

Instituto de Física USP

Física V - Aula 25

Professora: Mazé Bechara

Aula 25 – As ondas de partículas materiais - interpretações.

1. Determinação da energia ou energia de ponto zero, a partir do princípio de incerteza: MHS (cálculo), átomo de hidrogênio (estimativa).
2. **Princípio de Complementaridade** de Bohr.
3. Primeiros postulados da interpretação probabilística da função de onda na Mecânica Quântica, devida à Max Born.
4. **O experimento de Young na interpretação da função de onda de Max-Born**, o princípio de complementaridade e o de incerteza.
5. Outros postulados da interpretação de Max-Born para a onda da partícula.
6. Propriedades das funções de onda decorrentes da interpretação probabilística de Max Born.

Princípio de complementaridade de Bohr ~ 1932



Os aspectos corpuscular e ondulatório da partícula material (e da radiação eletromagnética) são complementares: se uma observação (medida) revela o caráter corpuscular, então é impossível que revele também o ondulatório, e vice-versa.

Ao lado: armas desenhadas por Bohr para receber a comenda de Cavaleiro da Ordem do Elefante da Dinamarca em 1947

**Contraria sunt complementa
(contrários são complementares)**

Niels Henrik David Bohr – físico dinamarquês

(1885 – 1962) – Prêmio Nobel de Física em 1922

Bohr e Einstein – debates acalorados...

sem perder a ternura!



Complementaridade na Mecânica Quântica

- [Leon Rosenfeld \(1\)](#)
- *"complementarity is not a philosophical superstructure invented by Bohr to be placed as a decoration on top of the quantal formalism, it is the bedrock of the quantal description"*.
- Em tradução livre: *"complementaridade não é uma superestrutura filosófica inventada por Bohr para ser colocada como uma decoração sobre o formalismo quântico; ela é o alicerce da descrição quântica"*
- [\(1\) "Complementarity: Bedrock of the Quantal Description"](#), Léon Rosenfeld, ed. Kalckar, et.al. (1996), em *Foundations of Quantum Physics II (1933 - 1958)*. Edição de J . Kalckar, Niels Bohr Collected Works; Elsevier. pp. 284–285.

Mecânica Ondulatória para a partícula: A Interpretação Estatística de Max Born

Ref. Enge, Wehr & Richards - Introduction to Atomic Physics

Postulado 01: o estado dinâmico de uma partícula pode ser descrito por uma **função de onda espaço-temporal** $\Psi(\vec{r}, t)$ que permite extrair (todas) **informações** sobre a dinâmica da partícula.

Postulado 02: O que tem significado físico direto não são as funções de onda espaço-temporais $\Psi(\vec{r}, t)$, que podem até ser funções imaginárias. **O significado físico está na grandeza** $|\Psi(\vec{r}, t)|^2$.

O módulo ao quadrado da função de onda se relaciona com a **densidade de probabilidade**, ou seja, no caso de movimentos vale a relação:

$$\rho(x, y, z, t) = \frac{dP(\vec{r}, t)}{dV} = |\Psi(\vec{r}, t)|^2 = \Psi^*(\vec{r}, t)\Psi(\vec{r}, t)$$

$dP(\vec{r}, t)$ é a probabilidade de **uma única** partícula estar na posição \vec{r} , dentro do volume $dV = dx dy dz$ (em coordenadas cartesianas), no instante t , por unidade de dV .

Mecânica Ondulatória Para A Partícula: A Interpretação Estatística De Max Born

Ref. Enge, Wehr & Richards - Introduction to Atomic Physics

Analogamente, para os movimentos **bidimensional e unidimensional** a relação do módulo ao quadrado da função de onda é com a densidade superficial e a densidade linear de probabilidade, **respectivamente**:

$$\sigma(x, y, t) = \frac{dP(\vec{r}, t)}{dA} = |\Psi(\vec{r}, t)|^2 = \Psi^*(\vec{r}, t)\Psi(\vec{r}, t)$$

$$\lambda(x, t) = \frac{dP(x, t)}{dx} = |\Psi(x, t)|^2 = \Psi^*(x, t)\Psi(x, t)$$

Postulado 3. Há uma outra função de onda que também define **o estado dinâmico** da partícula e a função de onda momento linear-temporal $\Phi(\vec{p}, t)$

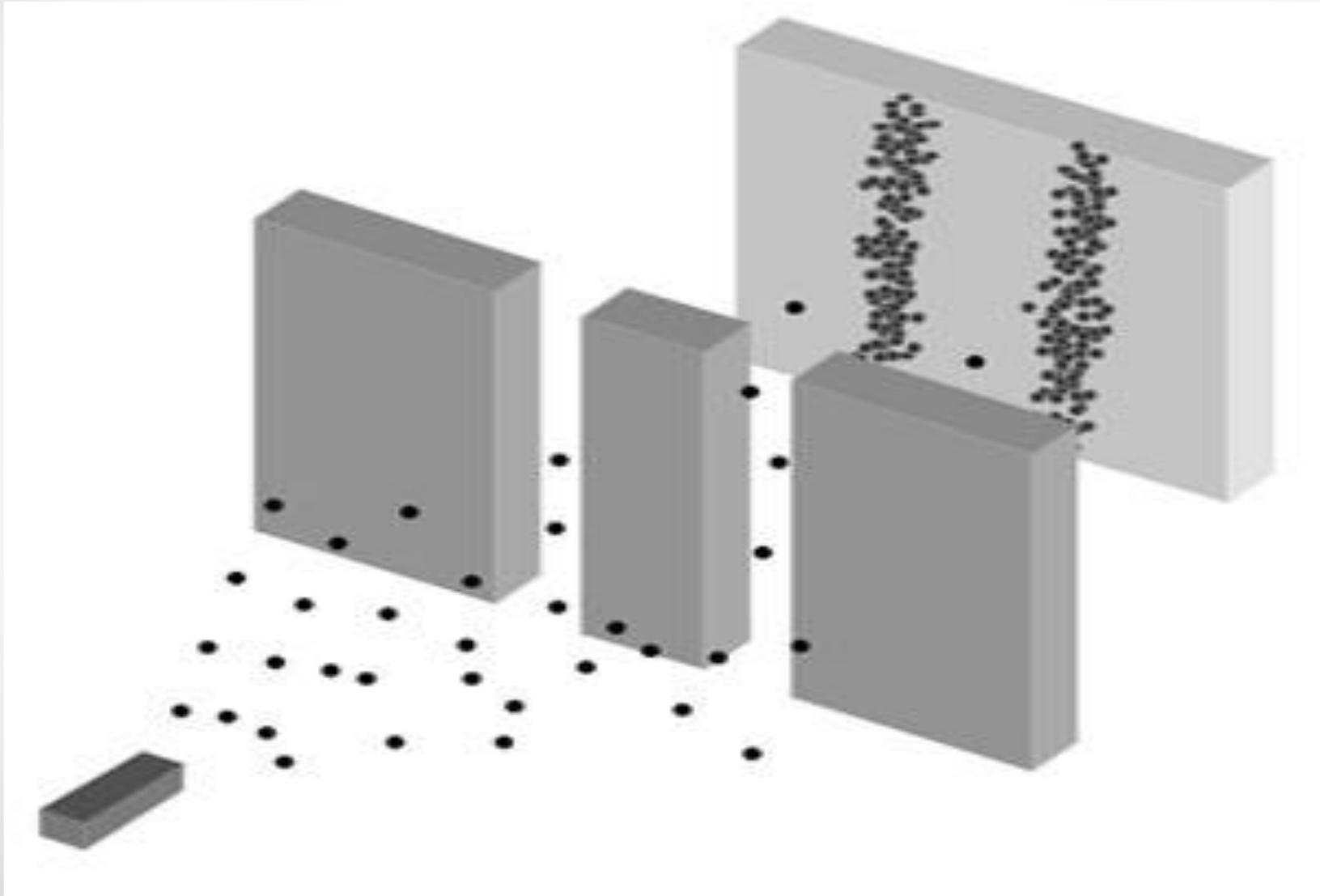
que **analogamente tem seu quadrado do módulo definido**

por:

$$\rho(p_x, p_y, p_z, t) = \frac{dP(\vec{p}, t)}{d\vec{p}} = |\Phi(\vec{p}, t)|^2 = \Phi^*(\vec{p}, t)\Phi(\vec{p}, t)$$

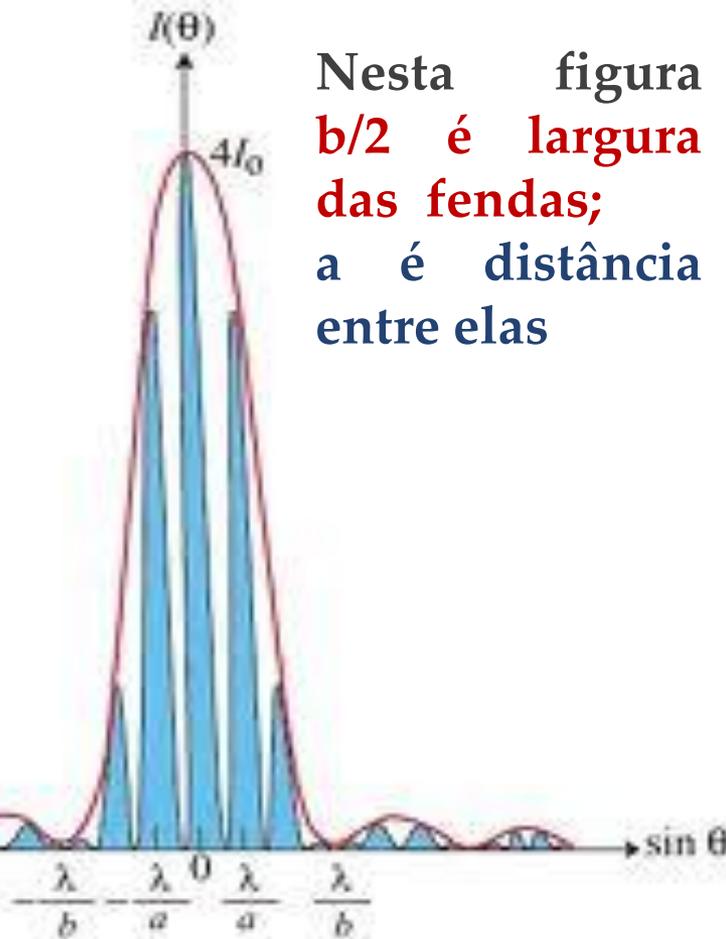
probabilidade da partícula ter momento linear \vec{p} , dentro do volume $d\vec{p} = dp_x dp_y dp_z$, por unidade de $d\vec{p}$

Partículas passando por duas fendas



Onda plana: difração em cada fenda e interferência de duas fendas

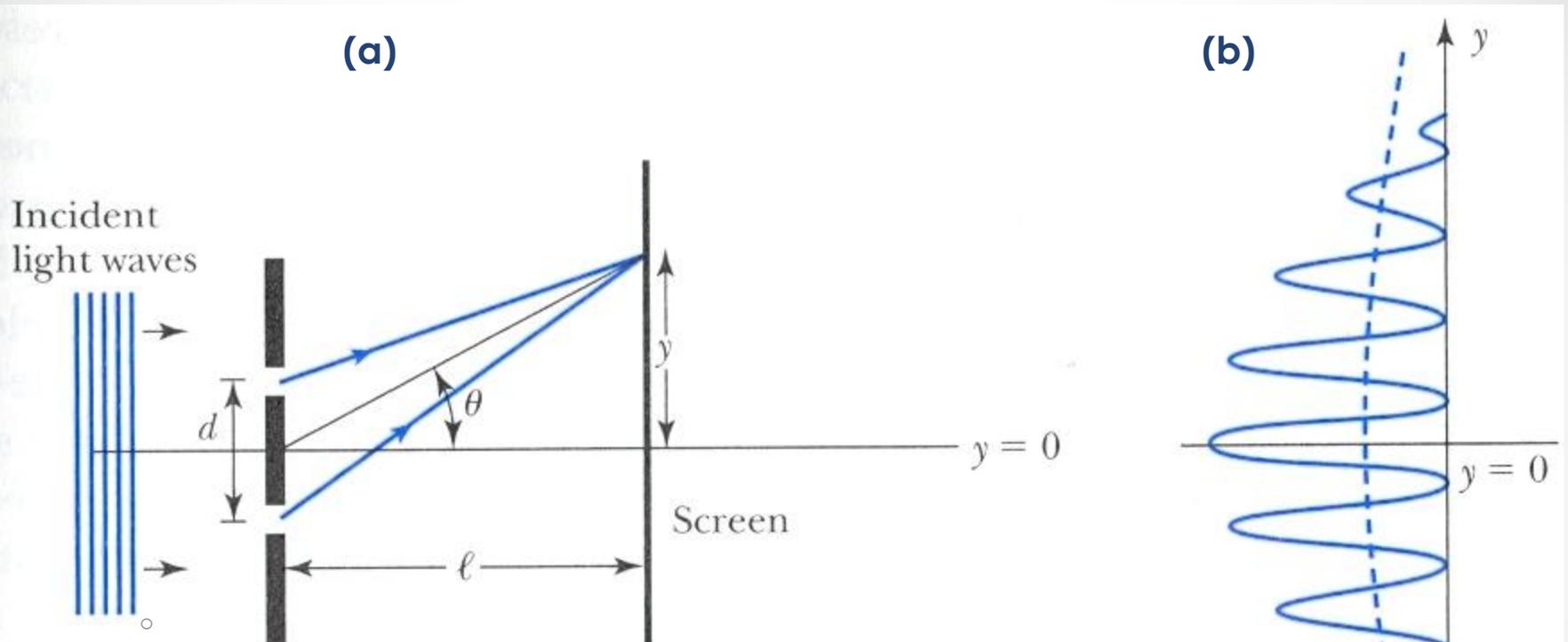
A intensidade na tela



A tela de frente



O experimento de duas fendas de Young



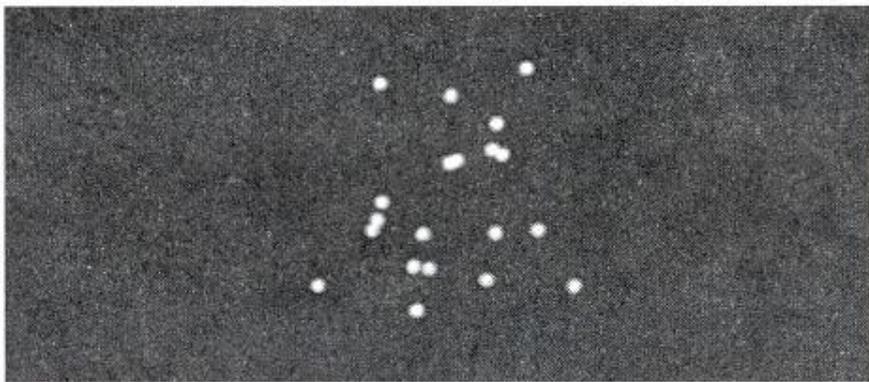
(a) Diagrama esquemático. Experimento facilmente realizável com laser como fonte de luz ($\ell \ll d$). Esperado o mesmo de partículas materiais com o mesmo comprimento de onda.

(b) A linha sólida indica o padrão de Interferência das duas fendas superposta à difração nas fendas. Se uma das fendas for coberta se observará uma intensidade como a da linha tracejada, mas com o máximo em frente à fenda aberta, devido à difração na fenda.

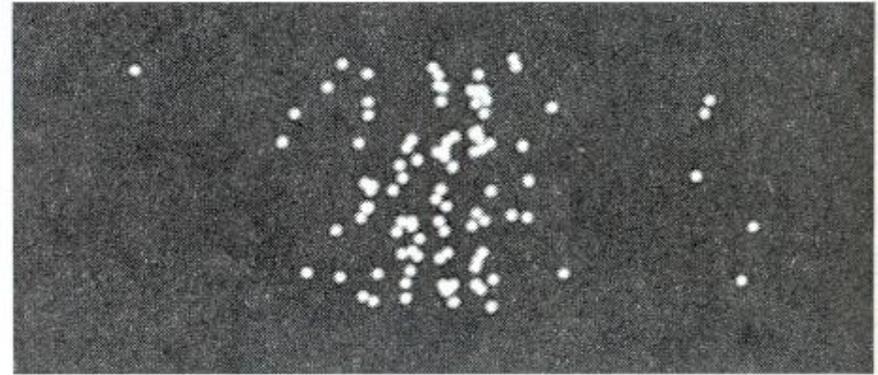
Experimento de Young

1. O experimento pode ser feito **com laser** , e fendas de **$\sim 600\text{nm}$ feitas mecanicamente**.
2. Com ambas as fendas abertas se observa a figura que é a **soma de dois efeitos: (i) a difração em cada fenda, superpostas, responsável pelos “máximos largos de intensidade” intercalados com “escuros finos”, sendo a mais larga e intensa das intensidades no centro entre as fendas; (ii) a interferência da onda que passou por cada fenda, dando um padrão de larguras “finas” de intensidades claras e escuras, no interior dos máximos mais largos devidos à difração.**
3. **O entendimento da Física é que, seja radiação eletromagnética, seja partículas, o que se observa é a mesma figura, desde que sejam as mesmas condições de comprimento de onda em relação à abertura das fendas e ao espaçamento entre elas, e mesma distância entre fendas e a posição do anteparo (muito maior que a distância entre fendas).**

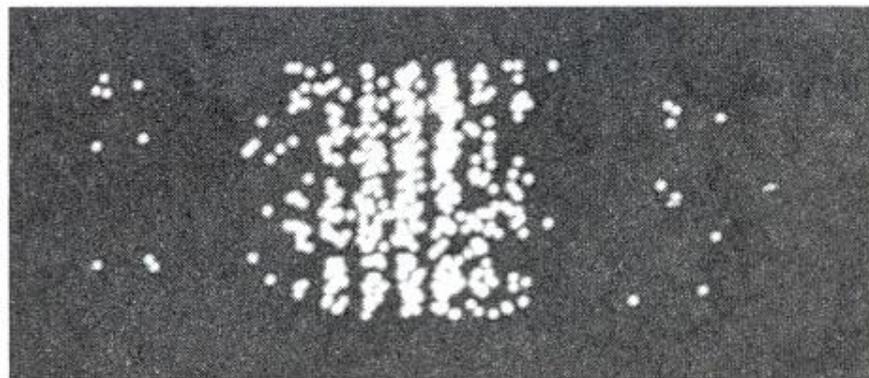
Simulação do experimento de Young com luz ou elétrons



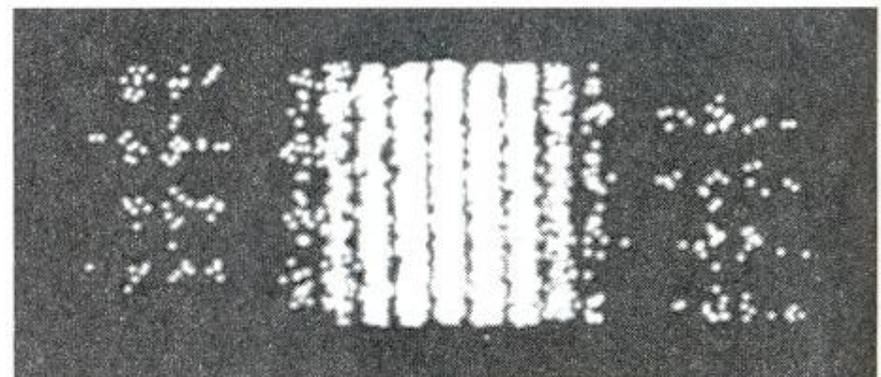
(a) 20 counts



(b) 100 counts



(c) 500 counts



(d) ~4000 counts

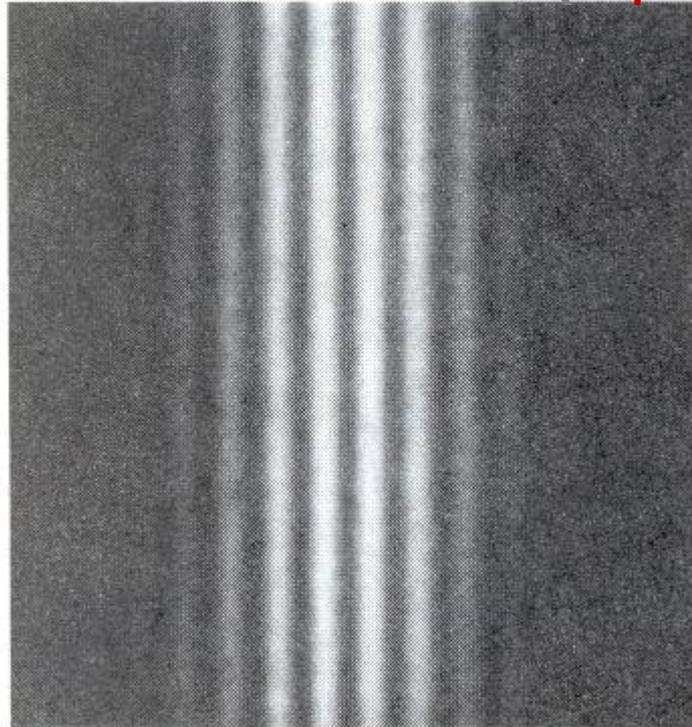
- Cálculos para largura da abertura $a=4\lambda$, $d=20\lambda$. **As quatro figuras mostram a tela para: 20, 100, 500 e 4000 contagens. A partir de 500 contagens fica claro o padrão de interferência das duas fendas.**

Luz no experimento de Young

1. Quando se observa “flashes de luz” como o da figura do slide anterior com baixa contagem, cuja soma deles, após mais de 500 contagens, reproduz o fenômeno das duas interferências, Os textos atribuem estes “flashes” de luz ao “caráter corpuscular” da luz.
2. **Cuidado:** Cada ponto iluminado não é o efeito de **um fóton**, já que os **olhos humanos só se sensibilizam à luz com aproximadamente 100 fótons** (ou mais) da luz.
3. O que se observa é a distribuição espacial da energia eletromagnética, **compatível com a idéia de partículas (fótons) guiadas pela onda proposta por Einstein.**

Resultado experimental com elétrons

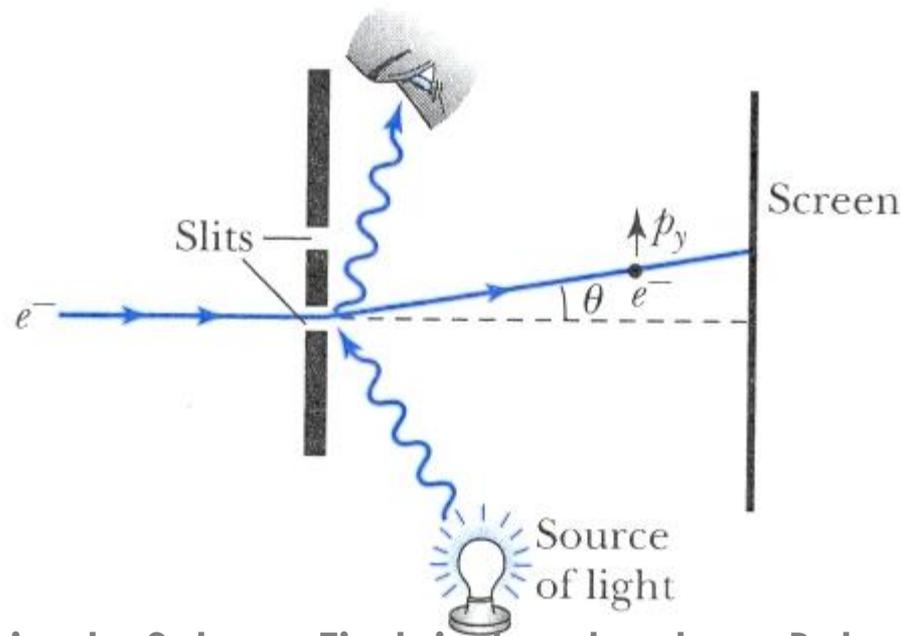
Feixe de elétrons de 50 keV ($\lambda=0,00536\text{nm}$) foram lançados sobre duas fendas de 500nm de abertura, separadas por uma distância de 2000nm e observadas na tela a 350mm das fendas (experimento de 1961, na Alemanha)



- Resultado experimental de Claus Jonsson: American Journal of Physics 42, 4 (1974). © American Association of Physics.
- O padrão acima foi ampliado por uma série de lentes eletrônicas e finalmente observado em uma tela fluorescente com microscópio óptico. O 1º mínimo ocorre em 469nm.

Experimento no debate Einstein-Bohr

- Einstein: e se for observado em qual fenda o elétron passou, o que se observa na tela? E se for fechada a fenda? O Observador “interfere” na natureza Física?



Em 1927, na conferência de Solvay, Einstein bombardeou Bohr com questões com objeções à interpretação probabilística para uma partícula colocando situações que violariam princípios básicos da Física. E o fez do café da manhã até o anoitecer. A cada “experimento de pensamento” Bohr refutou, cuidadosa e satisfatoriamente cada paradoxo apresentado. Na verdade esta discussão se prolongou até 1930 e levou Bohr ao princípio de complementaridade, e também ao entendimento vigente do princípio de incerteza de Heisenberg, acordado em uma conferência em Copenhague em 1937. .

Cuidado!!!

- **Respostas de Bohr (qualitativamente):**
- Quando observado o elétron atrás da fenda, com fóton da ordem de $d/2$, a figura na tela é como a da soma de cada uma das fendas fechadas.
- Não se lava a difração de uma fenda, como manda o caráter ondulatório de uma partícula. Se lava a interferência das duas fendas, mas não a difração de cada fenda.
- Reafirmando: **a onda é de uma partícula**. Não se trata da interferência das ondas de duas partículas, cada qual passou por uma fenda e por outra fenda (que Einstein admitia!!!).
- A explicação é corroborada pelo princípio de indeterminação e de incerteza.

Complementaridade e princípio de incerteza no experimento de Young

- **Para observar a onda do elétron** ele tem que ter o comprimento de onda tal que $\lambda_e \sim d$, e que **pela relação de de Broglie implica que o $p_e \sim h/d$** . E mais, neste caso **o primeiro mínimo** ocorrerá em relação ao máximo central de um ângulo $\theta_{\min} = \lambda/2d$.
-
- **Uma tentativa de medir em qual fenda a partícula elétron passou no experimento exige luz com fóton de comprimento de onda apropriado: $\lambda_f \leq d$, ou, $p_f \geq h/d$** . A dificuldade é que dar ao elétron, para observá-lo como partícula, um momento maior do que ele tinha, o momento é modificado de modo significativo.
- **Muda de quanto?** Do ponto de vista **do princípio de incerteza a influência do “empurrão” do fóton no elétron “desvia” o elétron de seu caminho de um ângulo $\varphi = p_f/p_e \geq \lambda_e/d$** (usando $p_f \geq h/d$ e $p_e = h/\lambda_e$). Observe-se entretanto que **este desvio angular é maior do que o primeiro mínimo da interferência que tem desvio angular $\theta_{\min} = \lambda/2d$** , Ou seja, a medida que permitiu localizar a partícula elétron interferiu de modo a perder o comportamento **comportamento ondulatório do elétron como exige o princípio de complementaridade.**
-

Cuidado - comentários!

Para ter a figura da imagem das duas fendas, como se o feixe fosse de **partícula**, é preciso identificar mais: se a partícula passou na parte superior ou inferior de uma fenda, Isto exigiria um fóton com comprimento de onda $\lambda/2$. E de novo isto pode ser entendido no contexto da complementaridade e do princípio de incerteza.

O argumento da formação da figura, como pontos formando a difração para feixes de baixa intensidade, seria o argumento que sustenta o caráter corpuscular. **Mas tenha-se em mente que isto se observa em simulações**, não exatamente em experimentos diretos.

Sim. **Há ainda quem conteste**, de forma qualificada, **se esta é a melhor descrição de uma partícula. Ninguém contesta a validade dos resultados.**

Mecânica Ondulatória Para A Partícula: A Interpretação Estatística De Max Born

Ref. Enge, Wehr & Richards - Introduction to Atomic Physics

Postulado 3. As funções de onda $\Psi(\vec{r}, t)$ e $\Phi(\vec{p}, t)$ **são a transformada de Fourier uma da outra**, ou seja, ao se conhecer uma a outra pode ser determinada pela transformada de Fourier. **O vínculo entre as duas funções de onda vem das relações de incerteza**, que relaciona a indeterminação de cada coordenada com o momento linear naquela direção.

Postulado 4. Quando se descreve a dinâmica da partícula pelas funções de onda espaço real $\Psi(\vec{r}, t)$ **as grandezas físicas que dependem somente da posição são representadas pelas mesmas funções que na Física clássica.**

Mecânica Ondulatória Para A Partícula: A Interpretação Estatística De Max Born

Ref. Enge, Wehr & Richards - Introduction to Atomic Physics

Postulado 5. As grandezas que dependem da velocidade, **quando utilizadas as funções espaço-temporais, devem ser representadas por operadores diferenciais**, construídos a partir das expressões clássicas que definem a grandeza física, substituindo o momento linear pelo operador diferencial:

Vetorialmente:
$$\hat{p} = \hat{p}_x \vec{i} + \hat{p}_y \vec{j} + \hat{p}_z \vec{k} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} - i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} - i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

Em Componentes:
$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad \hat{p}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \quad \hat{p}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}$$

Mecânica Ondulatória Para A Partícula: A Interpretação Estatística De Max Born

Ref. Enge, Wehr & Richards - Introduction to Atomic Physics

Razão do Postulado 5: O **valor esperado ou valor médio** de uma grandeza física $\vec{f}(\vec{p})$ que depende do momento linear pode ser determinado com uso da função de onda do **espaço real-tempo** da seguinte forma:

$$\langle \vec{f}(\vec{p}) \rangle = \int |\Phi(\vec{p}, t)|^2 \vec{f}(\vec{p}) d\vec{p} = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(\vec{r}, t) \hat{\vec{f}}(\hat{\vec{p}}) \Psi(\vec{r}, t) dV$$

Observe que:

1. *o operador $\vec{f}(\vec{p})$ é obtido substituindo-se na expressão clássica da grandeza física $\vec{f}(\vec{p})$ o momento linear pelo operador $\hat{\vec{p}}$.*

Interpretação física: a média é o resultado que a teoria prevê para várias medidas da grandeza física $\vec{f}(\vec{p})$ no mesmo estado quântico.

Valem relação e interpretação similares de f para grandeza escalar.