

**MAP 2320 – MÉTODOS NUMÉRICOS EM EQUAÇÕES
DIFERENCIAIS II**

2º Semestre - 2019

Prof. Dr. Luis Carlos de Castro Santos

lsantos@ime.usp.br



Problema Homogêneo
C.C. de Dirichlet
homogêneas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0$$



Problema Homogêneo
C.C. de Dirichlet
não-homogêneas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L$$

$$u(0, t) = T_1, \quad u(L, t) = T_2$$



Problema Homogêneo
C.C. de Neumann
homogêneas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$$

Problema Homogêneo
C.C. de Mistas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L$$

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$$

Problema Não-Homogêneo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L$$

$$u(0, t) = T_1, \quad u(L, t) = T_2$$

Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução (Versão Preliminar)

MAP2320

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
<http://www.mat.ufmg.br/~regi>

3	Equação do Calor em uma Barra	276
3.1	Extremidades a Temperaturas Fixas	277
3.1.1	Condições de Fronteira Homogêneas	277
3.1.2	Condições de Fronteira Não Homogêneas	285
	Exercícios	291
3.2	Barra Isolada nas Extremidades	292
	Exercícios	301
3.3	Condições de Fronteira Mistas e Equação não Homogênea	302
3.3.1	Condições de Fronteira Mistas	302
3.3.2	Equação do Calor não Homogênea	309
	Exercícios	314
3.4	Respostas dos Exercícios	316

3.3.1 Condições de Fronteira Mistas

Vamos resolver o seguinte problema de valor inicial e de fronteira que corresponde ao problema do calor em uma barra de comprimento L que do lado esquerdo está mantida a temperatura zero e do lado direito é mantida isolada.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L \\ u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 \end{cases}$$

Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de t , ou seja,

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Derivando e substituindo na equação diferencial obtemos

$$\alpha^2 X''(x)T(t) = X(x)T'(t)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{T'(t)}{T(t)}$$

O primeiro membro depende apenas de x , enquanto o segundo depende apenas de t . Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante, ou seja,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições de fronteira

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, & X(0) = 0, X'(L) = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

$$\begin{cases} T'(t) - \alpha^2 \lambda T(t) = 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

As condições de fronteira $X(0) = X'(L) = 0$ decorrem do fato de que

$$0 = u(0, t) = X(0)T(t) \quad \text{e} \quad 0 = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = X'(L)T(t).$$

A equação $X''(x) - \lambda X(x) = 0$ pode ter como soluções,

Se $\lambda > 0$: $X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$.

Se $\lambda = 0$: $X(x) = c_1 + c_2 x$.

Se $\lambda < 0$: $X(x) = c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x)$.

As condições de fronteira $X(0) = 0$ e $X'(L) = 0$ implicam que

Se $\lambda > 0$:

Substituindo-se $x = 0$ e $X = 0$ em $X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$, obtemos que $0 = c_1 + c_2$, ou seja, $c_2 = -c_1$. Logo

$$X(x) = c_1(e^{\sqrt{\lambda}x} - e^{-\sqrt{\lambda}x}).$$

Agora substituindo-se $x = L$ e $X' = 0$ em $X'(x) = \sqrt{\lambda}c_1(e^{\sqrt{\lambda}x} + e^{-\sqrt{\lambda}x})$, obtemos que se $c_1 \neq 0$, então

$$e^{\sqrt{\lambda}L} = e^{-\sqrt{\lambda}L}$$

o que não é possível se $\lambda > 0$ (só é possível se $\lambda = 0$).

Se $\lambda = 0$:

Substituindo-se $x = 0$ e $X = 0$ em $X(x) = c_1 + c_2x$, obtemos que $c_1 = 0$. Logo

$$X(x) = c_2x.$$

Substituindo-se $x = L$ e $X' = 0$ em $X'(x) = c_2$, obtemos que também $c_2 = 0$.

Se $\lambda < 0$:

Substituindo-se $x = 0$ e $X = 0$ em $X(x) = c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x)$, obtemos que $c_2 = 0$. Logo

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}x).$$

Agora substituindo-se $x = L$ e $X' = 0$ em $X'(x) = \sqrt{-\lambda}c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x)$, obtemos que se $c_1 \neq 0$, então

$$\cos(\sqrt{-\lambda}L) = 0$$

o que implica que

$$\sqrt{-\lambda}L = \frac{(2n+1)\pi}{2}, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Logo

$$\lambda = -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Portanto o problema de valores de fronteira (3.11) tem soluções fundamentais

$$X_{2n+1}(x) = \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2L}, \text{ para } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Substituindo-se $\lambda = -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}$ na equação diferencial (3.12) obtemos

$$T'(t) + \frac{\alpha^2(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}T(t) = 0$$

que tem como solução fundamental

$$T_{2n+1}(t) = e^{-\frac{\alpha^2(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}t}, \text{ para } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções fundamentais

$$u_{2n+1}(x, t) = X_{2n+1}(x)T_{2n+1}(t) = \text{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} e^{-\frac{\alpha^2(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}t}$$

Além disso, combinações lineares dessas soluções são também solução

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^N c_{2n+1} u_{2n+1}(x, t) = \sum_{n=0}^N c_{2n+1} \text{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} e^{-\frac{\alpha^2(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}t}$$

Vamos supor que a solução do PVIF seja a série

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} u_{2n+1}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \text{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} e^{-\frac{\alpha^2(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}t}$$

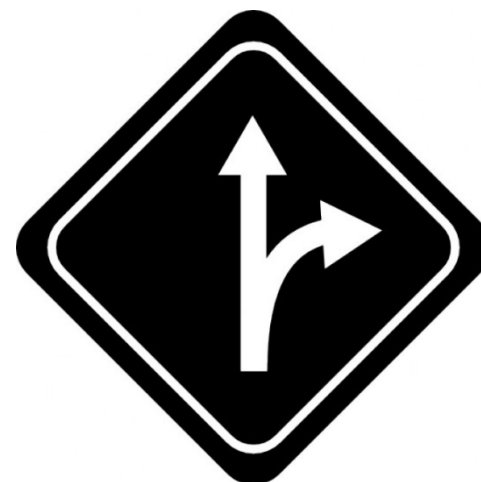
Então, para satisfazer a condição inicial $u(x, 0) = f(x)$, temos que impor a condição

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L}.$$

Esta é a série de Fourier de senos de índice ímpar de $f(x)$.

Como usar a tabela para calcular os coeficientes da Série de Senos de Índice Ímpar ?

Voltamos ao Capítulo 2 !!!!



2.1 Teorema de Fourier

Teorema 2.1 (Fourier). *Seja L um número real maior que zero. Para toda função $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes, a série de Fourier de f*

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi t}{L},$$

em que

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

converge para f nos pontos de $(-L, L)$ em que f é contínua. Ou seja, podemos representar f por sua série de Fourier:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi t}{L}, \quad \text{para } t \in (-L, L) \text{ em que } f \text{ é contínua.}$$

2.1.4 Tabela de Coeficientes de Séries de Fourier

Coeficientes das Séries de Fourier de Funções Elementares		
$f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}, -1 \leq c < d \leq 1$	$a_n(f, L) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt$	$b_n(f, L) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt$
$f_{c,d}^{(0)}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in [cL, dL] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$\begin{aligned} a_0(f_{c,d}^{(0)}, L) &= d - c \\ a_n(f_{c,d}^{(0)}, L) &= \frac{1}{n\pi} \sin s \Big _{n\pi c}^{n\pi d} \end{aligned}$	$b_n(f_{c,d}^{(0)}, L) = -\frac{1}{n\pi} \cos s \Big _{n\pi c}^{n\pi d}$
$f_{c,d}^{(1)}(t) = \begin{cases} t, & \text{se } t \in [cL, dL] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$\begin{aligned} a_0(f_{c,d}^{(1)}, L) &= \frac{L}{2}(d^2 - c^2) \\ a_n(f_{c,d}^{(1)}, L) &= \frac{L}{n^2\pi^2} (s \sin s + \cos s) \Big _{n\pi c}^{n\pi d} \end{aligned}$	$\begin{aligned} b_n(f_{c,d}^{(1)}, L) &= \\ \frac{L}{n^2\pi^2} (-s \cos s + \sin s) \Big _{n\pi c}^{n\pi d} \end{aligned}$
$f_{c,d}^{(2)}(t) = \begin{cases} t^2, & \text{se } t \in [cL, dL] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$\begin{aligned} a_0(f_{c,d}^{(2)}, L) &= \frac{L^2}{3}(d^3 - c^3) \\ a_n(f_{c,d}^{(2)}, L) &= \frac{L^2}{n^3\pi^3} ((s^2 - 2) \sin s + 2s \cos s) \Big _{n\pi c}^{n\pi d} \end{aligned}$	$\begin{aligned} b_n(f_{c,d}^{(2)}, L) &= \\ \frac{L^2}{n^3\pi^3} (2s \sin s + (2 - s^2) \cos s) \Big _{n\pi c}^{n\pi d} \end{aligned}$

Ou seja, se uma função $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ é par a sua série de Fourier tem somente os termos em cossenos,

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L}.$$

Para as funções f que são definidas apenas em $[0, L]$ podemos prolongá-las de forma que elas se tornem par no intervalo $[-L, L]$:

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(-t), & \text{se } -L \leq t < 0 \\ f(t), & \text{se } 0 \leq t < L \end{cases}$$

é a extensão par de f . E assim temos o seguinte resultado.

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt,$$

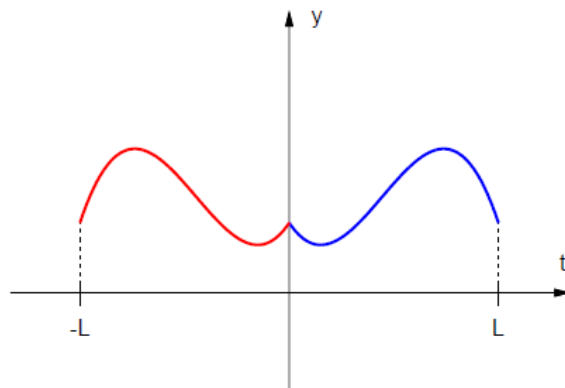


Figura 2.3 – Prolongamento par de uma função definida inicialmente somente no intervalo $[0, L]$

Ou seja, se uma função $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ é ímpar a sua série de Fourier tem somente os termos em senos,

$$S_f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L}.$$

Para as funções f que são definidas apenas em $[0, L]$ podemos prolongá-las de forma que elas se tornem ímpar no intervalo $[-L, L]$:

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} -f(-t), & \text{se } -L \leq t < 0 \\ f(t), & \text{se } 0 \leq t < L \end{cases}$$

é a extensão ímpar de f . E assim temos o seguinte resultado.

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt,$$

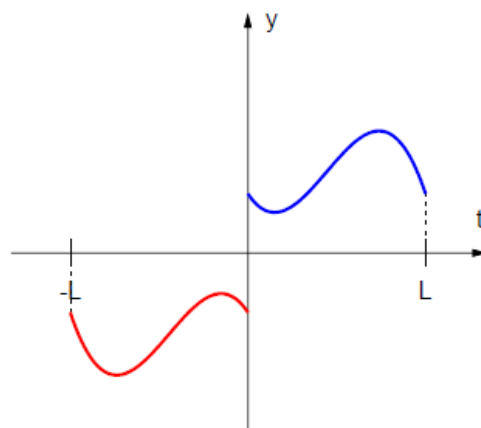


Figura 2.4 – Prolongamento ímpar de uma função definida inicialmente somente no intervalo $[0, L]$

2.2 Séries de Fourier de Senos e de Cossenos de Índices Ímpares

Análogo ao caso de integração de funções ímpares no intervalo $[-L, L]$, se $h : [0, 2L] \rightarrow \mathbb{R}$ é simétrica em relação ao ponto $(t, y) = (L, 0)$, ou seja, se é tal que

anti

$$h(2L - t) = -h(t), \quad \text{para todo } t \in [0, L],$$

então (verifique!)

$$\int_0^{2L} h(t) dt = 0. \quad (2.19)$$

Também análogo ao caso de integração de funções pares no intervalo $[-L, L]$, se $h : [0, 2L] \rightarrow \mathbb{R}$ é simétrica em relação à reta $t = L$, ou seja, se é tal que

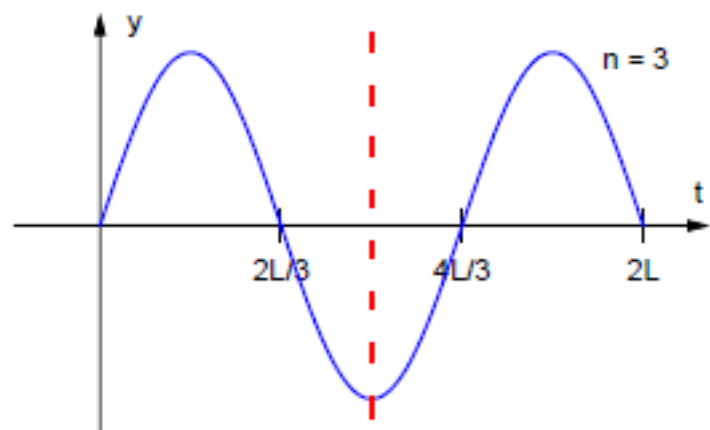
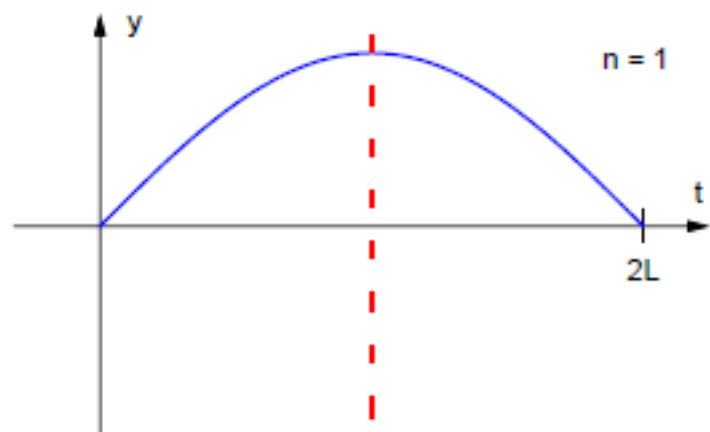
$$h(2L - t) = h(t), \quad \text{para todo } t \in [0, L],$$

então (verifique!)

$$\int_0^{2L} h(t) dt = 2 \int_0^L h(t) dt. \quad (2.20)$$

Índice
ímpar

$$\int_0^{2L} h(t) dt = 2 \int_0^L h(t) dt.$$



Índice
par

$$\int_0^{2L} h(t) dt = 0.$$

MAP2320

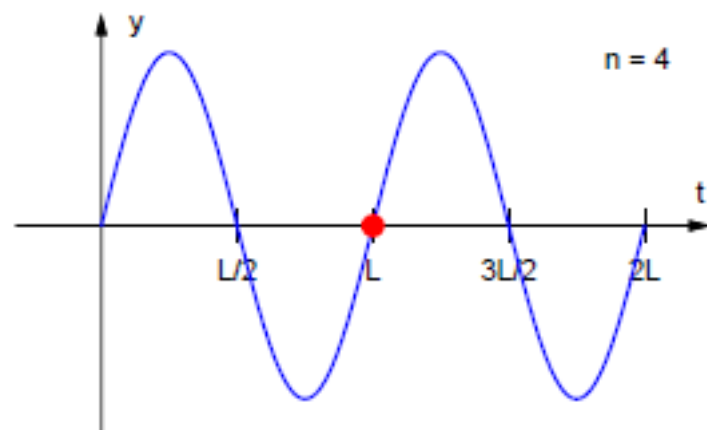
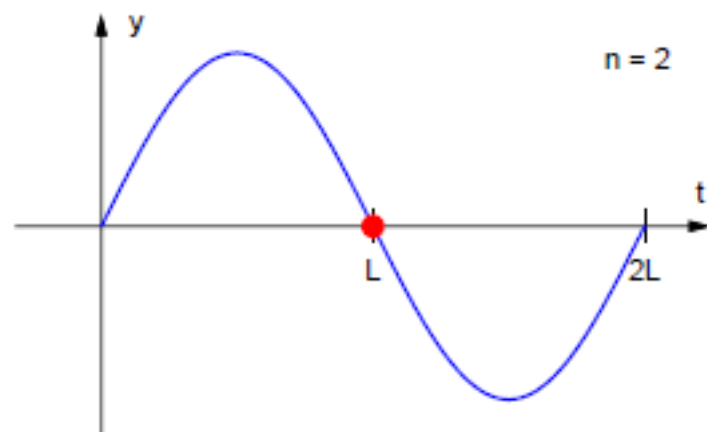


Figura 2.20 – $\sin \frac{n\pi t}{2L}$, para $n = 1, 2, 3, 4$

Já vimos que se uma função $f : [0, 2L] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua por partes com derivada f' também contínua por partes, então pelo Corolário 2.5 ela pode ser representada por sua série de Fourier de senos

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{2L}.$$

com os coeficientes dados por

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^{2L} f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{2L} dt \quad \text{para } n = 1, 2, \dots$$

Se a função f é simétrica em relação à reta $t = L$, isto é, se

$$f(2L - t) = f(t), \quad \text{para todo } t \in [0, L],$$

como $\operatorname{sen} \frac{2k\pi t}{2L}$ é simétrica em relação ao ponto $(t, y) = (L, 0)$ (veja a Figura 2.20), então o produto $f(t) \operatorname{sen} \frac{2k\pi t}{2L}$ é simétrico em relação ao ponto $(t, y) = (L, 0)$ e como $\operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi t}{2L}$ é simétrica em relação à reta $t = L$ (veja a Figura 2.20), então o produto $f(t) \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi t}{2L}$ é simétrico em relação à reta $t = L$ (verifique!).

Assim,

separando os coeficientes em de índice par e de índice ímpar e usando as relações (2.19) e (2.20) obtemos que:

$$\begin{aligned}
 b_{2k} &= 0 \\
 b_{2k+1} &= \frac{4}{2L} \int_0^L f(t) \sin \frac{(2k+1)\pi t}{2L} dt \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

[-2L, 2L]

E assim

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1} \sin \frac{(2k+1)\pi t}{2L}, \quad \text{para } t \in (0, 2L)$$

Ou seja, se uma função $f : [0, 2L] \rightarrow \mathbb{R}$ é simétrica em relação à reta $t = L$, a sua série de Fourier de senos tem somente os termos de índice ímpar.

Para as funções f que são definidas apenas em $[0, L]$ podemos prolongá-las ao intervalo $[0, 2L]$ de forma que elas sejam simétricas em relação à reta $t = L$, ou seja,

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t), & \text{se } 0 \leq t < L \\ f(2L - t), & \text{se } L \leq t < 2L \end{cases}$$

é simétrica em relação à reta $t = L$. Assim temos o seguinte resultado.

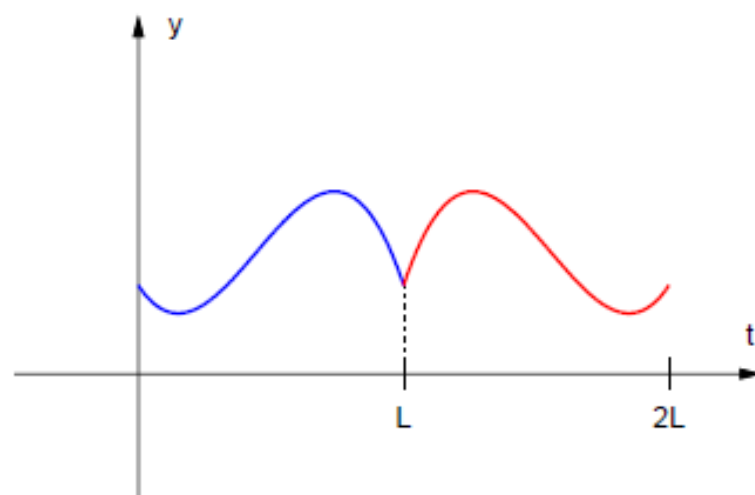


Figura 2.21 – Prolongamento com simetria em relação à reta $t = L$ de uma função definida inicialmente somente no intervalo $[0, L]$

Corolário 2.9. *Seja L um número real maior que zero. Para toda função $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes. A série de Fourier de senos de índice ímpar de f*

$$Ssif(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1} \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi t}{2L},$$

em que

$$b_{2k+1} = \frac{4}{2L} \int_0^L f(t) \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi t}{2L} dt \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots$$

converge para f nos pontos do intervalo $(0, L)$ em que f é contínua. Ou seja, podemos representar f por sua série de senos de Fourier de índice ímpar:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1} \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi t}{2L}, \quad \text{para } t \in (0, L) \text{ em que } f \text{ é contínua.}$$

Além disso se $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t), & \text{se } 0 \leq t < L, \\ f(2L - t), & \text{se } L \leq t < 2L, \end{cases}$$

$$\tilde{f}(t) = -\tilde{f}(-t), \text{ se } -2L \leq t < 0, \quad \tilde{f}(t + 4L) = \tilde{f}(t).$$

ou seja, \tilde{f} é a extensão de f que é periódica de período $4L$, ímpar e simétrica em relação a reta $t = L$, então

$$\tilde{f}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1} \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi t}{2L}, \quad \text{para } t \in \mathbb{R} \text{ em que } \tilde{f} \text{ é contínua.}$$

Já vimos que se uma função $f : [0, 2L] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua por partes com derivada f' também contínua por partes, então pelo Corolário 2.4 ela pode ser representada por sua série de Fourier de cossenos

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \frac{n\pi t}{2L}.$$

com os coeficientes dados por

$$a_n = \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(t) \cos \frac{n\pi t}{2L} dt \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots$$

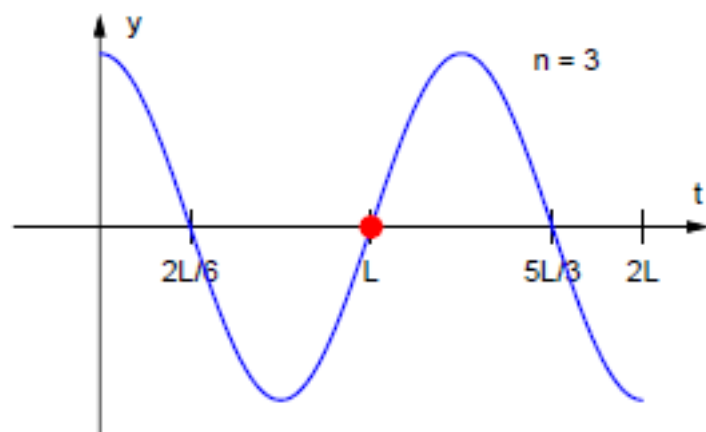
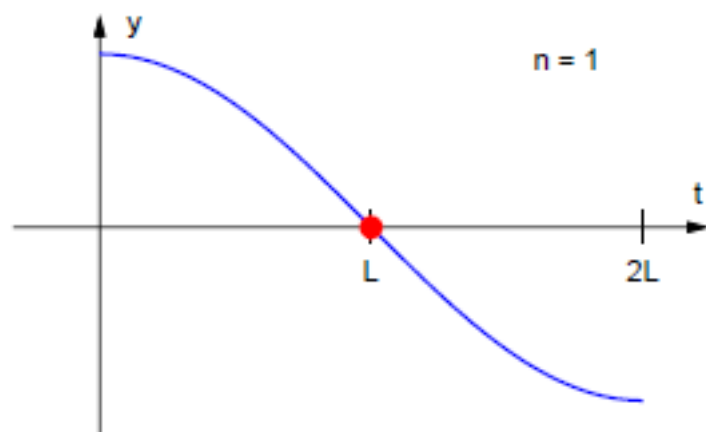
Se a função f é simétrica em relação ao ponto $(L, 0)$, isto é,

$$f(2L - t) = -f(t), \quad \text{para todo } t \in [0, L],$$

como $\cos \frac{2k\pi t}{2L}$ é simétrica em relação à reta $t = L$ (veja a Figura 2.22), então o produto $f(t) \cos \frac{2k\pi t}{2L}$ é simétrico em relação ao ponto $(t, y) = (L, 0)$ e como $\cos \frac{(2k+1)\pi t}{2L}$ é simétrica em relação ao ponto $(t, y) = (L, 0)$ (veja a Figura 2.22), então o produto $f(t) \cos \frac{(2k+1)\pi t}{2L}$ é simétrica em relação à reta $t = L$ (verifique!).

Índice
ímpar

$$\int_0^{2L} h(t) dt = 0.$$



Índice
par

$$\int_0^{2L} h(t) dt = 2 \int_0^L h(t) dt.$$

MAP2320

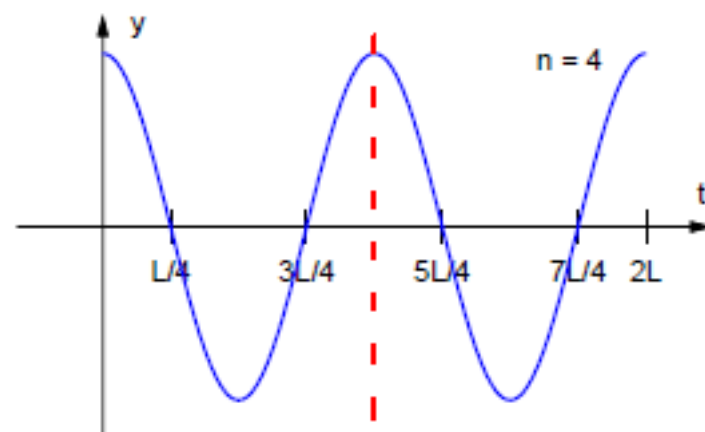
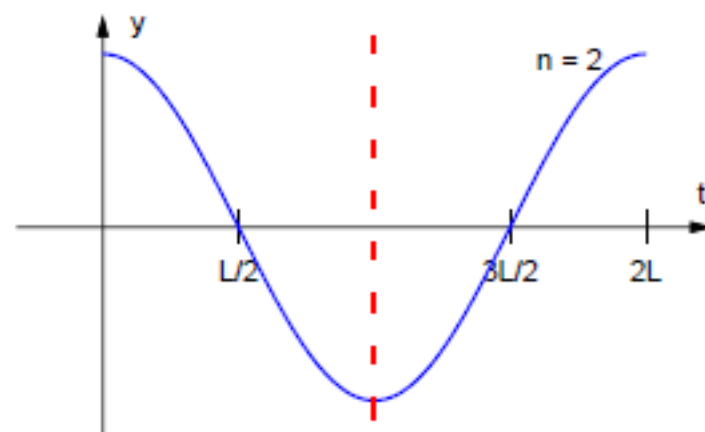


Figura 2.22 – $\cos \frac{n\pi t}{2L}$, para $n = 1, 2, 3, 4$

Separando os coeficientes em de índice par e de índice ímpar e usando as relações (2.19) e (2.20) obtemos que:

$$\begin{aligned} a_{2k} &= 0 \\ a_{2k+1} &= \frac{4}{2L} \int_0^L f(t) \cos \frac{(2k+1)\pi t}{2L} dt \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

E assim

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \cos \frac{(2k+1)\pi t}{2L}, \quad \text{para } t \in (0, 2L)$$

Ou seja, se uma função $f : [0, 2L] \rightarrow \mathbb{R}$ é simétrica em relação ao ponto $(L, 0)$, a sua série de Fourier de cossenos tem somente os termos de índice ímpar.

Para as funções f que são definidas apenas em $[0, L]$ podemos prolongá-las ao intervalo $[0, 2L]$ de forma que elas sejam simétricas em relação ao ponto $(L, 0)$, ou seja,

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t), & \text{se } 0 \leq t < L \\ -f(2L - t), & \text{se } L \leq t < 2L \end{cases}$$

é simétrica em relação ao ponto $(L, 0)$. E assim temos o seguinte resultado.

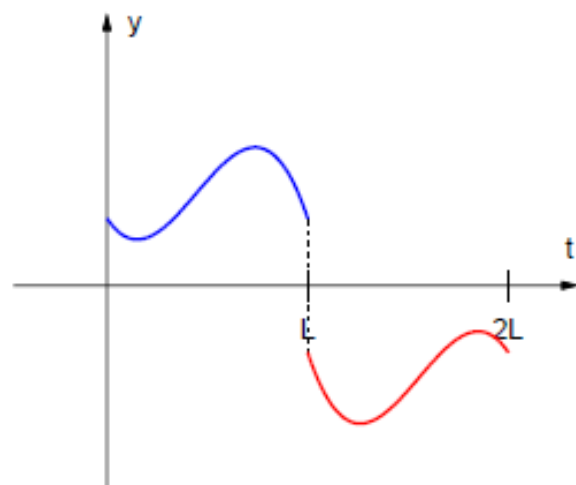


Figura 2.23 – Prolongamento com simetria em relação ao ponto $(t, y) = (L, 0)$ de uma função definida inicialmente somente no intervalo $[0, L]$

Corolário 2.10. *Seja L um número real maior que zero. Para toda função $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes. A série de Fourier de cossenos de índice ímpar de f*

$$Sci_f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \cos \frac{(2k+1)\pi t}{2L},$$

em que

$$a_{2k+1} = \frac{4}{2L} \int_0^L f(t) \cos \frac{(2k+1)\pi t}{2L} dt \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots$$

converge para f nos pontos do intervalo $(0, L)$ em que f é contínua. Ou seja, podemos representar f por sua série de cossenos de Fourier de índice ímpar:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \cos \frac{(2k+1)\pi t}{2L}, \quad \text{para } t \in (0, L) \text{ em que } f \text{ é contínua.}$$

Além disso, se $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t), & \text{se } 0 \leq t < L, \\ -f(2L - t), & \text{se } L \leq t < 2L, \end{cases}$$

$$\tilde{f}(t) = \tilde{f}(-t), \text{ se } -2L \leq t < 0, \quad \tilde{f}(t + 4L) = \tilde{f}(t),$$

ou seja, \tilde{f} é a extensão de f que é periódica de período $4L$, par e simétrica em relação ao ponto $(t, y) = (L, 0)$, então

$$\tilde{f}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \cos \frac{(2k+1)\pi t}{2L}, \quad \text{para } t \in \mathbb{R} \text{ em que } \tilde{f} \text{ é contínua.}$$

Exemplo 2.12. Determine as representações da função $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ em termos das séries de Fourier de senos e de cossenos de índices ímpares:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq t < L/2, \\ t - L/2, & \text{se } L/2 \leq t < L, \end{cases}$$

Atenção para a escolha do c,d adequado !

$[0, 2L]$:

$$\begin{aligned}
 a_{2k+1} &= a_{2k+1}(f_{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}}^{(1)}, 2L) - \frac{L}{2} a_{2k+1}(f_{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}}^{(0)}, 2L) \\
 &= 4 \cdot \frac{2L}{(2k+1)^2 \pi^2} (s \operatorname{sen} s + \cos s) \Big|_{\frac{(2k+1)\pi}{4}}^{\frac{(2k+1)\pi}{2}} - \frac{L}{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{(2k+1)\pi} \operatorname{sen} s \Big|_{\frac{(2k+1)\pi}{4}}^{\frac{(2k+1)\pi}{2}} \\
 &= \frac{8L}{(2k+1)^2 \pi^2} \left(\cos \frac{(2k+1)\pi}{2} - \cos \frac{(2k+1)\pi}{4} \right) + \frac{2L}{(2k+1)\pi} \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi}{2} \\
 f(t) &= \frac{2L}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{4 \left(\cos \frac{(2k+1)\pi}{2} - \cos \frac{(2k+1)\pi}{4} \right)}{(2k+1)^2 \pi} + \frac{\operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi}{2}}{(2k+1)} \right] \cos \frac{(2k+1)\pi t}{2L}
 \end{aligned}$$

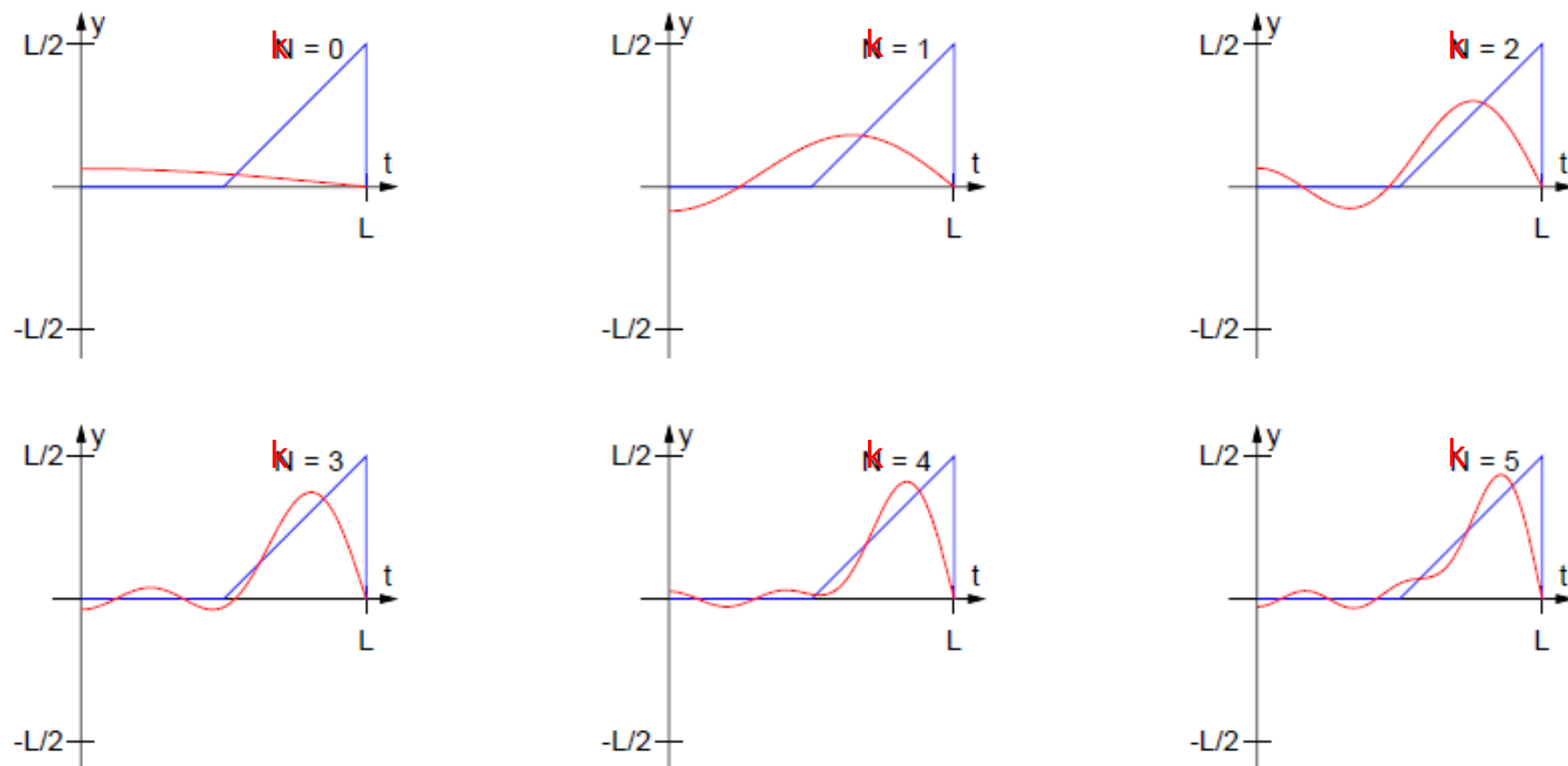


Figura 2.24 – A função $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = t - L/2$, se $t \in [L/2, L]$ e $f(t) = 0$, caso contrário e as somas parciais da sua série de Fourier de cossenos de índices ímpares, para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Atenção para a escolha do c,d adequado !

$$\begin{aligned}
 b_{2k+1} &= b_{2k+1}(f_{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}}^{(1)}, 2L) - \frac{L}{2} b_{2k+1}(f_{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}}^{(0)}, 2L) \\
 &= 4 \cdot \frac{2L}{(2k+1)^2 \pi^2} (-s \cos s + \operatorname{sen} s) \Big|_{\frac{(2k+1)\pi}{4}}^{\frac{(2k+1)\pi}{2}} - \frac{L}{2} \cdot 4 \cdot \frac{-1}{(2k+1)\pi} \cos s \Big|_{\frac{(2k+1)\pi}{4}}^{\frac{(2k+1)\pi}{2}} \\
 &= \frac{8L}{(2k+1)^2 \pi^2} \left(\operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi}{2} - \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi}{4} \right) - \frac{2L}{(2k+1)\pi} \cos \frac{(2k+1)\pi}{2} \\
 f(t) &= \frac{2L}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{4 \left(\operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi}{2} - \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi}{4} \right)}{(2k+1)^2 \pi} - \frac{\cos \frac{(2k+1)\pi}{2}}{(2k+1)} \right] \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi t}{2L}
 \end{aligned}$$

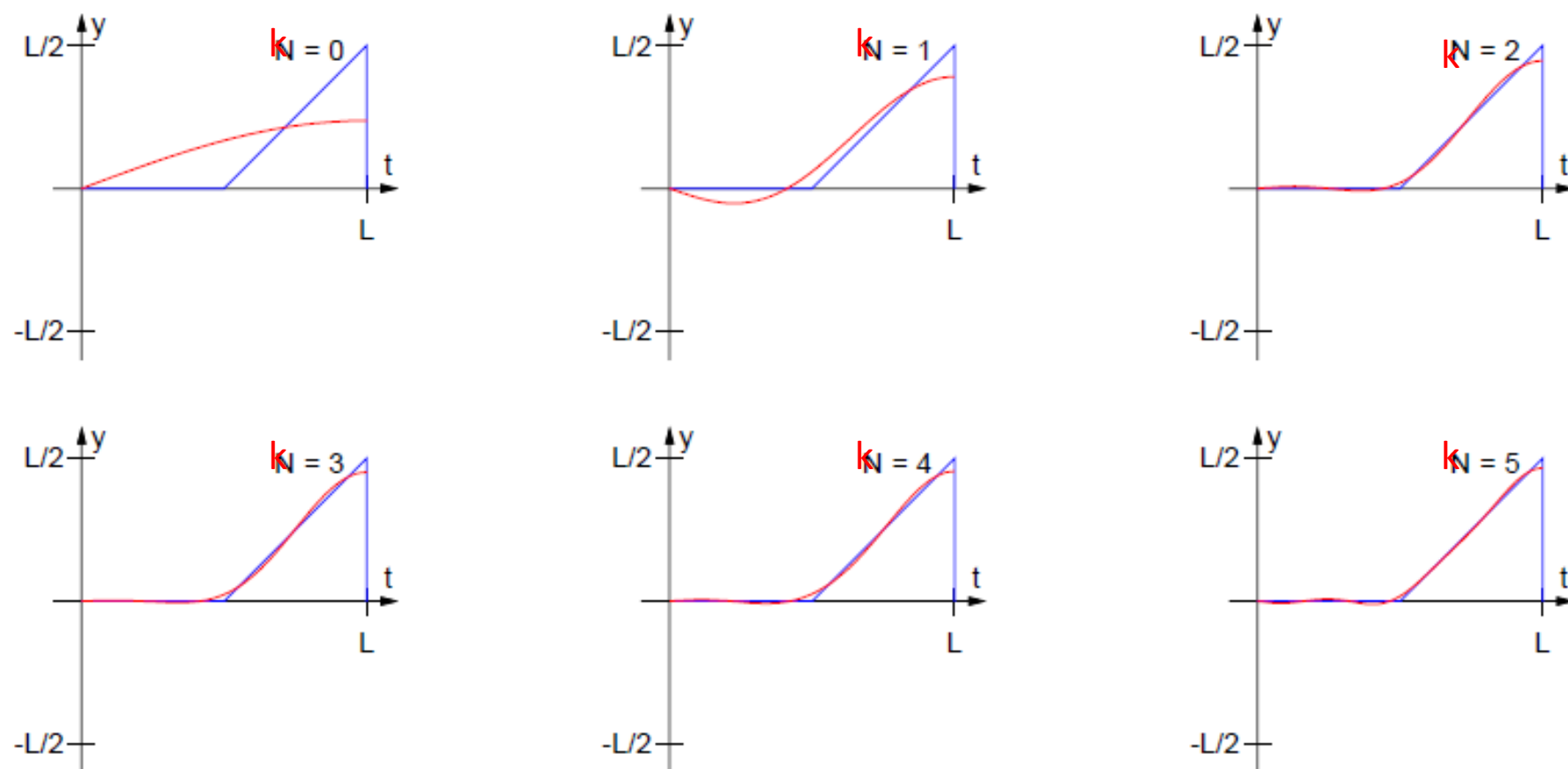


Figura 2.25 – A função $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = t - L/2$, se $t \in [L/2, L]$ e $f(t) = 0$, caso contrário e as somas parciais da sua série de Fourier de senos de índices ímpares, para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.



Exemplo 3.4. Vamos considerar uma barra de 40 cm de comprimento, isolada nos lados, com coeficiente $\alpha = 1$, a extremidade da esquerda mantida a temperatura zero e extremidade da direita isolada, ou seja,

$$u(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(40, t) = 0$$

e tal que a temperatura inicial é dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x < 20 \\ x - 20, & \text{se } 20 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

Temos que resolver o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \\ u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < 40 \\ u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(40, t) = 0 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{80} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{6400} t}$$

em que c_n são os coeficientes da série de senos de índice ímpar de $f(x)$, ou seja,

$$\begin{aligned} c_{2k+1} &= 4 \left(b_{2k+1}(f_{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}}^{(1)}, 80) - 20b_{2k+1}(f_{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}}^{(0)}, 80) \right) \\ &= 4 \cdot \frac{2L}{(2k+1)^2 \pi^2} (-s \cos s + \operatorname{sen} s) \Big|_{\frac{(2k+1)\pi}{4}}^{\frac{(2k+1)\pi}{2}} - \frac{L}{2} \cdot 4 \cdot \frac{-1}{(2k+1)\pi} \cos s \Big|_{\frac{(2k+1)\pi}{4}}^{\frac{(2k+1)\pi}{2}} \\ &= \frac{8L}{(2k+1)^2 \pi^2} \left(\operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi}{2} - \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi}{4} \right) - \frac{2L}{(2k+1)\pi} \cos \frac{(2k+1)\pi}{2} \end{aligned}$$

Portanto a solução é dada por

$$u(x, t) = \frac{80}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{4 \left(\operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi}{2} - \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi}{4} \right)}{(2k+1)^2 \pi} - \frac{\cos \frac{(2k+1)\pi}{2}}{(2k+1)} \right] \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi x}{80} e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{6400} t}.$$

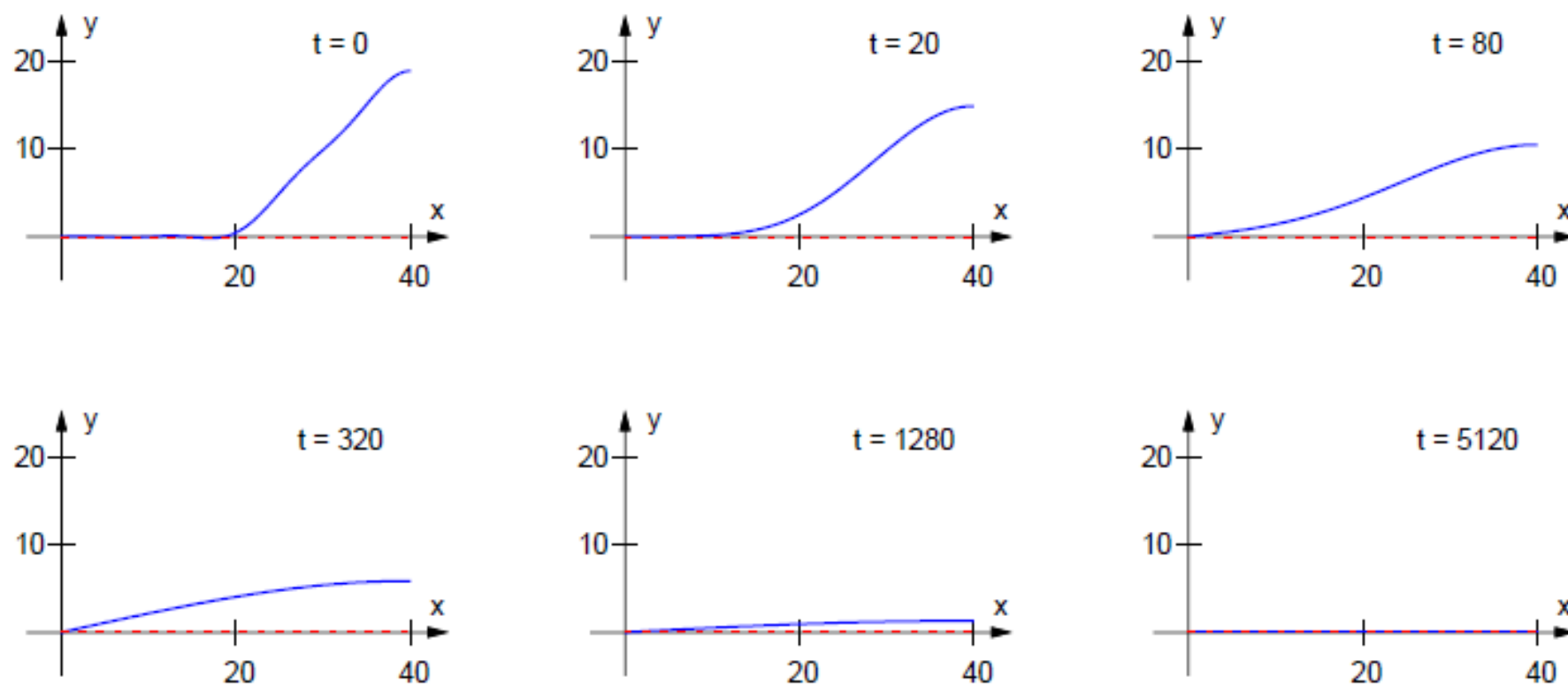


Figura 3.4 – Solução, $u(x, t)$, do PVIF do Exemplo 3.4 tomando apenas 6 termos não nulos da série.

3.3.2 Equação do Calor não Homogênea

Considere o seguinte PVIF

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x) \\ u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L \\ u(0, t) = T_1, \quad u(L, t) = T_2 \end{cases}$$

Vamos mostrar que a solução deste problema é dada por

$$u(x, t) = v(x) + u_0(x, t),$$

em que $v(x)$ é a solução do problema de fronteira

$$\begin{cases} \alpha^2 v'' = -g(x) \\ v(0) = T_1, \quad v(L) = T_2 \end{cases}$$

e $u_0(x, t)$ é a solução do PVIF homogêneo com condições de fronteiras homogêneas

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x) - v(x), \quad 0 < x < L \\ u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0 \end{cases}$$

Calculando as derivadas temos que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u_0}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha^2} g(x)$$

Substituindo-se na equação diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g(x)$$

obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u_0}{\partial t} + g(x) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = g(x)$$

$$u(x, 0) = v(x) + u_0(x, 0) = v(x) + f(x) - v(x) = f(x),$$

$$u(0, t) = v(0) + u_0(0, t) = v(0) = T_1,$$

$$u(L, t) = v(L) + u_0(L, t) = v(L) = T_2.$$

Como mostramos quando estudamos o problema homogêneo com condições de fronteira homogêneas

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_0(x, t) = 0.$$

Logo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = v(x) + \lim_{t \rightarrow \infty} u_0(x, t) = v(x), \quad \text{para } x \in [0, L]$$

ou seja, quando t tende a mais infinito, a solução $u(x, t)$ tende a $v(x)$, chamada solução estacionária ou solução de equilíbrio.

Exemplo 3.5. Vamos considerar uma barra de 40 cm de comprimento, com coeficiente $\alpha = 1$, com as extremidades mantidas a temperaturas de 10°C e 30°C e tal que a temperatura inicial é dada por

$$f(x) = 10 + \text{sen} \frac{\pi x}{80},$$

Vamos resolver o problema de valor inicial e de fronteira

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\pi^2}{640} \text{sen} \frac{\pi x}{80} \\ u(x, 0) = f(x) = 10 + 10 \text{sen} \frac{\pi x}{80}, \quad 0 < x < 40 \\ u(0, t) = 10, \quad u(40, t) = 30 \end{array} \right.$$

A solução é então

$$u(x, t) = v(x) + u_0(x, t),$$

em que $v(x)$ é a solução do problema de fronteira

$$\begin{cases} v'' = -\frac{\pi^2}{640} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{80} \\ v(0) = 10, v(40) = 30 \end{cases}$$

e $u_0(x, t)$ é a solução do PVIF homogêneo com condições de fronteiras homogêneas

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x) - v(x), 0 < x < 40 \\ u(0, t) = 0, u(40, t) = 0 \end{cases}$$

Logo

$$v(x) = 10 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{80} + \frac{x}{4} + 10$$

$$u(x, t) = 10 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{80} + \frac{x}{4} + 10 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{1600} t}$$

em que c_n são os coeficientes da série de senos de

$$f(x) - v(x) = -\frac{x}{4}$$

ou seja,

b_n

$$\begin{aligned} c_n &= 2 \left(-\frac{1}{4} a_n(f_{0,1}^{(1)}) \right) \\ &= -\frac{20}{n^2 \pi^2} (-s \cos s + \operatorname{sen} s) \Big|_0^{n\pi} \\ &= \frac{20}{n\pi} \cos(n\pi) = \frac{20(-1)^n}{n\pi}, \quad n = 1, 2, 3 \dots \end{aligned}$$

Aqui usamos a tabela na página 202, multiplicando por 2 os valores. Portanto a solução é dada por

$$u(x, t) = 10 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{80} + \frac{x}{4} + 10 + \frac{20}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{1600} t}$$

Observe que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = v(x) = 10 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{80} + \frac{x}{4} + 10, \quad \text{para } x \in [0, 40]$$

ou seja, quando t tende a mais infinito a solução tende a solução estacionária

$$v(x) = 10 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{80} + \frac{x}{4} + 10.$$

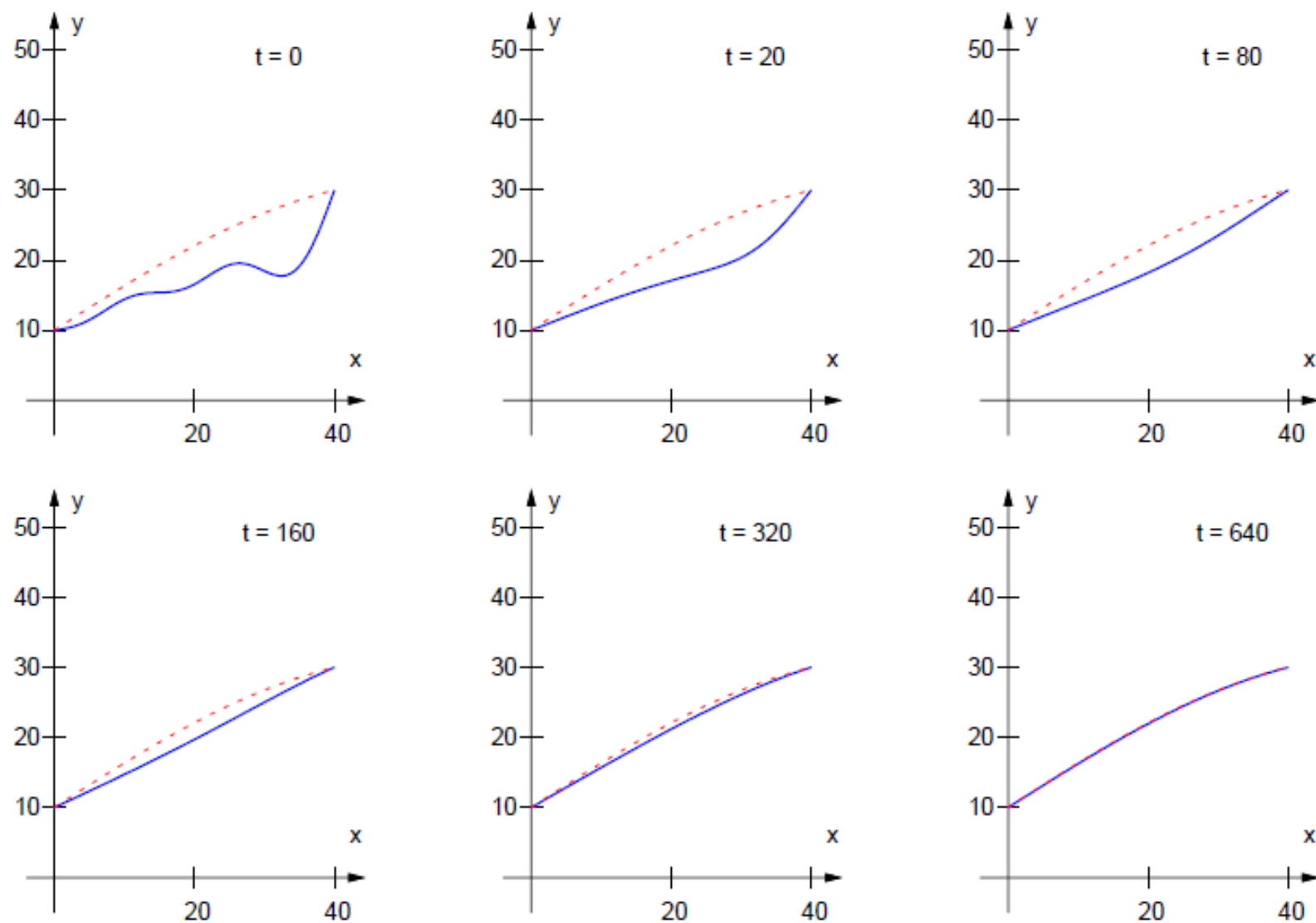


Figura 3.5 – Solução, $u(x, t)$, do PVIF do Exemplo 3.5 tomando apenas 3 termos não nulos da série.



Problema Homogêneo
C.C. de Dirichlet
homogêneas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0$$



Problema Homogêneo
C.C. de Dirichlet
não-homogêneas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L$$

$$u(0, t) = T_1, \quad u(L, t) = T_2$$



Problema Homogêneo
C.C. de Neumann
homogêneas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$$

Problema Homogêneo
C.C. de Mistas



$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L$$

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$$

Problema Não-Homogêneo



$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L$$

$$u(0, t) = T_1, \quad u(L, t) = T_2$$



1ª PROVA – Próxima segunda 16/09/2019

Trazer:

- Tabela de Coeficientes (pg.202 – material UFMG)
- Tabela de relações trigonométricas
- Tabela de integrais
- Resumo da matéria em uma única folha de papel (frente-e-verso)

MAP 2320 – MÉTODOS NUMÉRICOS EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS II

2º Semestre - 2016

Roteiro do curso

- Introdução
- Séries de Fourier
- Método de Diferenças Finitas
- **Equação do calor transiente (parabólica)**
- Equação de Poisson (elíptica)
- Equação da onda (hiperbólica)