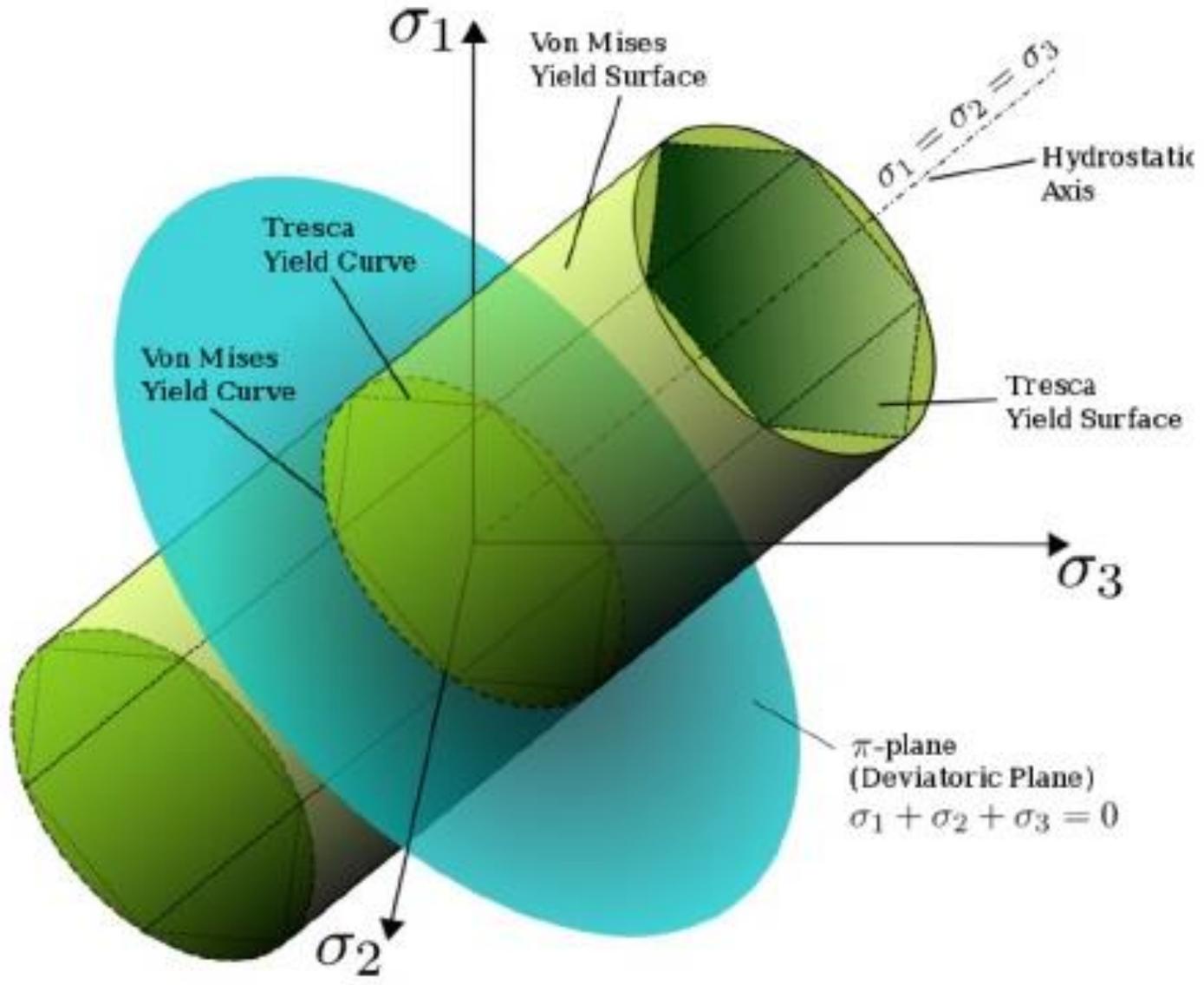
Energia de deformação desviadora em ensaio de tração uniaxial:
 $\sigma_1 = S_y$ e $\sigma_2 = \sigma_3 = 0 \rightarrow \sigma_m = \frac{\sigma_1}{3}$

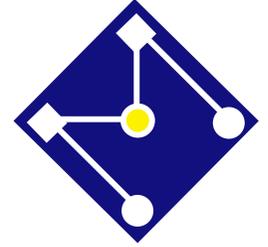
$$\left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \right]^{1/2} \geq S_y$$



Tensão equivalente de von Mises.

$$\sigma' = \left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \right]^{1/2}$$





TAREFA

- Fazer a lista de exercícios e entregar, via Moodle, até dia 18/09, 23:00.
- Baixar a versão estudantil do software comercial Abaqus e fazer o tutorial disponível no Moodle.

