



Ultrassom em biomedicina

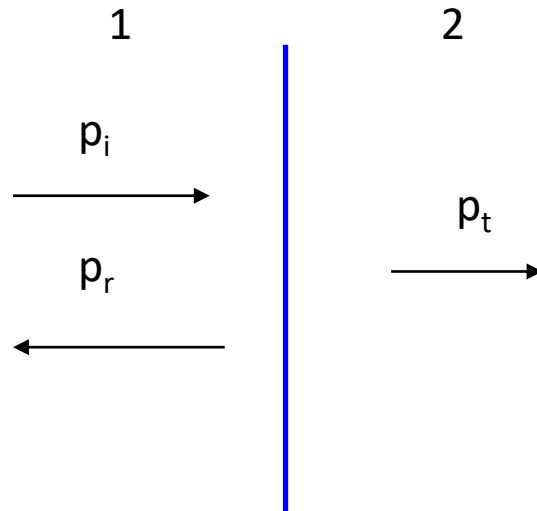
Reflexão e Transmissão

Adilton Carneiro

Universidade de São Paulo, FFCLRP, Departamento de Física

Reflexão e transmissão

Quando uma onda acústica encontra a divisão entre dois meios parte da onda é refletida ao meio pela qual viajava e parte é transmitida para o outro meio.

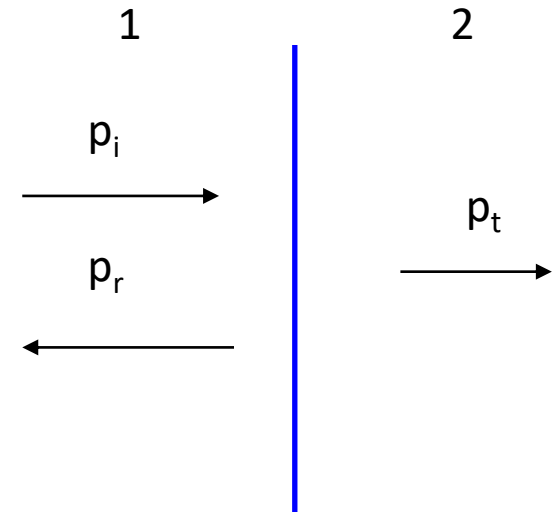


$$p_+ = Ae^{j(\omega t - kx)}$$

$$p_- = Be^{j(\omega t + kx)}$$

Coeficientes

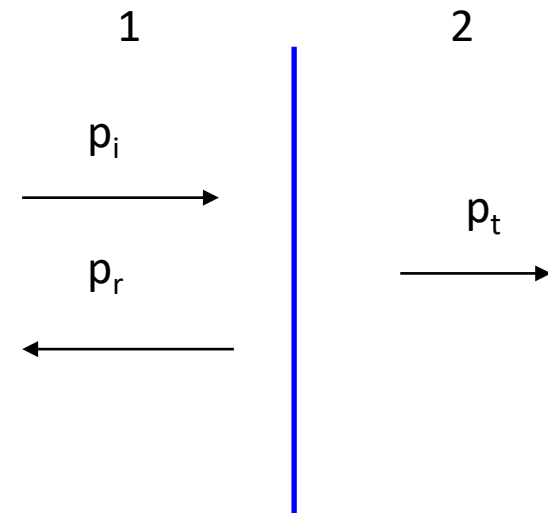
- 🌀 $p_i \rightarrow$ Pressão da onda incidente;
- 🌀 $p_r \rightarrow$ Pressão da onda refletida;
- 🌀 $p_t \rightarrow$ Pressão da onda transmitida;
- 🌀 $R \rightarrow$ Coef. Reflexão da pressão;
- 🌀 $T \rightarrow$ Coef. Transmissão da pressão;
- 🌀 $R_I \rightarrow$ Coef. Reflexão da intensidade acústica;
- 🌀 $T_I \rightarrow$ Coef. Transmissão da intensidade acústica;
- 🌀 $R_\pi \rightarrow$ Coef. Reflexão da potência acústica;
- 🌀 $T_\pi \rightarrow$ Coef. Transmissão da potência acústica.



Reflexão

Coef. Reflexão da pressão:

$$R = \frac{P_r}{P_i}$$



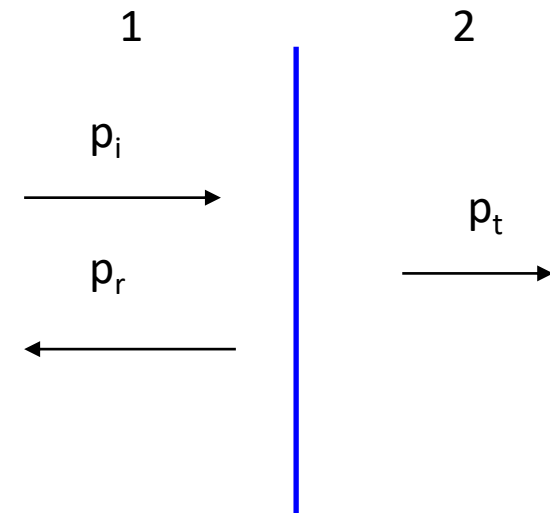
Reflexão

Coef. Reflexão da pressão:

$$R = \frac{P_r}{P_i}$$

Coef. Reflexão da intensidade acústica:

$$R_I = \frac{I_r}{I_i} = \frac{P_r^2 / \rho_1 c_1}{P_i^2 / \rho_1 c_1} = \frac{P_r^2}{P_i^2} = R^2$$



Coef. Reflexão da pressão:

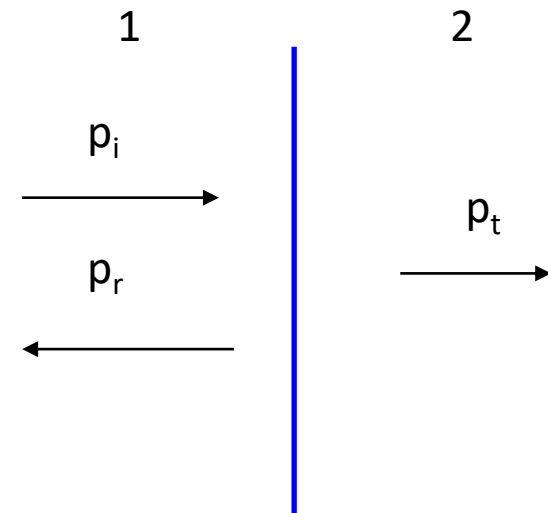
$$R = \frac{P_r}{P_i}$$

Coef. Reflexão da intensidade acústica:

$$R_I = \frac{I_r}{I_i} = \frac{P_r^2 / \rho_1 c_1}{P_i^2 / \rho_1 c_1} = \frac{P_r^2}{P_i^2} = R^2$$

Coef. Reflexão da potência acústica:

$$R_\pi = \frac{\Pi_r}{\Pi_i} = \frac{I_r A_1}{I_i A_1} = R_I$$



Coef. Transmissão da pressão:

$$T = \frac{P_t}{P_i}$$

Transmissão

Coef. Transmissão da pressão:

$$T = \frac{P_t}{P_i}$$

Coef. Transmissão da intensidade acústica:

$$T_I = \frac{I_t}{I_i} = \frac{P_t^2 / \rho_2 c_2}{P_i^2 / \rho_1 c_1} = T^2 \frac{Z_1}{Z_2}$$

Impedância acústica $Z = \rho_0 c$

Transmissão

Coef. Transmissão da pressão:

$$T = \frac{P_t}{P_i}$$

Coef. Transmissão da intensidade acústica:

$$I_I = \frac{I_t}{I_i} = \frac{P_t^2 / \rho_2 c_2}{P_i^2 / \rho_1 c_1} = T^2 \frac{Z_1}{Z_2}$$

Impedância acústica $Z = \rho_0 c$

Coef. Transmissão da potência acústica:

$$T_\pi = \frac{\Pi_t}{\Pi_i} = \frac{I_t A_2}{I_i A_1} = T_I$$

Para: $A_2 = A_1$

Incidência normal

Como a fonte é comum todas as ondas têm a mesma frequência, mas as velocidades (c_1 e c_2) dependem do meio.

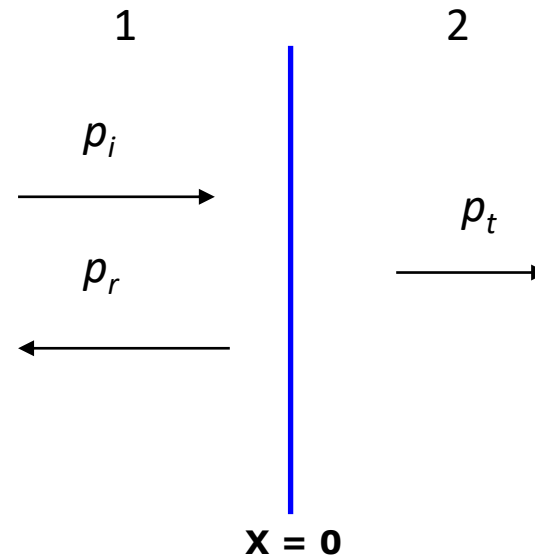
$$p_i = P_i \cdot e^{i(\omega t - k_1 x)}$$

$$p_r = P_r \cdot e^{i(\omega t + k_1 x)}$$

$$p_t = P_t \cdot e^{i(\omega t - k_2 x)}$$

Número de ondas:

$$k_1 = \omega/c_1 \neq k_2 = \omega/c_2$$



Incidência normal

Condições de contorno:

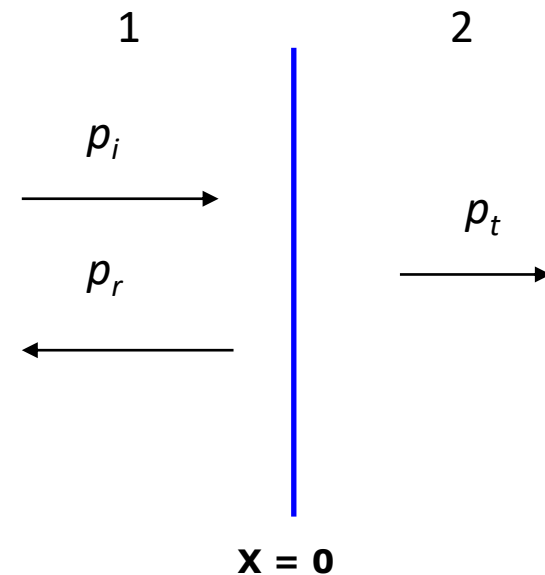
- Pressões acústicas nos dois lados da interface devem ser iguais;
- Componente normal das velocidades devem ser iguais.

Em $x = 0$

$$p_i + p_r = p_t \quad (1)$$

$$u_i + u_r = u_t \quad (2)$$

$u \rightarrow$ velocidade da partícula



Incidência normal

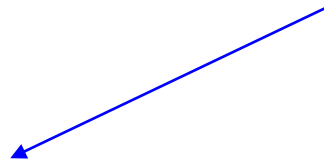
- De acordo com Kinsler – Fundamentals of acoustics. Cap. 6 pág. 151
- A primeira condição, a continuidade da pressão, significa que não pode haver nenhuma força resultante sobre a (sem massa) plano que separa os fluidos.
- A segunda condição, continuidade do componente normal da velocidade, requer que os fluidos permaneçam em contato.

Incidência normal

Em $x = 0$

$$\frac{p_i + p_r}{u_i + u_r} = \frac{p_t}{u_t}$$

$$\frac{p_i}{u_i} = Z_1 \quad \frac{p_r}{u_r} = -Z_1 \quad \frac{p_t}{u_t} = Z_2$$



$$\frac{p_i + p_r}{Z_1} - \frac{p_r}{Z_1} = Z_2$$



$$\frac{P_r}{P_i} = R = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$$



Incidência normal

$$p_i + p_r = p_t$$

Incidência normal

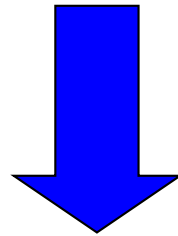
$$p_i + p_r = p_t$$

$$\frac{p_i}{p_i} + \frac{p_r}{p_i} = \frac{p_t}{p_i} \quad \longrightarrow \quad 1 + R = T$$

Incidência normal

$$p_i + p_r = p_t$$

$$\frac{p_i}{p_i} + \frac{p_r}{p_i} = \frac{p_t}{p_i} \quad \longrightarrow \quad 1 + R = T$$



$$T = 1 + \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Algumas análises

$$R = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{p_r}{p_i} \quad T = 1 + R = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{p_t}{p_i}$$

Se $Z_2 > Z_1$ (por exemplo ar-água) P_i está em fase com P_r

Algumas análises

$$R = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{p_i}{p_r} \quad T = 1 + R = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

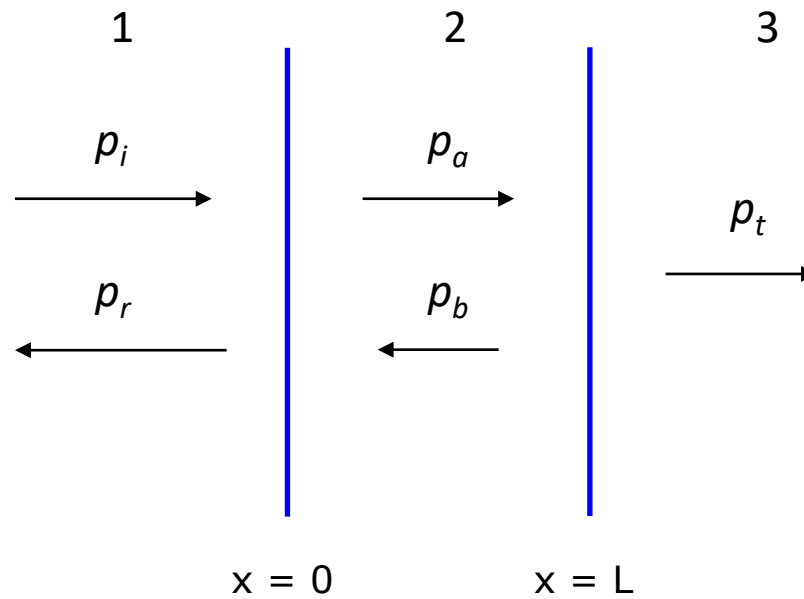
Se $Z_2 < Z_1$ (por exemplo água-ar) P_i está fora de fase com P_r

Algumas análises

$$R = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{p_i}{p_r} \qquad T = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

- 🌀 A pressão transmitida está sempre em fase com a incidente.
- 🌀 Se $z_2 \gg z_1$ a onda é refletida sem diminuição na amplitude
 - Amplitude de pressão transmitida é o dobro do da onda incidente.
 - $T \rightarrow 2$
- 🌀 Se $z_2 \ll z_1$ a onda é refletida sem diminuição na amplitude mas fora de fase.
 - $T \rightarrow 0$

Transmissão através de uma fina camada

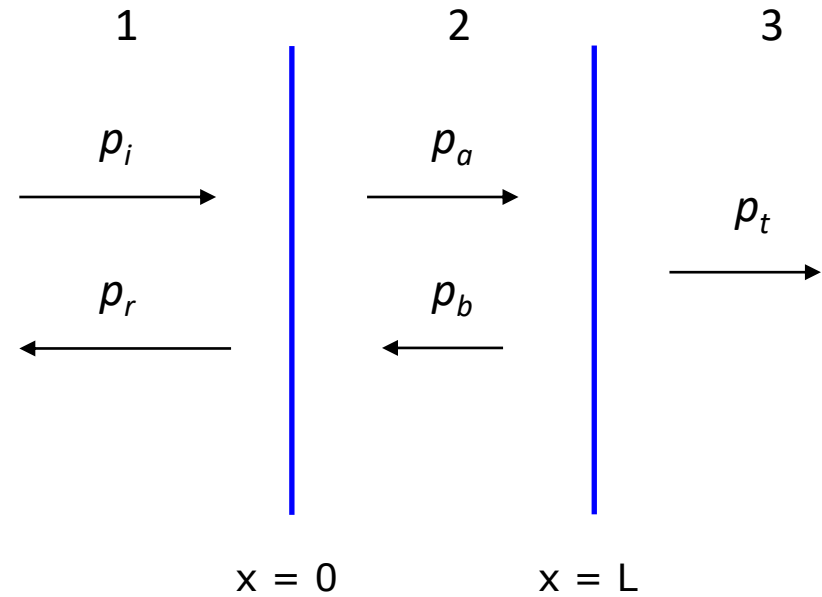


Camada fina

Para $x = 0$

$$p_i + p_r = p_a + p_b$$

$$u_i + u_r = u_a + u_b$$



Camada fina

Para $x = 0$

$$p_i + p_r = p_a + p_b$$

$$u_i + u_r = u_a + u_b$$

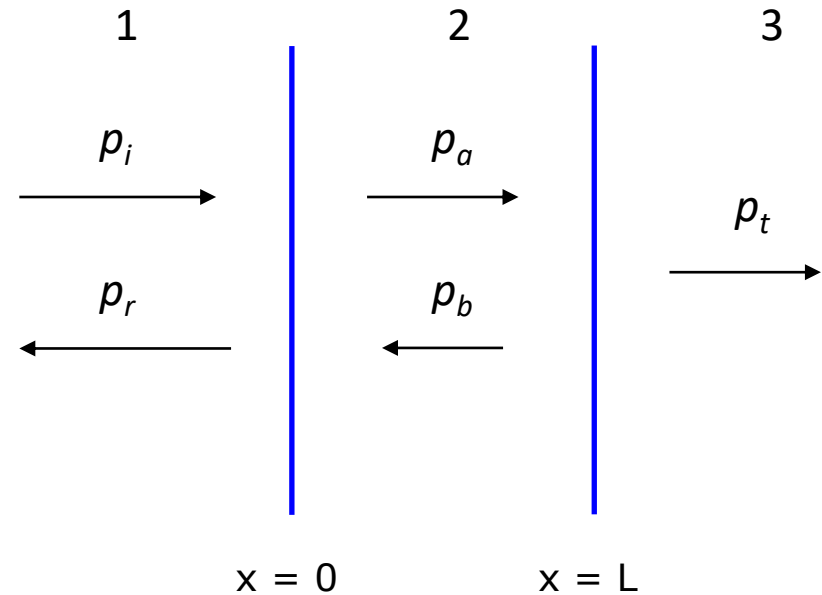


$$\frac{p_i + p_r}{u_i + u_r} = \frac{p_a + p_b}{u_a + u_b}$$



$$\frac{p_i}{u_i} = Z_1 \quad \frac{p_r}{u_r} = -Z_1$$

$$\frac{p_a}{u_a} = Z_2 \quad \frac{p_b}{u_b} = -Z_2$$



Camada fina

Para $x = 0$

$$p_i + p_r = p_a + p_b$$

$$u_i + u_r = u_a + u_b$$

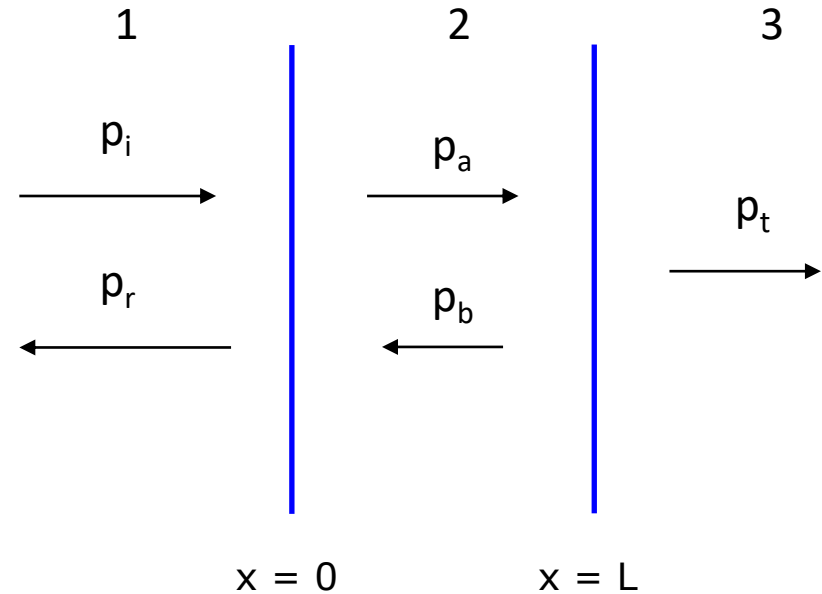


$$\frac{p_i + p_r}{u_i + u_r} = \frac{p_a + p_b}{u_a + u_b}$$



$$\frac{p_i}{u_i} = Z_1 \quad \frac{p_r}{u_r} = -Z_1$$

$$\frac{p_a}{u_a} = Z_2 \quad \frac{p_b}{u_b} = -Z_2$$



$$\frac{p_i + p_r}{Z_1 - Z_1} = \frac{p_a + p_b}{Z_2 - Z_2}$$

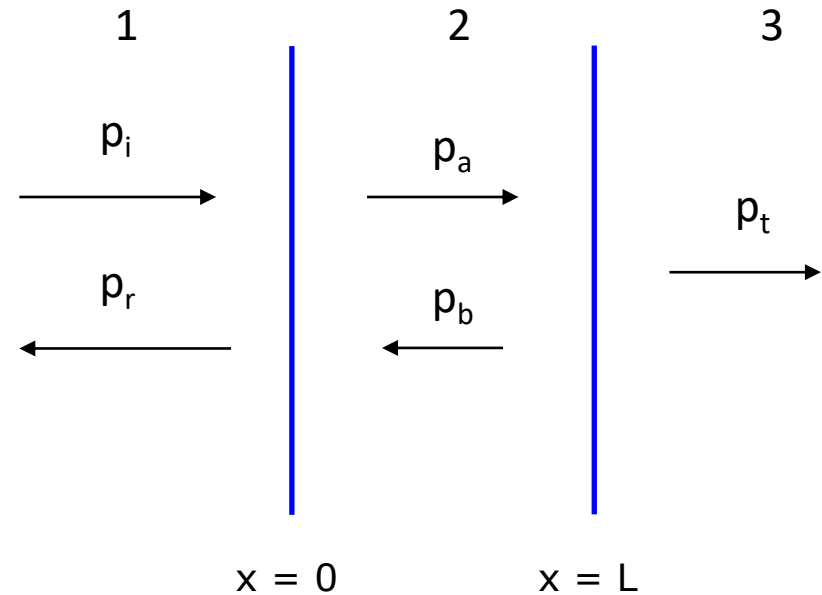
Camada fina

$$\frac{p_i + p_r}{Z_1} = \frac{p_a + p_b}{Z_2}$$

$$\frac{p_i - p_r}{Z_1} = \frac{p_a - p_b}{Z_2}$$



$$Z_1 \left(\frac{P_i + P_r}{P_i - P_r} \right) = Z_2 \left(\frac{P_a + P_b}{P_a - P_b} \right)$$



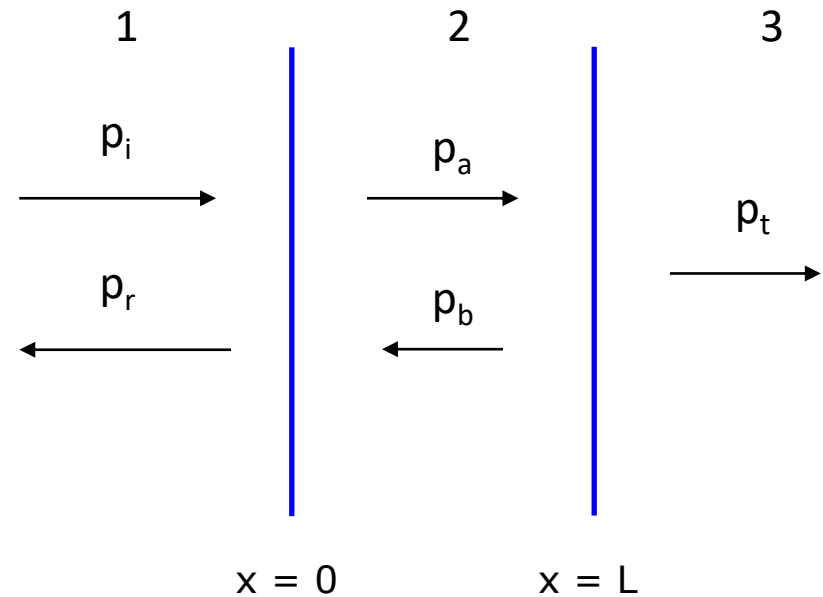
$$p = P \cdot e^{i(\omega t - kx)}$$

Para $x = L$

$$\frac{P_a \cdot e^{-ik_2L} + P_b \cdot e^{+ik_2L}}{P_a \cdot e^{-ik_2L} - P_b \cdot e^{+ik_2L}} = \frac{p_t}{u_t}$$

$$\frac{P_a \cdot e^{-ik_2L} + P_b \cdot e^{+ik_2L}}{Z_2} = \frac{p_t}{u_t}$$

$$\frac{P_a \cdot e^{-ik_2L} + P_b \cdot e^{+ik_2L}}{P_a \cdot e^{-ik_2L} - P_b \cdot e^{+ik_2L}} = \frac{Z_3}{Z_2}$$



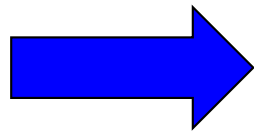
Camada fina

$$Z_1 \left(\frac{P_i + P_r}{P_i - P_r} \right) = Z_2 \left(\frac{P_a + P_b}{P_a - P_b} \right)$$

$$\frac{P_a \cdot e^{-ik_2L} + P_b \cdot e^{+ik_2L}}{P_a \cdot e^{-ik_2L} - P_b \cdot e^{+ik_2L}} = \frac{Z_3}{Z_2}$$

Coeficiente de reflexão

$$R = \frac{P_r}{P_i}$$



$$R = \frac{\left(1 - \frac{Z_1}{Z_3}\right) \cos(k_2L) + i \left(\frac{Z_2}{Z_3} - \frac{Z_1}{Z_2}\right) \sin(k_2L)}{\left(1 + \frac{Z_1}{Z_3}\right) \cos(k_2L) + i \left(\frac{Z_2}{Z_3} + \frac{Z_1}{Z_2}\right) \sin(k_2L)}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Camada fina

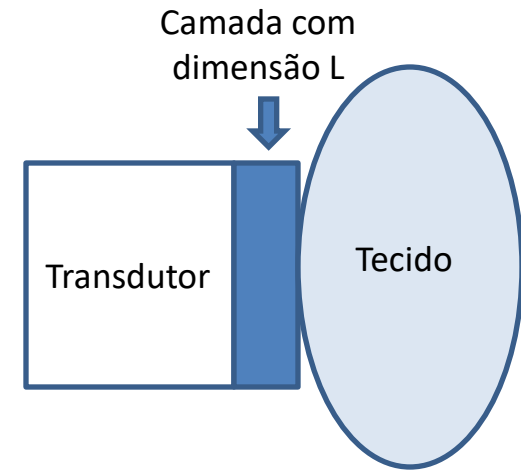
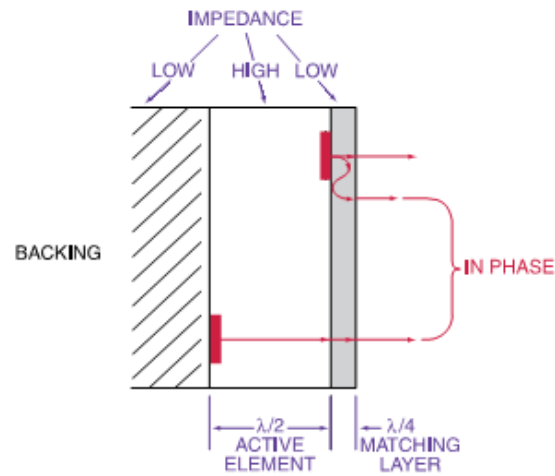
Para calcular o coeficiente de transmissão da intensidade é preciso lembrar que:

$$R_I = R^2 \qquad T_I = T^2 \frac{Z_1}{Z_2}$$

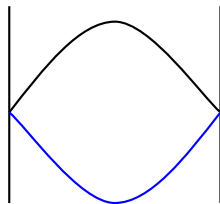
$$T = 1 + R$$

$$T_I = \frac{4}{2 + \left(\frac{Z_3}{Z_1} + \frac{Z_1}{Z_3} \right) \cos^2(k_2 L) + \left(\frac{Z_2^2}{(Z_1 Z_3)} + \frac{(Z_1 Z_3)}{Z_2^2} \right) \sin^2(k_2 L)}$$

Caso especial



L



Na ressonância
 $L = \lambda/2$



$L = \lambda/4$

Caso especial

$$k_2 L = \frac{2\pi}{\lambda_2} L = \left(n - \frac{1}{2} \right) \pi \quad \text{Para } n = 1 \rightarrow L = \lambda_2 / 4$$

$$\cos k_2 L \approx 0 \quad \sin k_2 L \approx 1$$

$$T_I = \frac{4}{2 + \left(\frac{Z_3}{Z_1} + \frac{Z_1}{Z_3} \right) \cos^2(k_2 L) + \left(\frac{Z_2^2}{(Z_1 Z_3)} + \frac{(Z_1 Z_3)}{Z_2^2} \right) \sin^2(k_2 L)}$$

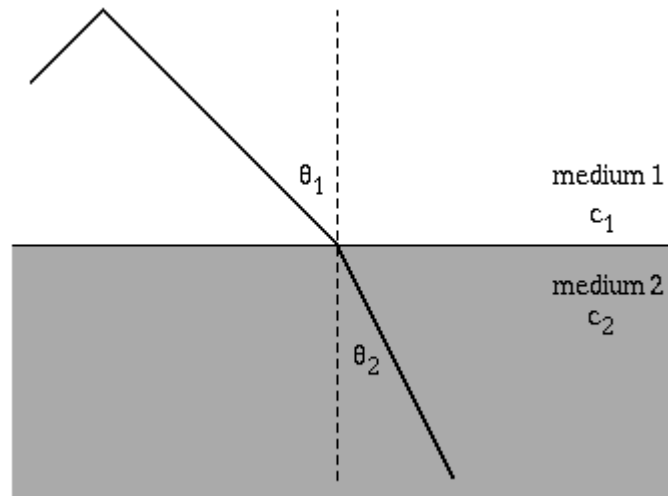
$$T_I = \frac{4Z_1 Z_3}{\left(Z_2 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_2} \right)^2}$$



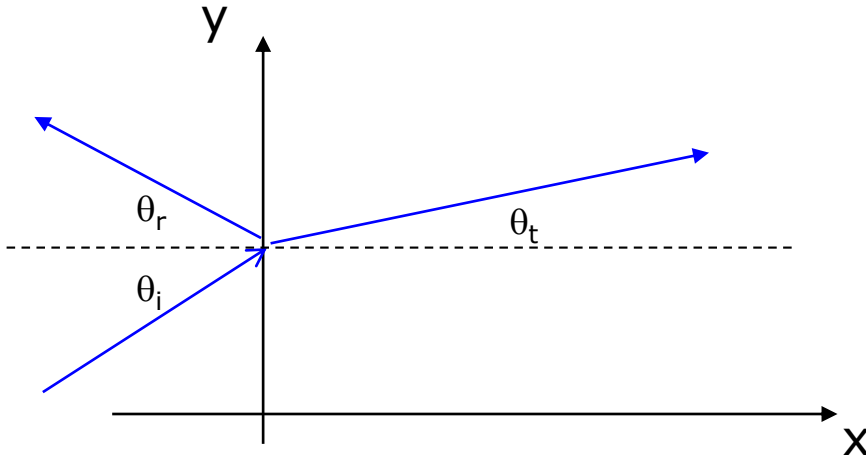
Para $T_I = 1$

$$Z_2 = \sqrt{Z_1 Z_3}$$

Incidência oblíqua



Incidência oblíqua



$$p_i = P_i \cdot e^{i(\omega t - k_1 x \cos \theta_i - k_1 y \sin \theta_i)}$$

$$p_r = P_r \cdot e^{i(\omega t + k_1 x \cos \theta_r - k_1 y \sin \theta_r)}$$

$$p_t = P_t \cdot e^{i(\omega t - k_2 x \cos \theta_t - k_2 y \sin \theta_t)}$$

Incidência oblíqua

Em $x = 0$

$$P_i \cdot e^{-ik_1 y \sin \theta_i} + P_r \cdot e^{-ik_1 y \sin \theta_r} = P_t \cdot e^{-ik_2 y \sin \theta_t}$$

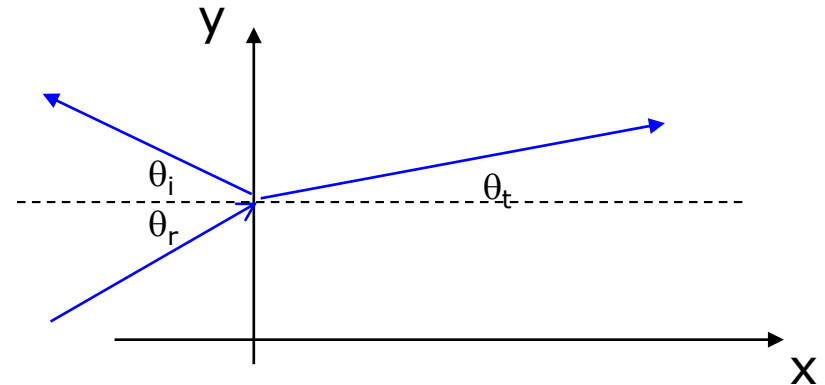


Essa igualdade deve ser satisfeita em qualquer y ,
portanto os expoentes devem ser todos iguais

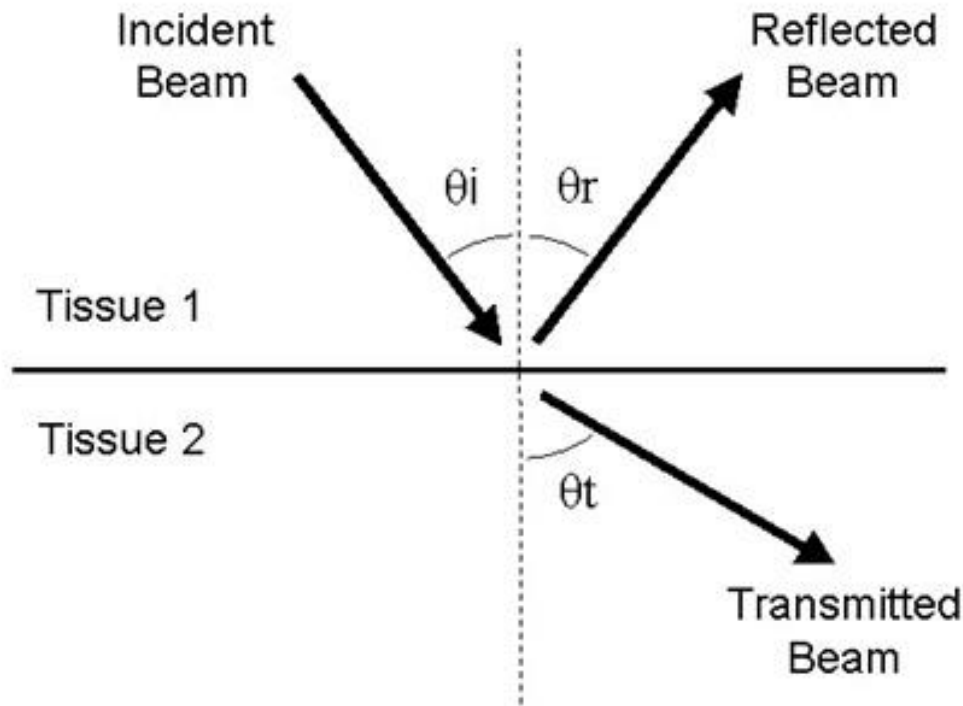
$$k_1 \sin \theta_i = k_1 \sin \theta_r = k_2 \sin \theta_t \quad \therefore \theta_i = \theta_r$$

$$\frac{\omega}{c_1} \sin \theta_i = \frac{\omega}{c_2} \sin \theta_t$$

$$\longrightarrow \sin \theta_i = \frac{c_1}{c_2} \sin \theta_t$$



Incidência não perpendicular



$$R = \frac{p_r}{p_i} = \frac{Z_2 \cos \theta_i - Z_1 \cos \theta_t}{Z_2 \cos \theta_i + Z_1 \cos \theta_t}$$

$$T = \frac{p_t}{p_i} = \frac{2Z_2 \cos \theta_t}{Z_2 \cos \theta_i + Z_1 \cos \theta_t}$$

$$\frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{Z_2 \cos \theta_i - Z_1 \cos \theta_t}{Z_2 \cos \theta_i + Z_1 \cos \theta_t} \right)^2$$

$$\frac{I_t}{I_i} = \frac{4Z_2 Z_1 \cos \theta_i}{(Z_2 \cos \theta_i + Z_1 \cos \theta_t)^2}$$