

**MAP 2320 – MÉTODOS NUMÉRICOS EM EQUAÇÕES  
DIFERENCIAIS II**

**2º Semestre - 2019**

**Prof. Dr. Luis Carlos de Castro Santos**

lsantos@ime.usp.br



Problema Homogêneo  
C.C. de Dirichlet  
homogêneas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0$$



Problema Homogêneo  
C.C. de Dirichlet  
não-homogêneas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L$$

$$u(0, t) = T_1, \quad u(L, t) = T_2$$



Problema Homogêneo  
C.C. de Neumann  
homogêneas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$$

Problema Homogêneo  
C.C. de Mistas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L$$

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$$

Problema Não-Homogêneo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L$$

$$u(0, t) = T_1, \quad u(L, t) = T_2$$

Reginaldo J. Santos  
Departamento de Matemática-ICEx  
Universidade Federal de Minas Gerais  
<http://www.mat.ufmg.br/~regi>

<b>3</b>	<b>Equação do Calor em uma Barra</b>	<b>276</b>
3.1	Extremidades a Temperaturas Fixas . . . . .	277
3.1.1	Condições de Fronteira Homogêneas . . . . .	277
3.1.2	Condições de Fronteira Não Homogêneas . . . . .	285
	Exercícios . . . . .	291
3.2	Barra Isolada nas Extremidades . . . . .	292
	Exercícios . . . . .	301
3.3	Condições de Fronteira Mistas e Equação não Homogênea . . . . .	302
3.3.1	Condições de Fronteira Mistas . . . . .	302
3.3.2	Equação do Calor não Homogênea . . . . .	309
	Exercícios . . . . .	314
3.4	Respostas dos Exercícios . . . . .	316

### 3.3.1 Condições de Fronteira Mistas

Vamos resolver o seguinte problema de valor inicial e de fronteira que corresponde ao problema do calor em uma barra de comprimento  $L$  que do lado esquerdo está mantida a temperatura zero e do lado direito é mantida isolada.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L \\ u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 \end{cases}$$

Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de  $x$  por uma função de  $t$ , ou seja,

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Derivando e substituindo na equação diferencial obtemos

$$\alpha^2 X''(x)T(t) = X(x)T'(t)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{T'(t)}{T(t)}$$

O primeiro membro depende apenas de  $x$ , enquanto o segundo depende apenas de  $t$ . Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante, ou seja,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições de fronteira

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, & X(0) = 0, X'(L) = 0 & (3.11) \\ T'(t) - \alpha^2 \lambda T(t) = 0 & & (3.12) \end{cases}$$

As condições de fronteira  $X(0) = X'(L) = 0$  decorrem do fato de que

$$0 = u(0, t) = X(0)T(t) \quad \text{e} \quad 0 = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = X'(L)T(t).$$

A equação  $X''(x) - \lambda X(x) = 0$  pode ter como soluções,

Se  $\lambda > 0$ :  $X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$ .

Se  $\lambda = 0$ :  $X(x) = c_1 + c_2 x$ .

Se  $\lambda < 0$ :  $X(x) = c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \operatorname{cos}(\sqrt{-\lambda}x)$ .

As condições de fronteira  $X(0) = 0$  e  $X'(L) = 0$  implicam que

Se  $\lambda > 0$ :

Substituindo-se  $x = 0$  e  $X = 0$  em  $X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$ , obtemos que  $0 = c_1 + c_2$ , ou seja,  $c_2 = -c_1$ . Logo

$$X(x) = c_1(e^{\sqrt{\lambda}x} - e^{-\sqrt{\lambda}x}).$$

Agora substituindo-se  $x = L$  e  $X' = 0$  em  $X'(x) = \sqrt{\lambda}c_1(e^{\sqrt{\lambda}x} + e^{-\sqrt{\lambda}x})$ , obtemos que se  $c_1 \neq 0$ , então

$$e^{\sqrt{\lambda}L} = e^{-\sqrt{\lambda}L}$$

o que não é possível se  $\lambda > 0$  (só é possível se  $\lambda = 0$ ).

Se  $\lambda = 0$ :

Substituindo-se  $x = 0$  e  $X = 0$  em  $X(x) = c_1 + c_2x$ , obtemos que  $c_1 = 0$ . Logo

$$X(x) = c_2x.$$

Substituindo-se  $x = L$  e  $X' = 0$  em  $X'(x) = c_2$ , obtemos que também  $c_2 = 0$ .

Se  $\lambda < 0$ :

Substituindo-se  $x = 0$  e  $X = 0$  em  $X(x) = c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \operatorname{cos}(\sqrt{-\lambda}x)$ , obtemos que  $c_2 = 0$ . Logo

$$X(x) = c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x).$$

Agora substituindo-se  $x = L$  e  $X' = 0$  em  $X'(x) = \sqrt{-\lambda}c_1 \operatorname{cos}(\sqrt{-\lambda}x)$ , obtemos que se  $c_1 \neq 0$ , então

$$\operatorname{cos}(\sqrt{-\lambda}L) = 0$$

o que implica que

$$\sqrt{-\lambda}L = \frac{(2n+1)\pi}{2}, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Logo

$$\lambda = -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Portanto o problema de valores de fronteira (3.11) tem soluções fundamentais

$$X_{2n+1}(x) = \text{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L}, \text{ para } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Substituindo-se  $\lambda = -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}$  na equação diferencial (3.12) obtemos

$$T'(t) + \frac{\alpha^2(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}T(t) = 0$$

que tem como solução fundamental

$$T_{2n+1}(t) = e^{-\frac{\alpha^2(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}t}, \text{ para } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções fundamentais

$$u_{2n+1}(x, t) = X_{2n+1}(x)T_{2n+1}(t) = \text{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} e^{-\frac{\alpha^2(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}t}$$

Além disso, combinações lineares dessas soluções são também solução

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^N c_{2n+1}u_{2n+1}(x, t) = \sum_{n=0}^N c_{2n+1} \text{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} e^{-\frac{\alpha^2(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}t}$$

Vamos supor que a solução do PVIF seja a série

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1}u_{2n+1}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \text{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} e^{-\frac{\alpha^2(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}t}$$

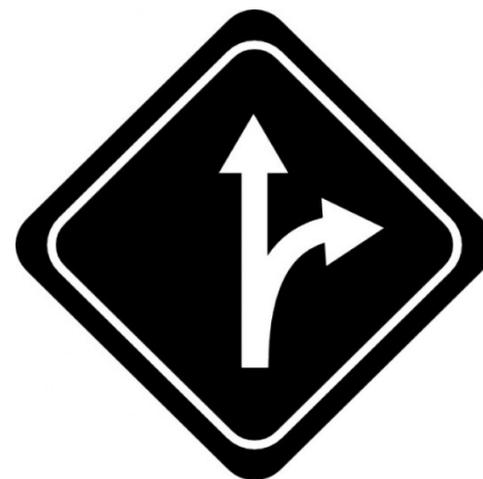
Então, para satisfazer a condição inicial  $u(x, 0) = f(x)$ , temos que impor a condição

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L}.$$

Esta é a série de Fourier de senos de índice ímpar de  $f(x)$ .

**Como usar a tabela para calcular os coeficientes da Série de Senos de Índice Ímpar ?**

**Voltamos ao Capítulo 2 !!!!**



## 2.1 Teorema de Fourier

---

**Teorema 2.1 (Fourier).** *Seja  $L$  um número real maior que zero. Para toda função  $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua por partes tal que a sua derivada  $f'$  também seja contínua por partes, a série de Fourier de  $f$*

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L},$$

em que

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

converge para  $f$  nos pontos de  $(-L, L)$  em que  $f$  é contínua. Ou seja, podemos representar  $f$  por sua série de Fourier:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L}, \quad \text{para } t \in (-L, L) \text{ em que } f \text{ é contínua.}$$


---

## 2.1.4 Tabela de Coeficientes de Séries de Fourier

Coeficientes das Séries de Fourier de Funções Elementares		
$f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}, -1 \leq c < d \leq 1$	$a_n(f, L) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt$	$b_n(f, L) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sen \frac{n\pi t}{L} dt$
$f_{c,d}^{(0)}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in [cL, dL] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$a_0(f_{c,d}^{(0)}, L) = d - c$ $a_n(f_{c,d}^{(0)}, L) = \frac{1}{n\pi} \sen s \Big _{n\pi c}^{n\pi d}$	$b_n(f_{c,d}^{(0)}, L) = -\frac{1}{n\pi} \cos s \Big _{n\pi c}^{n\pi d}$
$f_{c,d}^{(1)}(t) = \begin{cases} t, & \text{se } t \in [cL, dL] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$a_0(f_{c,d}^{(1)}, L) = \frac{L}{2}(d^2 - c^2)$ $a_n(f_{c,d}^{(1)}, L) = \frac{L}{n^2\pi^2} (s \sen s + \cos s) \Big _{n\pi c}^{n\pi d}$	$b_n(f_{c,d}^{(1)}, L) = \frac{L}{n^2\pi^2} (-s \cos s + \sen s) \Big _{n\pi c}^{n\pi d}$
$f_{c,d}^{(2)}(t) = \begin{cases} t^2, & \text{se } t \in [cL, dL] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$a_0(f_{c,d}^{(2)}, L) = \frac{L^2}{3}(d^3 - c^3)$ $a_n(f_{c,d}^{(2)}, L) = \frac{L^2}{n^3\pi^3} ((s^2 - 2) \sen s + 2s \cos s) \Big _{n\pi c}^{n\pi d}$	$b_n(f_{c,d}^{(2)}, L) = \frac{L^2}{n^3\pi^3} (2s \sen s + (2 - s^2) \cos s) \Big _{n\pi c}^{n\pi d}$

## 2.1.1 Séries de Fourier de Funções Pares e Ímpares

Ou seja, se uma função  $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$  é par a sua série de Fourier tem somente os termos em cossenos,

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L}.$$

Para as funções  $f$  que são definidas apenas em  $[0, L]$  podemos prolongá-las de forma que elas se tornem par no intervalo  $[-L, L]$ :

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(-t), & \text{se } -L \leq t < 0 \\ f(t), & \text{se } 0 \leq t < L \end{cases}$$

é a extensão par de  $f$ . E assim temos o seguinte resultado.

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt,$$

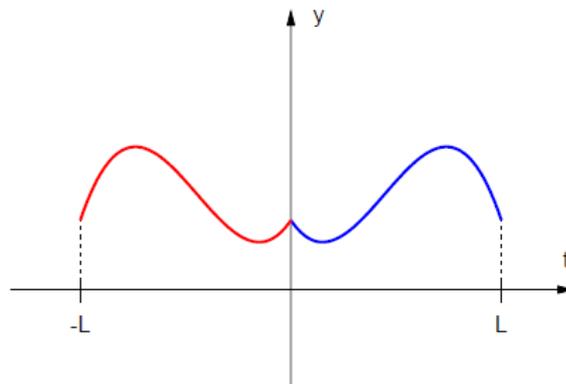


Figura 2.3 – Prolongamento par de uma função definida inicialmente somente no intervalo  $[0, L]$

Ou seja, se uma função  $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$  é ímpar a sua série de Fourier tem somente os termos em senos,

$$S_f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L}.$$

Para as funções  $f$  que são definidas apenas em  $[0, L]$  podemos prolongá-las de forma que elas se tornem ímpar no intervalo  $[-L, L]$ :

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} -f(-t), & \text{se } -L \leq t < 0 \\ f(t), & \text{se } 0 \leq t < L \end{cases}$$

é a extensão ímpar de  $f$ . E assim temos o seguinte resultado.

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt,$$

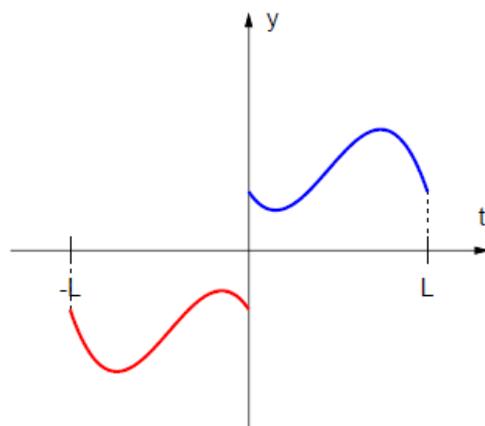


Figura 2.4 – Prolongamento ímpar de uma função definida inicialmente somente no intervalo  $[0, L]$

## 2.2 Séries de Fourier de Senos e de Cossenos de Índices Ímpares

Análogo ao caso de integração de funções ímpares no intervalo  $[-L, L]$ , se  $h : [0, 2L] \rightarrow \mathbb{R}$  é simétrica em relação ao ponto  $(t, y) = (L, 0)$ , ou seja, se é tal que

$$h(2L - t) = -h(t), \quad \text{para todo } t \in [0, L],$$

então (verifique!)

$$\int_0^{2L} h(t) dt = 0. \quad (2.19)$$

Também análogo ao caso de integração de funções pares no intervalo  $[-L, L]$ , se  $h : [0, 2L] \rightarrow \mathbb{R}$  é simétrica em relação à reta  $t = L$ , ou seja, se é tal que

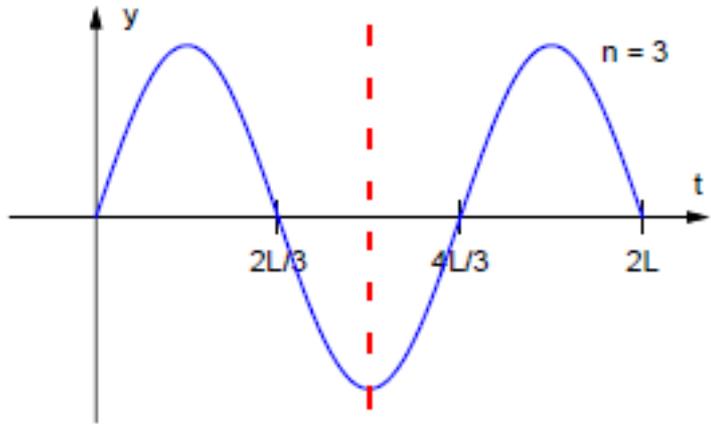
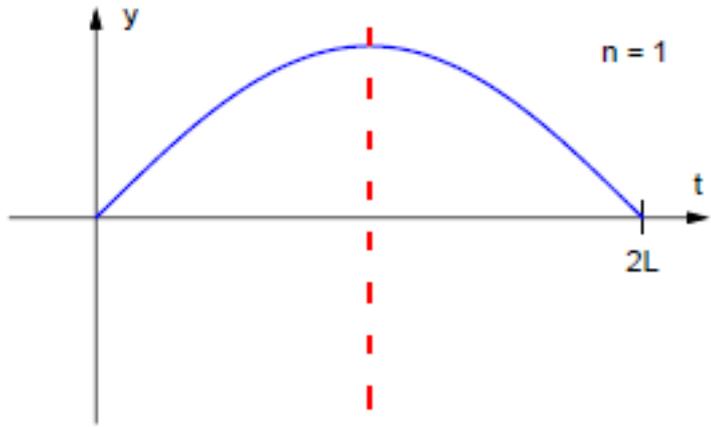
$$h(2L - t) = h(t), \quad \text{para todo } t \in [0, L],$$

então (verifique!)

$$\int_0^{2L} h(t) dt = 2 \int_0^L h(t) dt. \quad (2.20)$$

Índice ímpar

$$\int_0^{2L} h(t) dt = 2 \int_0^L h(t) dt.$$



Índice par

$$\int_0^{2L} h(t) dt = 0.$$

MAP2320

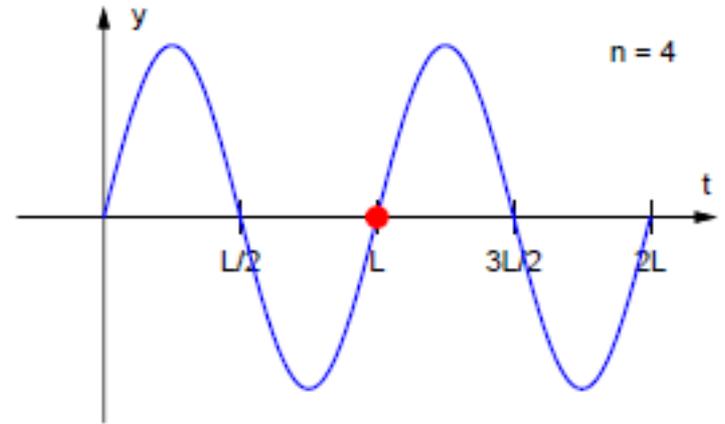
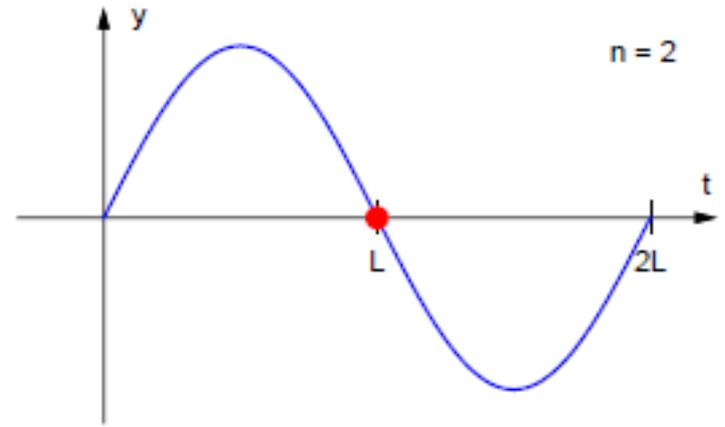


Figura 2.20 –  $\text{sen} \frac{n\pi t}{2L}$ , para  $n = 1, 2, 3, 4$

Já vimos que se uma função  $f : [0, 2L] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua por partes com derivada  $f'$  também contínua por partes, então pelo Corolário 2.5 ela pode ser representada por sua série de Fourier de senos

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{2L}.$$

com os coeficientes dados por

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^{2L} f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{2L} dt \quad \text{para } n = 1, 2, \dots$$

Se a função  $f$  é simétrica em relação à reta  $t = L$ , isto é, se

$$f(2L - t) = f(t), \quad \text{para todo } t \in [0, L],$$

como  $\operatorname{sen} \frac{2k\pi t}{2L}$  é simétrica em relação ao ponto  $(t, y) = (L, 0)$  (veja a Figura 2.20), então o produto  $f(t) \operatorname{sen} \frac{2k\pi t}{2L}$  é simétrico em relação ao ponto  $(t, y) = (L, 0)$  e como  $\operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi t}{2L}$  é simétrica em relação à reta  $t = L$  (veja a Figura 2.20), então o produto  $f(t) \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi t}{2L}$  é simétrico em relação à reta  $t = L$  (verifique!).

Assim,

separando os coeficientes em de índice par e de índice ímpar e usando as relações (2.19) e (2.20) obtemos que:

$$b_{2k} = 0$$

$$b_{2k+1} = \frac{4}{2L} \int_0^L f(t) \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi t}{2L} dt \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots$$

[-2L, 2L]

E assim

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1} \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi t}{2L}, \quad \text{para } t \in (0, 2L)$$

Ou seja, se uma função  $f : [0, 2L] \rightarrow \mathbb{R}$  é simétrica em relação à reta  $t = L$ , a sua série de Fourier de senos tem somente os termos de índice ímpar.

Para as funções  $f$  que são definidas apenas em  $[0, L]$  podemos prolongá-las ao intervalo  $[0, 2L]$  de forma que elas sejam simétricas em relação à reta  $t = L$ , ou seja,

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t), & \text{se } 0 \leq t < L \\ f(2L - t), & \text{se } L \leq t < 2L \end{cases}$$

é simétrica em relação à reta  $t = L$ . Assim temos o seguinte resultado.

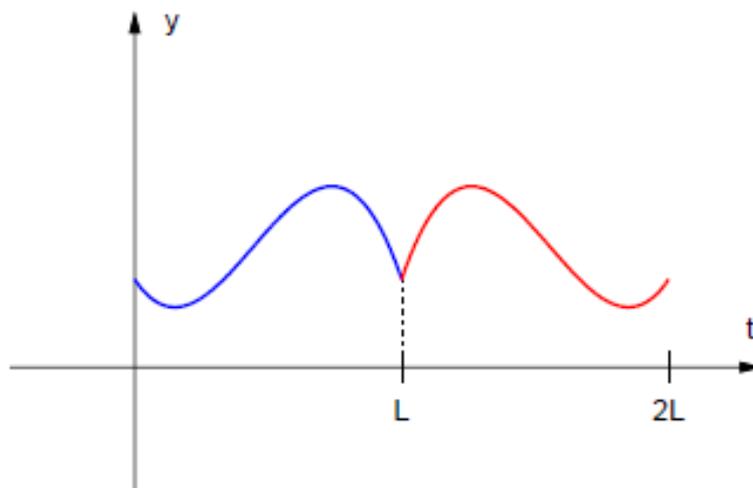


Figura 2.21 – Prolongamento com simetria em relação à reta  $t = L$  de uma função definida inicialmente somente no intervalo  $[0, L]$

**Corolário 2.9.** *Seja  $L$  um número real maior que zero. Para toda função  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua por partes tal que a sua derivada  $f'$  também seja contínua por partes. A série de Fourier de senos de índice ímpar de  $f$*

$$Ssif(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1} \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi t}{2L},$$

em que

$$b_{2k+1} = \frac{4}{2L} \int_0^L f(t) \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi t}{2L} dt \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots$$

converge para  $f$  nos pontos do intervalo  $(0, L)$  em que  $f$  é contínua. Ou seja, podemos representar  $f$  por sua série de senos de Fourier de índice ímpar:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1} \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi t}{2L}, \quad \text{para } t \in (0, L) \text{ em que } f \text{ é contínua.}$$

Além disso se  $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t), & \text{se } 0 \leq t < L, \\ f(2L - t), & \text{se } L \leq t < 2L, \end{cases}$$

$$\tilde{f}(t) = -\tilde{f}(-t), \text{ se } -2L \leq t < 0, \quad \tilde{f}(t + 4L) = \tilde{f}(t).$$

ou seja,  $\tilde{f}$  é a extensão de  $f$  que é periódica de período  $4L$ , ímpar e simétrica em relação a reta  $t = L$ , então

$$\tilde{f}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1} \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi t}{2L}, \quad \text{para } t \in \mathbb{R} \text{ em que } \tilde{f} \text{ é contínua.}$$

Já vimos que se uma função  $f : [0, 2L] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua por partes com derivada  $f'$  também contínua por partes, então pelo Corolário 2.4 ela pode ser representada por sua série de Fourier de cossenos

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \frac{n\pi t}{2L}.$$

com os coeficientes dados por

$$a_n = \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(t) \cos \frac{n\pi t}{2L} dt \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots$$

Se a função  $f$  é simétrica em relação ao ponto  $(L, 0)$ , isto é,

$$f(2L - t) = -f(t), \quad \text{para todo } t \in [0, L],$$

como  $\cos \frac{2k\pi t}{2L}$  é simétrica em relação à reta  $t = L$  (veja a Figura 2.22), então

o produto  $f(t) \cos \frac{2k\pi t}{2L}$  é simétrico em relação ao ponto  $(t, y) = (L, 0)$  e como

$\cos \frac{(2k+1)\pi t}{2L}$  é simétrica em relação ao ponto  $(t, y) = (L, 0)$  (veja a Figura 2.22),

então o produto  $f(t) \cos \frac{(2k+1)\pi t}{2L}$  é simétrica em relação à reta  $t = L$  (verifique!).

Índice  
ímpar

$$\int_0^{2L} h(t) dt = 0.$$

Índice  
par

$$\int_0^{2L} h(t) dt = 2 \int_0^L h(t) dt. \quad \text{MAP2320}$$

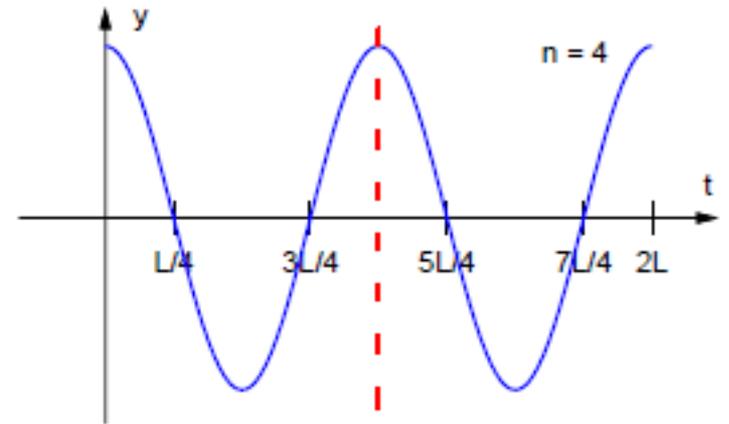
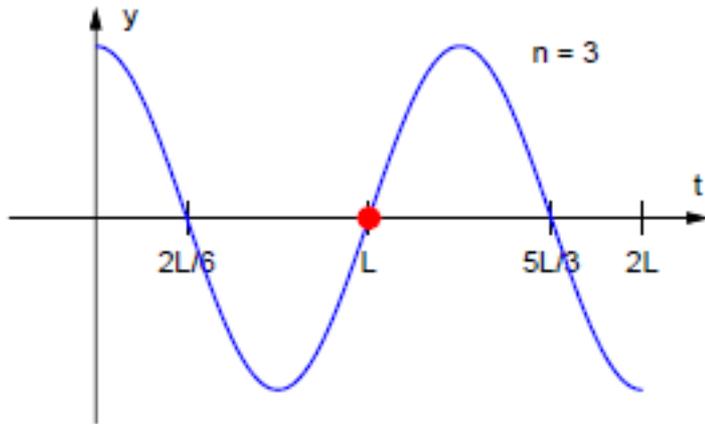
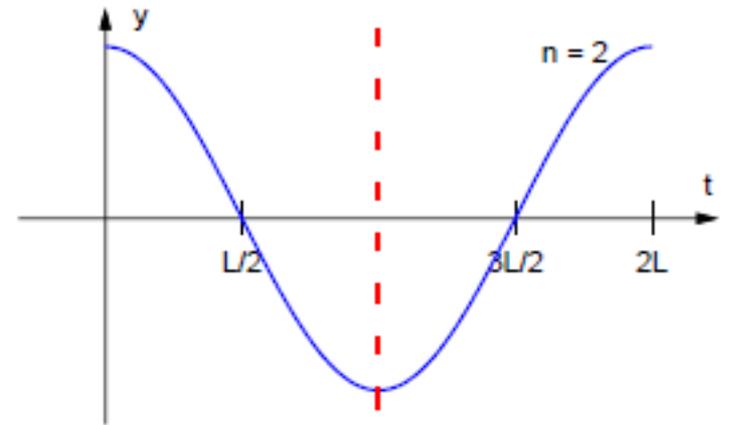
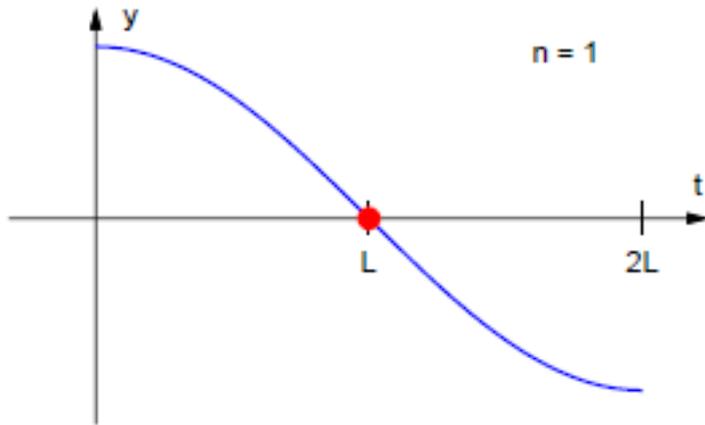


Figura 2.22 –  $\cos\left(\frac{n\pi t}{2L}\right)$ , para  $n = 1, 2, 3, 4$

Separando os coeficientes em  $\bar{a}_n$  de índice par e de índice ímpar e usando as relações (2.19) e (2.20) obtemos que:

$$\begin{aligned} a_{2k} &= 0 \\ a_{2k+1} &= \frac{4}{2L} \int_0^L f(t) \cos \frac{(2k+1)\pi t}{2L} dt \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

E assim

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \cos \frac{(2k+1)\pi t}{2L}, \quad \text{para } t \in (0, 2L)$$

Ou seja, se uma função  $f : [0, 2L] \rightarrow \mathbb{R}$  é simétrica em relação ao ponto  $(L, 0)$ , a sua série de Fourier de cossenos tem somente os termos de índice ímpar.

Para as funções  $f$  que são definidas apenas em  $[0, L]$  podemos prolongá-las ao intervalo  $[0, 2L]$  de forma que elas sejam simétricas em relação ao ponto  $(L, 0)$ , ou seja,

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t), & \text{se } 0 \leq t < L \\ -f(2L - t), & \text{se } L \leq t < 2L \end{cases}$$

é simétrica em relação ao ponto  $(L, 0)$ . E assim temos o seguinte resultado.

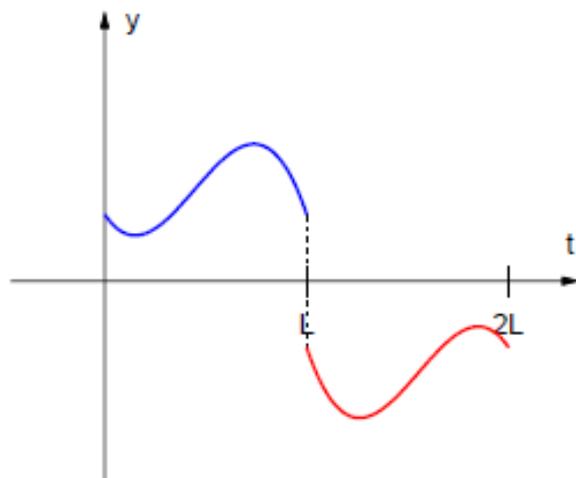


Figura 2.23 – Prolongamento com simetria em relação ao ponto  $(t, y) = (L, 0)$  de uma função definida inicialmente somente no intervalo  $[0, L]$

**Corolário 2.10.** *Seja  $L$  um número real maior que zero. Para toda função  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua por partes tal que a sua derivada  $f'$  também seja contínua por partes. A série de Fourier de cossenos de índice ímpar de  $f$*

$$Sci_f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \cos \frac{(2k+1)\pi t}{2L},$$

em que

$$a_{2k+1} = \frac{4}{2L} \int_0^L f(t) \cos \frac{(2k+1)\pi t}{2L} dt \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots$$

converge para  $f$  nos pontos do intervalo  $(0, L)$  em que  $f$  é contínua. Ou seja, podemos representar  $f$  por sua série de cossenos de Fourier de índice ímpar:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \cos \frac{(2k+1)\pi t}{2L}, \quad \text{para } t \in (0, L) \text{ em que } f \text{ é contínua.}$$

Além disso, se  $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t), & \text{se } 0 \leq t < L, \\ -f(2L - t), & \text{se } L \leq t < 2L, \end{cases}$$

$$\tilde{f}(t) = \tilde{f}(-t), \text{ se } -2L \leq t < 0, \quad \tilde{f}(t+4L) = \tilde{f}(t),$$

ou seja,  $\tilde{f}$  é a extensão de  $f$  que é periódica de período  $4L$ , par e simétrica em relação ao ponto  $(t, y) = (L, 0)$ , então

$$\tilde{f}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \cos \frac{(2k+1)\pi t}{2L}, \quad \text{para } t \in \mathbb{R} \text{ em que } \tilde{f} \text{ é contínua.}$$

**Exemplo 2.12.** Determine as representações da função  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  em termos das séries de Fourier de senos e de cossenos de índices ímpares:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq t < L/2, \\ t - L/2, & \text{se } L/2 \leq t < L, \end{cases}$$

Atenção para a escolha do c,d adequado !

$[0, 2L]:$

$$\begin{aligned}
 a_{2k+1} &= a_{2k+1}(f_{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}}^{(1)}, 2L) - \frac{L}{2} a_{2k+1}(f_{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}}^{(0)}, 2L) \\
 &= 4 \cdot \frac{2L}{(2k+1)^2 \pi^2} (s \operatorname{sen} s + \cos s) \Big|_{\frac{(2k+1)\pi}{4}}^{\frac{(2k+1)\pi}{2}} - \frac{L}{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{(2k+1)\pi} \operatorname{sen} s \Big|_{\frac{(2k+1)\pi}{4}}^{\frac{(2k+1)\pi}{2}} \\
 &= \frac{8L}{(2k+1)^2 \pi^2} \left( \cos \frac{(2k+1)\pi}{2} - \cos \frac{(2k+1)\pi}{4} \right) + \frac{2L}{(2k+1)\pi} \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi}{2} \\
 f(t) &= \frac{2L}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{4 \left( \cos \frac{(2k+1)\pi}{2} - \cos \frac{(2k+1)\pi}{4} \right)}{(2k+1)^2 \pi} + \frac{\operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi}{2}}{(2k+1)} \right] \cos \frac{(2k+1)\pi t}{2L}
 \end{aligned}$$

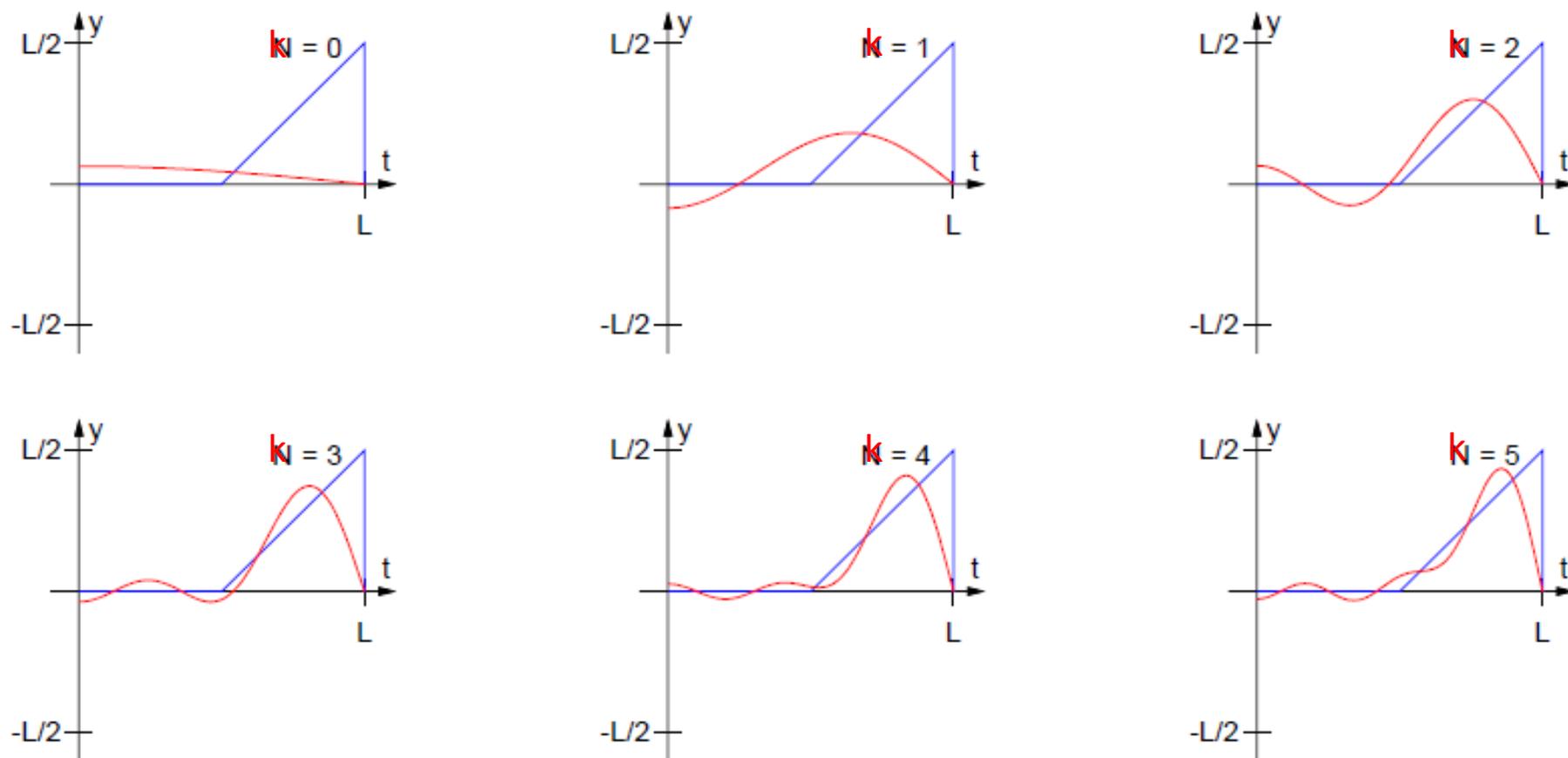


Figura 2.24 – A função  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(t) = t - L/2$ , se  $t \in [L/2, L]$  e  $f(t) = 0$ , caso contrário e as somas parciais da sua série de Fourier de cossenos de índices ímpares, para  $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ .

Atenção para a escolha do c,d adequado !

$$\begin{aligned}
 b_{2k+1} &= b_{2k+1}(f_{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}}^{(1)}, 2L) - \frac{L}{2} b_{2k+1}(f_{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}}^{(0)}, 2L) \\
 &= 4 \cdot \frac{2L}{(2k+1)^2 \pi^2} (-s \cos s + \operatorname{sen} s) \Big|_{\frac{(2k+1)\pi}{4}}^{\frac{(2k+1)\pi}{2}} - \frac{L}{2} \cdot 4 \cdot \frac{-1}{(2k+1)\pi} \cos s \Big|_{\frac{(2k+1)\pi}{4}}^{\frac{(2k+1)\pi}{2}} \\
 &= \frac{8L}{(2k+1)^2 \pi^2} \left( \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi}{2} - \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi}{4} \right) - \frac{2L}{(2k+1)\pi} \cos \frac{(2k+1)\pi}{2} \\
 f(t) &= \frac{2L}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{4 \left( \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi}{2} - \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi}{4} \right)}{(2k+1)^2 \pi} - \frac{\cos \frac{(2k+1)\pi}{2}}{(2k+1)} \right] \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi t}{2L}
 \end{aligned}$$

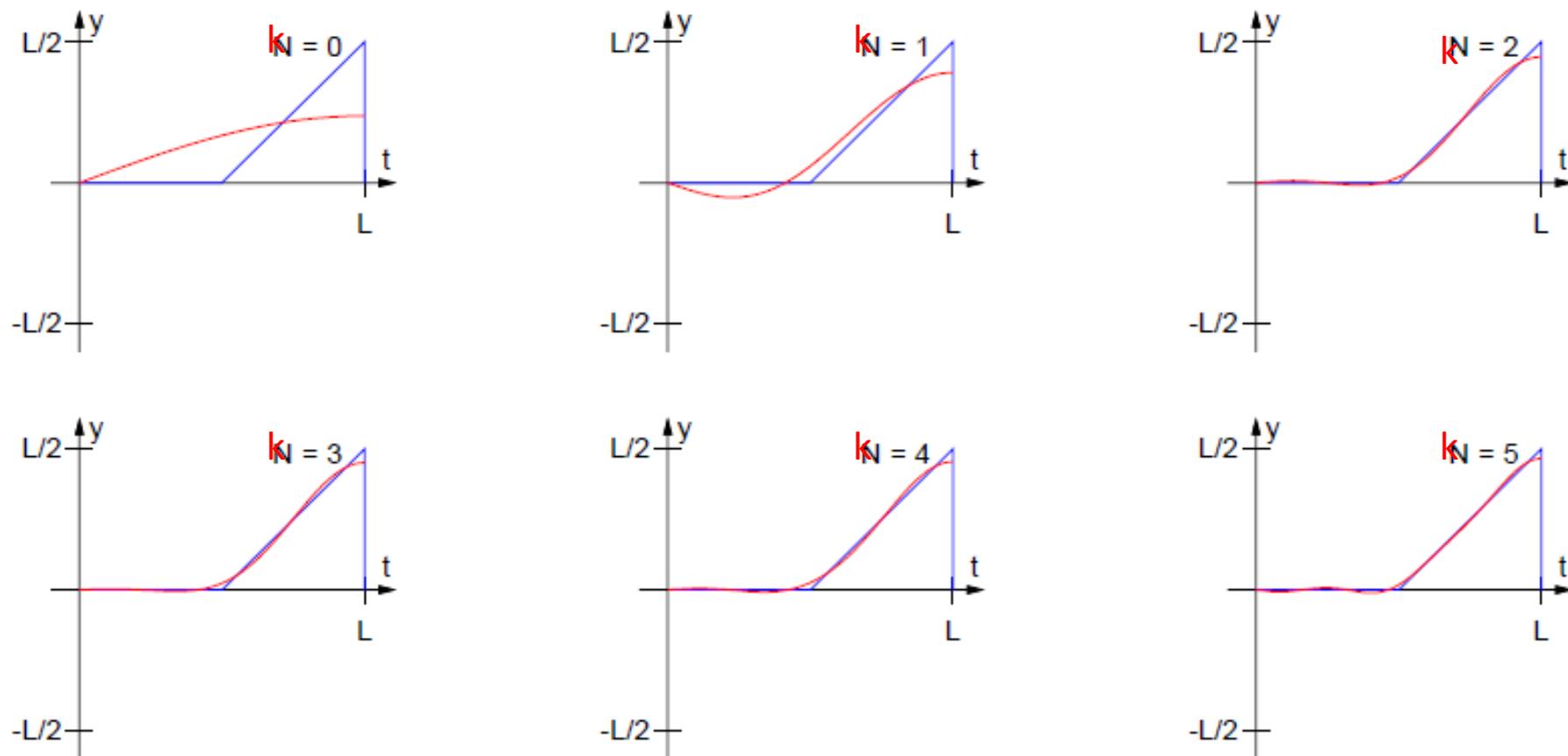


Figura 2.25 – A função  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(t) = t - L/2$ , se  $t \in [L/2, L]$  e  $f(t) = 0$ , caso contrário e as somas parciais da sua série de Fourier de senos de índices ímpares, para  $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ .



**Exemplo 3.4.** Vamos considerar uma barra de 40 cm de comprimento, isolada nos lados, com coeficiente  $\alpha = 1$ , a extremidade da esquerda mantida a temperatura zero e extremidade da direita isolada, ou seja,

$$u(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(40, t) = 0$$

e tal que a temperatura inicial é dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x < 20 \\ x - 20, & \text{se } 20 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

Temos que resolver o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \\ u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < 40 \\ u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(40, t) = 0 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{80} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{6400} t}$$

em que  $c_n$  são os coeficientes da série de senos de índice ímpar de  $f(x)$ , ou seja,

$$\begin{aligned} c_{2k+1} &= 4 \left( b_{2k+1}(f_{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}}^{(1)}, 80) - 20b_{2k+1}(f_{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}}^{(0)}, 80) \right) \\ &= 4 \cdot \frac{2L}{(2k+1)^2 \pi^2} (-s \cos s + \operatorname{sen} s) \Big|_{\frac{(2k+1)\pi}{4}}^{\frac{(2k+1)\pi}{2}} - \frac{L}{2} \cdot 4 \cdot \frac{-1}{(2k+1)\pi} \cos s \Big|_{\frac{(2k+1)\pi}{4}}^{\frac{(2k+1)\pi}{2}} \\ &= \frac{8L}{(2k+1)^2 \pi^2} \left( \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi}{2} - \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi}{4} \right) - \frac{2L}{(2k+1)\pi} \cos \frac{(2k+1)\pi}{2} \end{aligned}$$

Portanto a solução é dada por

$$u(x, t) = \frac{80}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{4 \left( \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi}{2} - \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi}{4} \right)}{(2k+1)^2 \pi} - \frac{\cos \frac{(2k+1)\pi}{2}}{(2k+1)} \right] \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi x}{80} e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{6400} t}.$$

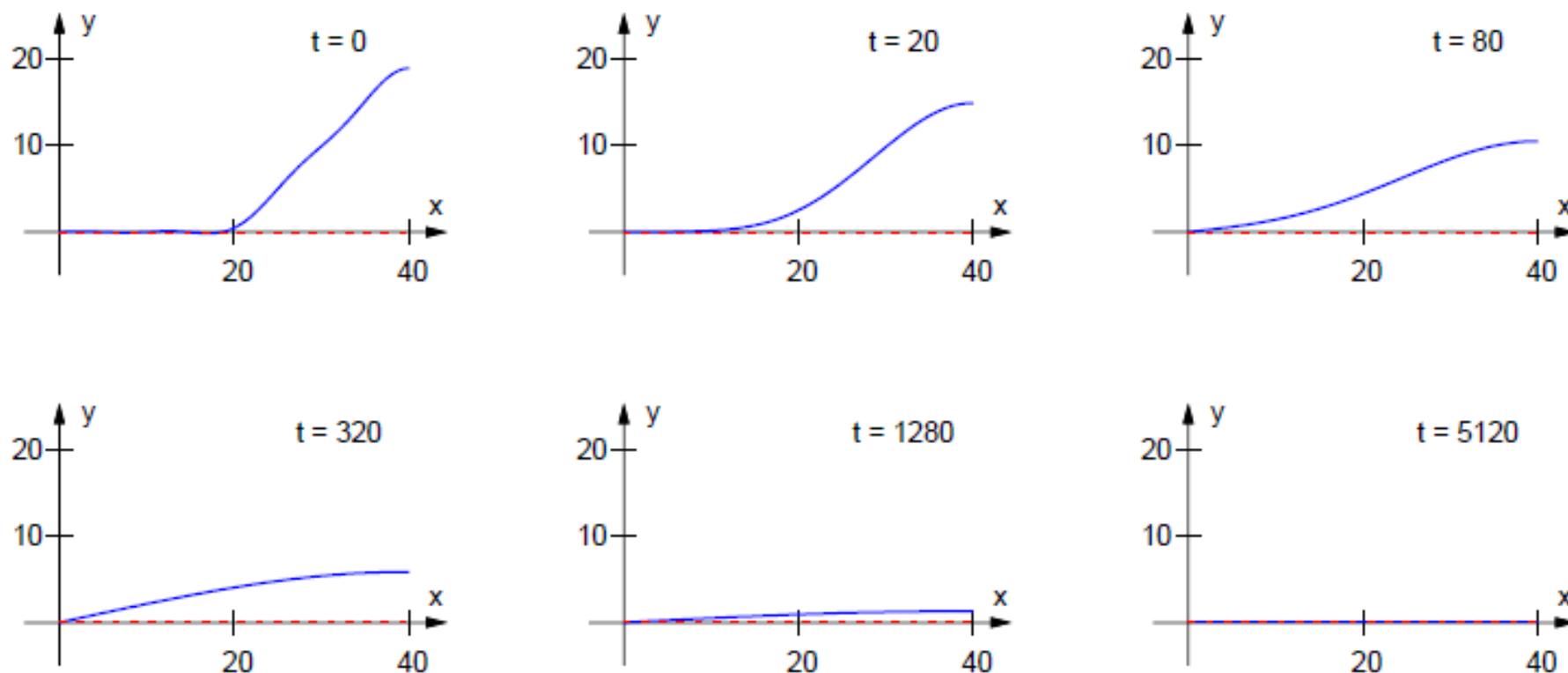


Figura 3.4 – Solução,  $u(x, t)$ , do PVIF do Exemplo 3.4 tomando apenas 6 termos não nulos da série.

### 3.3.2 Equação do Calor não Homogênea

Considere o seguinte PVIF

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x) \\ u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L \\ u(0, t) = T_1, \quad u(L, t) = T_2 \end{cases}$$

Vamos mostrar que a solução deste problema é dada por

$$u(x, t) = v(x) + u_0(x, t),$$

em que  $v(x)$  é a solução do problema de fronteira

$$\begin{cases} \alpha^2 v'' = -g(x) \\ v(0) = T_1, \quad v(L) = T_2 \end{cases}$$

e  $u_0(x, t)$  é a solução do PVIF homogêneo com condições de fronteiras homogêneas

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x) - v(x), \quad 0 < x < L \\ u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0 \end{cases}$$

Calculando as derivadas temos que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u_0}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha^2} g(x)$$

Substituindo-se na equação diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g(x)$$

obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u_0}{\partial t} + g(x) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = g(x)$$

$$u(x, 0) = v(x) + u_0(x, 0) = v(x) + f(x) - v(x) = f(x),$$

$$u(0, t) = v(0) + u_0(0, t) = v(0) = T_1,$$

$$u(L, t) = v(L) + u_0(L, t) = v(L) = T_2.$$

Como mostramos quando estudamos o problema homogêneo com condições de fronteira homogêneas

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_0(x, t) = 0.$$

Logo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = v(x) + \lim_{t \rightarrow \infty} u_0(x, t) = v(x), \quad \text{para } x \in [0, L]$$

ou seja, quando  $t$  tende a mais infinito, a solução  $u(x, t)$  tende a  $v(x)$ , chamada **solução estacionária** ou **solução de equilíbrio**.

**Exemplo 3.5.** Vamos considerar uma barra de 40 cm de comprimento, com coeficiente  $\alpha = 1$ , com as extremidades mantidas a temperaturas de  $10^\circ \text{C}$  e  $30^\circ \text{C}$  e tal que a temperatura inicial é dada por

$$f(x) = 10 + \text{sen} \frac{\pi x}{80},$$

Vamos resolver o problema de valor inicial e de fronteira

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\pi^2}{640} \text{sen} \frac{\pi x}{80} \\ u(x, 0) = f(x) = 10 + 10 \text{sen} \frac{\pi x}{80}, \quad 0 < x < 40 \\ u(0, t) = 10, \quad u(40, t) = 30 \end{array} \right.$$

A solução é então

$$u(x, t) = v(x) + u_0(x, t),$$

em que  $v(x)$  é a solução do problema de fronteira

$$\begin{cases} v'' = -\frac{\pi^2}{640} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{80} \\ v(0) = 10, v(40) = 30 \end{cases}$$

e  $u_0(x, t)$  é a solução do PVIF homogêneo com condições de fronteiras homogêneas

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x) - v(x), 0 < x < 40 \\ u(0, t) = 0, u(40, t) = 0 \end{cases}$$

Logo

$$v(x) = 10 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{80} + \frac{x}{4} + 10$$

$$u(x, t) = 10 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{80} + \frac{x}{4} + 10 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{1600} t}$$

em que  $c_n$  são os coeficientes da série de senos de

$$f(x) - v(x) = -\frac{x}{4}$$

ou seja,

$b_n$

$$\begin{aligned} c_n &= 2 \left( -\frac{1}{4} a_n(f_{0,1}^{(1)}) \right) \\ &= -\frac{20}{n^2 \pi^2} (-s \cos s + \operatorname{sen} s) \Big|_0^{n\pi} \\ &= \frac{20}{n\pi} \cos(n\pi) = \frac{20(-1)^n}{n\pi}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Aqui usamos a tabela na página 202, multiplicando por 2 os valores. Portanto a solução é dada por

$$u(x, t) = 10 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{80} + \frac{x}{4} + 10 + \frac{20}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{1600} t}$$

Observe que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = v(x) = 10 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{80} + \frac{x}{4} + 10, \quad \text{para } x \in [0, 40]$$

ou seja, quando  $t$  tende a mais infinito a solução tende a solução estacionária

$$v(x) = 10 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{80} + \frac{x}{4} + 10.$$

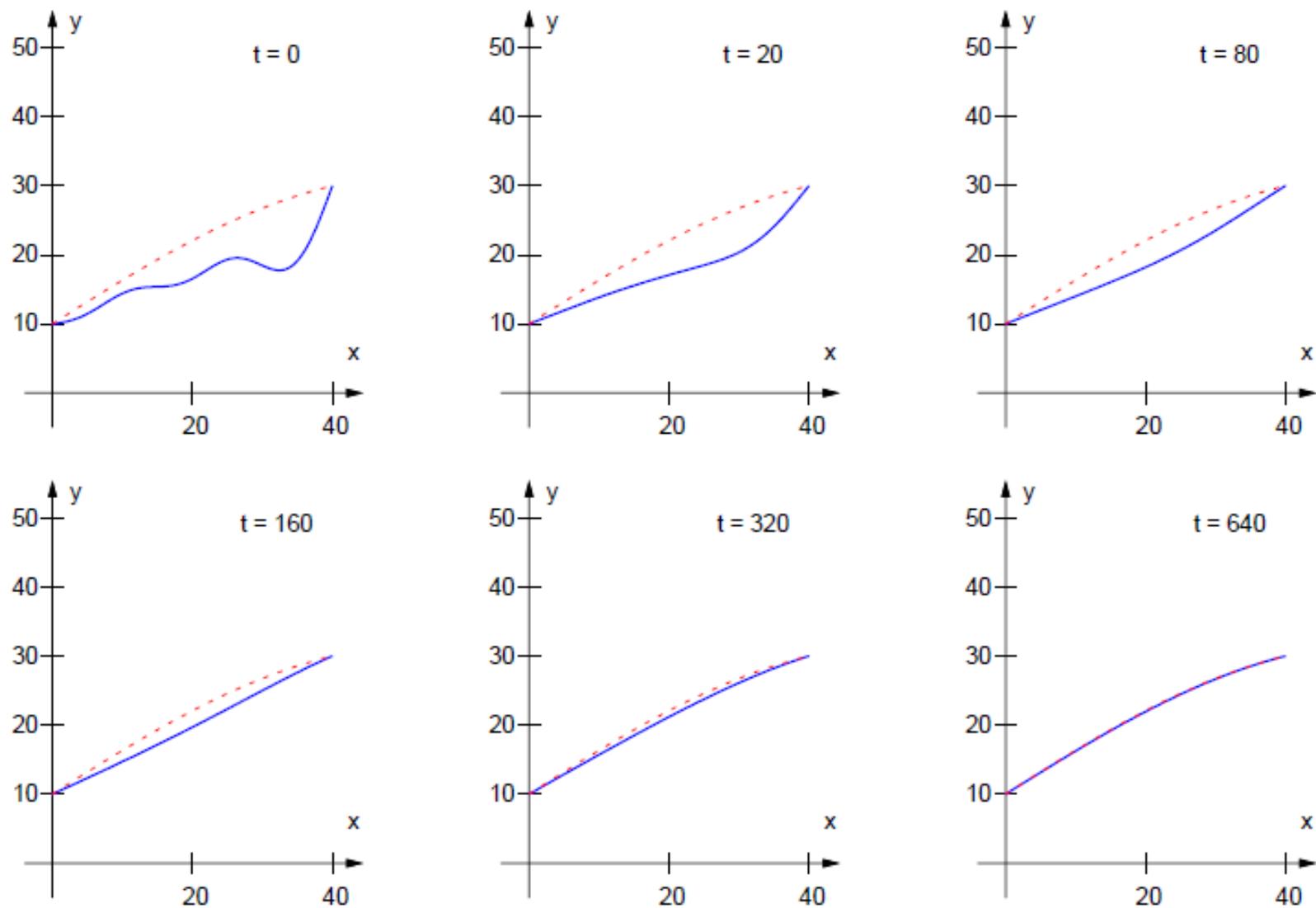


Figura 3.5 – Solução,  $u(x, t)$ , do PVIF do Exemplo 3.5 tomando apenas 3 termos não nulos da série.



Problema Homogêneo  
C.C. de Dirichlet  
homogêneas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x, 0) = f(x), 0 < x < L$$

$$u(0, t) = 0, u(L, t) = 0$$



Problema Homogêneo  
C.C. de Dirichlet  
não-homogêneas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x, 0) = f(x), 0 < x < L$$

$$u(0, t) = T_1, u(L, t) = T_2$$



Problema Homogêneo  
C.C. de Neumann  
homogêneas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x, 0) = f(x), 0 < x < L$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$$

Problema Homogêneo  
C.C. de Mistas



$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x, 0) = f(x), 0 < x < L$$

$$u(0, t) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$$

Problema Não-Homogêneo



$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x)$$

$$u(x, 0) = f(x), 0 < x < L$$

$$u(0, t) = T_1, u(L, t) = T_2$$



1ª PROVA – Próxima segunda 16/09/2019

Trazer:

- Tabela de Coeficientes (pg.202 – material UFMG)
- Tabela de relações trigonométricas
- Tabela de integrais
- Resumo da matéria em uma única folha de papel (frente-e-verso)

# MAP 2320 – MÉTODOS NUMÉRICOS EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS II

**2º Semestre - 2016**

## Roteiro do curso

- Introdução
- Séries de Fourier
- Método de Diferenças Finitas
- **Equação do calor transiente (parabólica)**
- Equação de Poisson (elíptica)
- Equação da onda (hiperbólica)