PMR3409 – CONTROLE II

EXPERIÊNCIA 2

RESPOSTA TEMPORAL DE SISTEMAS E IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS

1. INTRODUÇÃO

Os objetivos desta experiência são observar a resposta temporal de sistemas no domínio do tempo contínuo e realizar a identificação dos parâmetros de um motor elétrico de corrente contínua.

Deseja-se identificar os parâmetros das funções de transferência entre a tensão de entrada do motor e a velocidade angular e entre a tensão de entrada e a posição angular.

A Seção 2 desta apostila apresenta o motor de corrente contínua utilizado nessa experiência, a Seção 3 apresenta uma breve introdução teórica sobre resposta temporal de sistemas contínuos e a Seção 4 apresenta os fundamentos teóricos sobre identificação de sistemas em tempo contínuo.

2. O MÓDULO DE MOTOR DE CORRENTE CONTÍNUA

2.1. Descrição Geral

O Módulo de Motor de Corrente Contínua MS15, Figura 1, possibilita ao usuário a realização de controle em malha fechada de velocidade ou posição. A velocidade e a direção de rotação do motor podem ser controladas ou por um sinal analógico ou por uma modulação de largura de pulso.

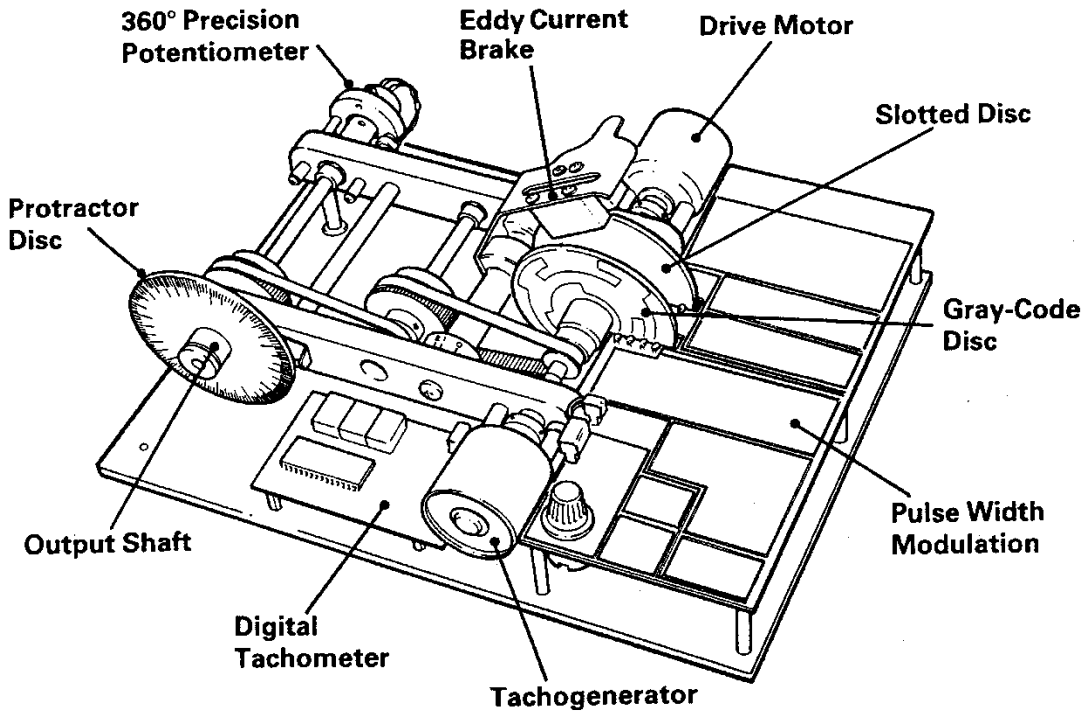

Figura 1. Módulo do motor CC MS15.

As informações de velocidade de rotação e posição para realimentação estão disponíveis tanto na forma analógica quanto na forma digital, portanto o módulo pode ser controlado utilizando um sistema analógico ou digital.

O módulo consiste dos seguintes elementos:

- Motor CC: o motor é capaz de manter rotações de 2.500rpm em ambas as direções. A saída do motor é reduzida através de engrenagens com uma relação 9:1 até o eixo de saída onde existe um disco indicador da posição angular. O módulo possui a possibilidade de ser comandado através de uma entrada analógica, V_{IN}, ou entrada digital p.w.m. P_W;

- Tacogerador: um segundo motor CC impulsionado pelo primeiro motor que fornece uma tensão analógica proporcional à velocidade e direção de rotação. Uma carga variável pode ser aplicada a um motor CC ativando o circuito *Generator Load* (Gerador de Carga). Neste caso a saída do tacogerador, V_{OUT}, não está disponível;
- Potenciômetro: este potenciômetro é impulsionado pelo eixo de saída e fornece um sinal analógico proporcional à posição angular do eixo de saída;
- Disco com Código *Gray*: um disco de Código *Gray* com 4 bits impulsionado pelo motor CC fornece informações da posição angular do eixo de saída;
- *Slotted Disc*: impulsionado diretamente pelo eixo do motor fornece um pulso de saída a cada revolução do eixo de saída;
- Tacômetro digital: um tacômetro digital fornece, num painel de 3 dígitos, a velocidade angular do eixo de saída. A velocidade é derivada da informação fornecida pelo disco com Código de *Gray*;
- Freio Magnético (*eddy current brake*): um freio magnético de duas posições permite a inserção de diferentes carregamentos ao motor.

2.2. Modos de Operação

- Alimentação: Os requisitos de alimentação para o Módulo são os seguintes:
  - +5V em aproximadamente 400mA;
  - +12V em aproximadamente 0.5 a 0.9A (1.5A com o motor travado);
  - +12V em aproximadamente 0.5 a 0.9A (1.5A com o motor travado).

OBS: Deve ser garantido que as fontes de alimentação devem ter um Neutro (0V) comum.

- Chave do Acionamento do Motor:
  - Posição V_{IN}: seleciona a entrada do acionamento analógico V_{IN};
  - Posição PWM: seleciona a entrada do p.w.m. digital P_W.

- Chave do tacogerador:
  - Posição $VOUT$: habilita a saída do tacogerador;
  - Posição $LOAD$: habilita a carga variável a ser aplicada ao motor por meio do circuito Gerador de Carga.
- Controle do Gerador de Carga: utilizado para variar a carga aplicado ao motor CC quando a chave do tacogerador está na posição $LOAD$.
- Entrada para o Acionamento do Motor (V_{IN}): a entrada para o acionamento do motor no intervalo –5V a +5V, o nível de tensão determina a velocidade e a polaridade determina a direção de rotação:
  - +5V - Velocidade máxima, sentido horário;
  - 0V – Estacionário;
  - –5V – Velocidade máxima, sentido anti-horário.
- Habilita a Entrada (E): um sinal 0 habilita a entrada V_{IN} ou PWM, para controlar o motor.
- Entrada PWM (P_W): entrada para o sinal digital com modulação de largura de pulso. Formato: um sinal TTL positivo com duração de 1-2ms é requerido e deve ser repetido a cada 20ms.

Largura de Pulso	**Velocidade e Direção**
1.0ms	Velocidade máxima, sentido anti-horário
1.5ms	Estacionário
2.0ms	Velocidade máxima, sentido horário

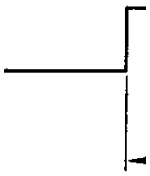

Figura 2. Sinal de entrada PWM.

- Saída do Disco com Código *Gray* (D0 a D3): Fornece um sinal TTL de 4 bits dependente da posição do eixo do motor. Uma redução com um relação de 9:1 fornece uma resolução de 2.5o. Portanto o código se repete a cada 40o de rotação. Com 0o marcado no indicador do

disco a saída do Disco é 0000 e o indicador irá como indicado na tabela abaixo no sentido horário:

Marcador (Graus)	Código *Gray*
0/360	0000
2.5	0001
5.0	0011
7.5	0010
10.0	0110
12.5	0111
15.0	0101
17.5	0100
20.0	1100
22.5	1101
25.0	1111
27.5	1110
30.0	1010
32.5	1011
35.0	1001
37.5	1000
40.0	0000

- Tacogerador: sinal no intervalo de –5V a +5V indicando a velocidade e a direção de rotação como indicado na Tabela abaixo:

Velocidade e Direção	**Tensão de Saída**
Velocidade máxima, sentido anti-horário	+5V aprox..
Estacionário	0V
Velocidade máxima, sentido horário	-5V aprox.

- Saída do Potenciômetro (V_{OUT}): sinal de tensão analógica variando entre –5V a +5V para uma volta completa do eixo de saída. A saída do potenciômetro é mantida artificialmente em 5V por aproximadamente
- *Slotted Disc* (P_0): normalmente em nível lógico ‘1’ com um único pulso t.t.l. de lógica ‘0’ gerado a cada revolução completa do eixo de saída.

2.3. Modelagem do Sistema

O sistema pode ser representado pela Figura 3 abaixo.

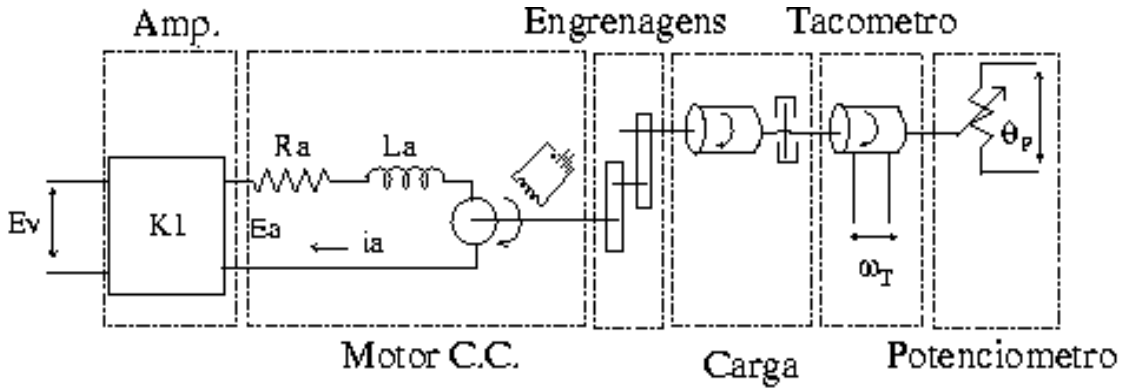

Figura 3. Diagrama esquemático do sistema a ser modelado.

O sistema consiste de um amplificador de tensão, um motor C.C. com um sistema de engrenagens e carga associada, um tacogerador e um potenciômetro. O objetivo da modelagem é estabelecer a função de transferência entre a tensão de entrada $e_V(t)$ e a velocidade angular fornecida pelo tacômetro $\omega_T(t)$, e a função de transferência entre a tensão de entrada $e_V(t)$ e a posição angular fornecida pelo potenciômetro $\theta_P(t)$.

As funções de transferência do amplificador, do tacômetro e do potenciômetro são dadas respectivamente por:

$$G_{AMP}(s) = K_1 \tag{1}$$

$$G_{TAC}(s) = K_T \tag{2}$$

$$G_{POT}(s) = K_P \tag{3}$$

Para um motor de corrente de campo constante, o torque desenvolvido pelo motor é dado por:

$$T = K_2 i_a \tag{4}$$

Em que K_2 é a constante de torque do motor e i_a é a corrente da armadura. Se o sinal de corrente i_a é revertido, o sinal de torque T também será revertido, o que resultará na reversão da direção de rotação do motor.

Quando a armadura está em rotação, uma tensão proporcional ao produto do fluxo pela velocidade angular ω é induzido na armadura. Para um

fluxo constante, a tensão induzida e_b é diretamente proporcional à velocidade angular $d\theta/dt$:

$$e_b = K_3 \frac{d\theta}{dt} = K_3 \omega \tag{5}$$

Em que e_b é a tensão induzida, também chamada de força contra-eletromotriz; K_3 é a constante de força contra-eletromotriz do motor; e θ é o deslocamento angular do eixo de saída do motor.

A velocidade do motor de corrente contínua controlada por armadura é controlada pela tensão de armadura e_a. A equação diferencial do circuito de armadura é dada por:

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + e_b = e_a \tag{6}$$

Em que L_a é a indutância da armadura e R_a é a resistência da armadura.

A equação de equilíbrio de torque no eixo do motor é dada por:

$$J_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} + b_0 \frac{d\theta}{dt} = T = K_2 i_a \tag{7}$$

$$ou\, J_0 \frac{d\omega}{dt} + b_0 \omega = T = K_2 i_a \tag{8}$$

Em que J_0 é a inércia combinada do motor, carga e engrenagens referida ao eixo do motor e b_0 é o atrito viscoso combinado do motor, carga, e engrenagens referida ao eixo do motor.

Utilizando as Equações (1), (2), (5), (6) e (8), pode-se determinar a função de transferência entre a saída proporcional à velocidade angular fornecida pelo tacogerador ω_T e a tensão de entrada e_V:

$$G_\omega(s) = \frac{\Omega_\mathrm{T}(s)}{E_V(s)} = \frac{K_1 K_2 K_T}{(L_a s + R_a)(J_0 s + b_0) + K_2 K_3} \tag{9}$$

Em que $\Omega_T(s) = \mathcal{L}\{\omega_T(t)\}$, $E_V(s) = \mathcal{L}\{e_V(t)\}$ com $\mathcal{L}\{.\}$ a Transformada de Laplace.

Utilizando-se as Equações (1), (3), (5), (6) e (7), pode-se determinar a função de transferência entre a saída proporcional à posição angular fornecida pelo potenciômetro θ_P e a tensão de entrada e_V:

$$G_\theta(s) = \frac{\Theta_P(s)}{E_V(s)} = \frac{K_1 K_2 K_P}{(L_a s + R_a)(J_0 s + b_0) + K_2 K_3} \tag{10}$$

Em que $\Theta_P(s) = \mathcal{L}\{\theta_P(t)\}$.

A Figura 4 apresenta um diagrama de blocos do sistema.

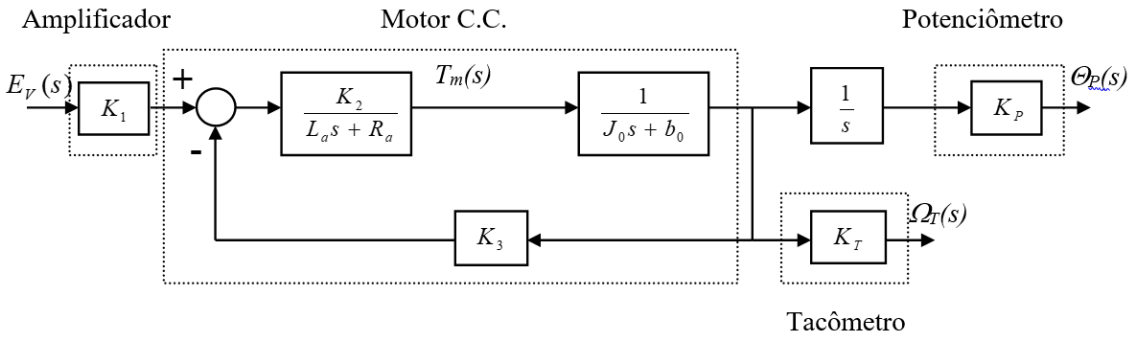

Figura 4. Diagrama de blocos do sistema.

Usualmente, a indutância da armadura L_a é bastante pequena e pode ser desconsiderada, e as funções de transferência $G_\omega(s)$ e $G_\theta(s)$ podem ser representadas da seguinte forma:

$$G_\omega(s) = \frac{\Omega_T(s)}{E_V(s)} = \frac{K_1 K_2 K_T}{R_a(J_0 s + b_0) + K_2 K_3} \tag{11}$$

$$G_\theta(s) = \frac{\Theta_P(s)}{E_V(s)} = \frac{K_1 K_2 K_P}{s[R_a(J_0 s + b_0) + K_2 K_3]} \tag{12}$$

As equações acima podem ser rearranjadas, de forma que, para o motor CC, obtemos as seguintes funções de transferência:

$$G_\omega(s) = \frac{\Omega_T(s)}{E_V(s)} = \frac{K_\omega}{Ts + 1} \tag{13}$$

$$G_\theta(s) = \frac{\Theta_P(s)}{E_V(s)} = \frac{K_\theta}{s(Ts + 1)} \tag{14}$$

$$K_\omega = \frac{K_2 K_T}{R_a b_0 + K_2 K_3}, K_\theta = \frac{K_2 K_P}{R_a b_0 + K_2 K_3}, T = \frac{R_a J_0}{R_a b_0 + K_2 K_3} \tag{15}$$

2.4. Distúrbios de Torque

Usualmente, o sistema sofre a ação de distúrbios de torque. Esses distúrbios de torque, devem ser considerados para o projeto de um sistema de controle eficiente. A representação do distúrbio de torque T_d é feita conforme mostra a Figura 5.

O Módulo de Motor de Corrente Contínua MS15 possui um freio magnético (*eddy current brake*) com duas posições. Este freio magnético provoca um torque oposto ao motor CC proporcional à velocidade angular:

$$T_d = K_d \omega(t) \tag{16}$$

Obviamente, esse distúrbio provoca alterações nos parâmetros do sistema.

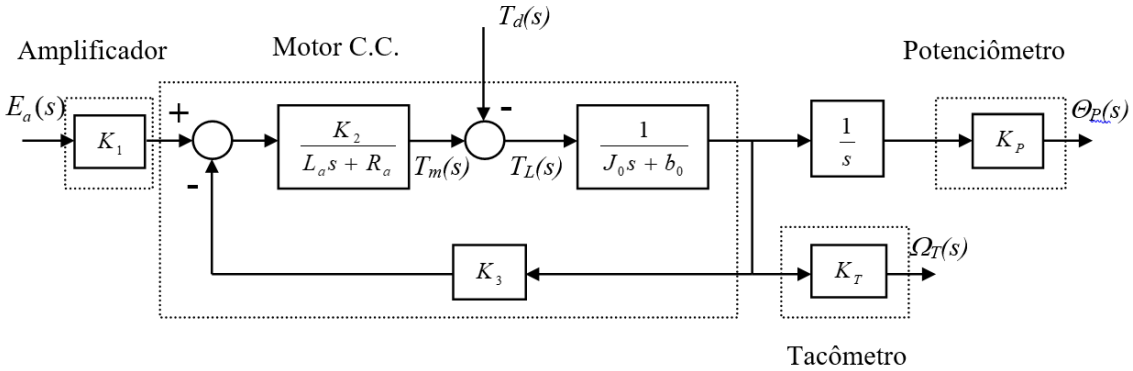

Figura 5. Diagrama de blocos com a representação de distúrbios de torque.

3. RESPOSTA TEMPORAL DE SISTEMAS DE 1ª ORDEM

3.1. Sistemas em Tempo Contínuo

Somente como recordação, um sistema de primeira ordem pode ser descrito pela seguinte função de transferência:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{b}{s-a} \tag{17}$$

Em que $Y(s)$ é a saída do sistema, $U(s)$ é a entrada do sistema, e a e b são coeficientes constantes. O pólo deste sistema está localizado em a no plano s. Para um sistema de 1ª ordem é conveniente definir uma constante de tempo e um ganho. A constante de tempo e o ganho do sistema estão relacionados com os coeficientes a e b, sendo que a constante de tempo é dada por $-1/a$ e o ganho por $-b/a$. É fácil de observar que os coeficientes a e b, ou o ganho e a constante de tempo do sistema bastam para se determinar este sistema de forma única.

Em termos da constante de tempo, T, e ganho, K, a função de transferência do sistema é dada por:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{k}{Ts+1} \tag{18}$$

A equação diferencial equivalente à função de transferência da equação (17) é dada por:

$$\frac{dy(t)}{dt} = ay(t) + bu(t) \tag{19}$$

A resposta temporal desse sistema à uma entrada conhecida $u(t)$, com condição inicial $y_0(t)$, é dada pela seguinte expressão:

$$y(t) = y_0 e^{at} + \int_0^t e^{a\tau} bu(t-\tau)d\tau \tag{20}$$

Nesta expressão, o primeiro termo do lado direito é a resposta do sistema devido à condição inicial diferente de zero (resposta homogênea) e o segundo termo do lado esquerdo é a resposta forçada do sistema, ou seja, devido à entrada.

É conhecido e também fácil de ser observado pela equação (20) que a estabilidade do sistema está relacionada com o coeficiente a, ou seja:

$$\begin{cases} a < 0 & sistema\ estavel \\ a = 0 & sistema\ marginalmente\ estavel \\ a > 0 & sistema\ instavel \end{cases}$$

Se a condição inicial for igual a zero e a entrada for uma degrau unitário, ou seja, $U(s) = 1/s$, a resposta temporal deste sistema será dada por:

$$y(t) = \frac{b}{a}(e^{at} - 1) \tag{21}$$

A Figura 6 apresenta a resposta de um sistema de 1ª ordem à uma entrada na forma de degrau unitário.

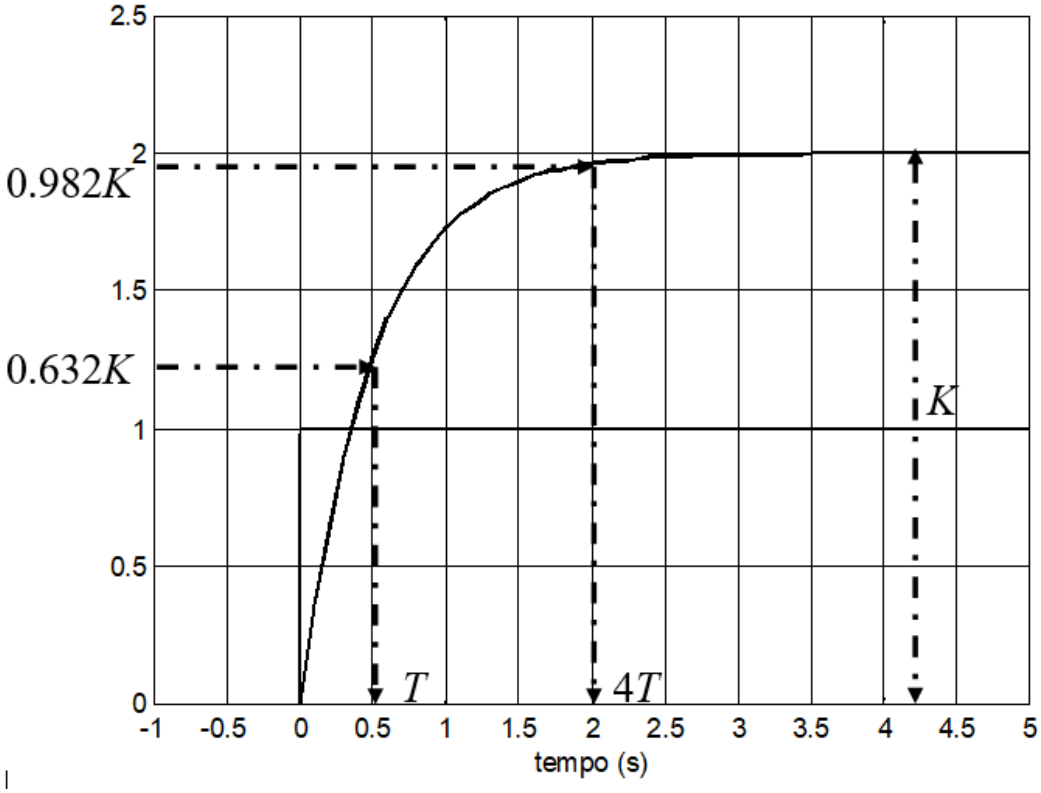

Figura 6. Resposta temporal de um sistema de 1ª ordem devido à uma entrada na forma de degrau.

4. IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS

O processo de identificação de sistemas consiste na abordagem experimental da modelagem de sistemas. O processo de identificação de sistemas incluiu as seguintes etapas:

- Planejamento experimental;
- Seleção da estrutura do modelo;
- Estimativa dos parâmetros;
- Validação.

Nesta experiência você estará identificando o modelo do motor CC descrito na Seção 2 de duas formas diferentes:

1. Utilizando a resposta temporal do sistema em tempo contínuo, a partir do conhecimento do sistema obtido na modelagem do mesmo (Seção 2) é possível calcular as constantes da função de transferência do sistema em tempo contínuo;
2. Utilizando a resposta temporal do sistema amostrado, a partir de uma estrutura do modelo obtida pelo conhecimento do mesmo, ajusta-se um modelo a esta resposta e assim calcula-se os coeficientes da função de transferência em tempo discreto do sistema.

Cada uma destas abordagens tem as suas vantagens e desvantagens. A abordagem em tempo contínuo exige um conhecimento detalhado do sistema e entradas de forma bem específicas. Contudo, os parâmetros identificados têm um significado físico bem definido, permitindo assim uma fácil avaliação do modelo obtido. Além disso, a utilização do modelo pode ser estendida para condições diferentes das utilizadas para a identificação. A abordagem em tempo discreto exige apenas que se conheça a ordem do modelo e tem a grande vantagem de não necessitar de entradas com formas bem definidas. Contudo o significado físico dos parâmetros do modelo obtido é difícil de ser determinado, dificultando, assim, uma avaliação precisa do modelo e exigindo uma validação extensiva do modelo para permitir a sua aplicação em condições diferentes das quais o modelo foi obtido.

4.1. Identificação dos Parâmetros do Motor em Tempo Contínuo

Como visto na Seção 2, a função de transferência entre a tensão de entrada no motor e a velocidade angular do Motor CC pode ser descrita peça seguinte expressão de 1ª ordem:

$$G_\omega(s) = \frac{\Omega_T(s)}{E_V(s)} = \frac{K_\omega}{Ts + 1} \tag{22}$$

Os valores de K_ω e T podem ser obtidos experimentalmente através da análise da resposta a um degrau de amplitude A, cuja Transformada de Laplace é dada por:

$$E_V(s) = \frac{A}{s} \tag{23}$$

$$\Omega_T(s) = \frac{K_\omega}{Ts + 1} \cdot \frac{A}{s} \tag{24}$$

A resposta no tempo para $\omega_T(t)$ é dada por:

$$\omega_T(t) = AK_\omega \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \tag{25}$$

Calculando o valor de $\omega_T(T)$, $\omega_T(2T)$, $\omega_T(3T)$ e $\omega_T(4T)$ obtém-se:

$$\omega_T(T) = 0.632AK_\omega, \omega_T(2T) = 0.865AK_\omega, \omega_T(3T) = 0.950AK_\omega \; e \; \omega_T(4T) = 0.982AK_\omega$$

Com um degrau de amplitude A na entrada do sistema, o valor final da saída é igual ao produto AK_ω. A constante de tempo T pode ser determinada através da relação $\omega_T(T) = 0{,}632AK_\omega$ ou pode-se também determinar o valor de T através do valor de $\omega_T(t)$ calculado para múltiplos de T, como por exemplo: $\omega_T(4T) = 0{,}982AK_\omega$. A Figura 7 ilustra como obter os parâmetros do motor CC.

Como visto na Seção 2, a função de transferência entre a tensão de entrada e a posição angular do motor CC pode ser dada pela seguinte expressão de 2ª ordem:

$$G_\theta(s) = \frac{\Theta(s)}{E_V(s)} = \frac{K_P}{s(Ts+1)} \tag{26}$$

Os valores de K_θ e T podem ser obtidos experimentalmente através da análise da resposta do sistema a um degrau com amplitude A, ou seja:

$$\Theta_P(s) = \frac{K_P}{s(Ts+1)} \cdot \frac{A}{s} \tag{27}$$

A resposta no tempo para $\theta_P(t)$ é dada por:

$$\theta_P(t) = AK_P\left(t - T + Te^{-\frac{t}{T}}\right) \tag{28}$$

Para $t \to +\infty$, ou seja, em regime estacionário, a resposta no tempo pode ser dada por:

$$\theta_P(t) = AK_P(t - T) \tag{29}$$

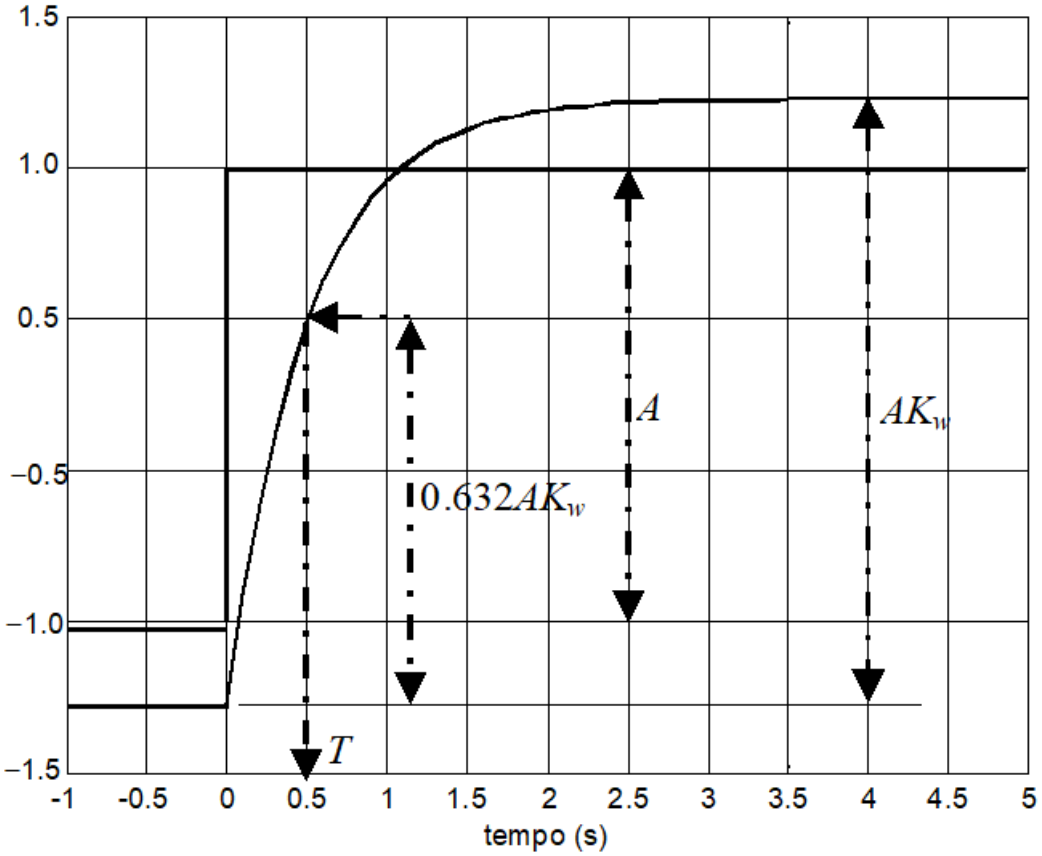

Figura 7. Obtenção dos parâmetros da função de transferência de 1ª ordem do motor CC.

Para se determinar a constante de tempo T, é necessário calcular para o regime estacionário qual a distância no eixo de tempo, para um mesmo valor de ordenada, entre a função $\theta_P(t)$ e uma função do tipo dada por:

$$g(t) = AK_P t \tag{30}$$

Note que a função $g(t)$ e $\theta_P(t)$ são paralelas para $t \to +\infty$, como mostra a Figura 8. Comparando as Equações (29) e (30) nota-se que:

$$\theta_P(t) = g(t - T) \tag{31}$$

Ou seja, para $t \to +\infty$ e para um mesmo valor de ordenada as duas funções estão separadas por um tempo equivalente a T.

Para se determinar o valor de K_P pode-se calcular para um determinado instante de tempo, t, após o transitório atingir o regime estacionário:

$$g(t) - \theta_P(t) = AK_P t - AK_P(t - T) = AK_P T \tag{32}$$

A derivada da curva pode então ser calculada como:

$$\alpha = \frac{AK_P T}{T} = AK_P \tag{33}$$

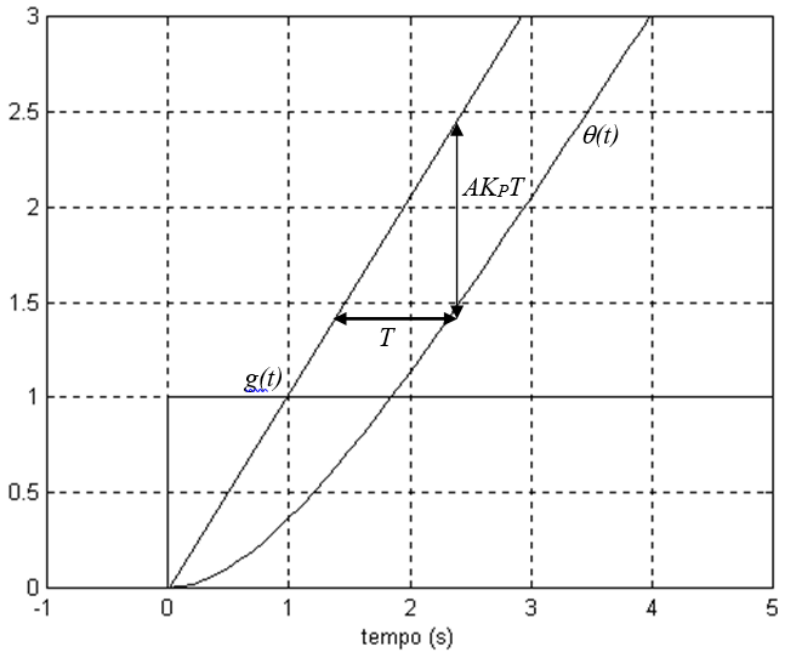

Figura 8. Obtenção dos parâmetros da função de transferência de 2ª ordem do motor CC.

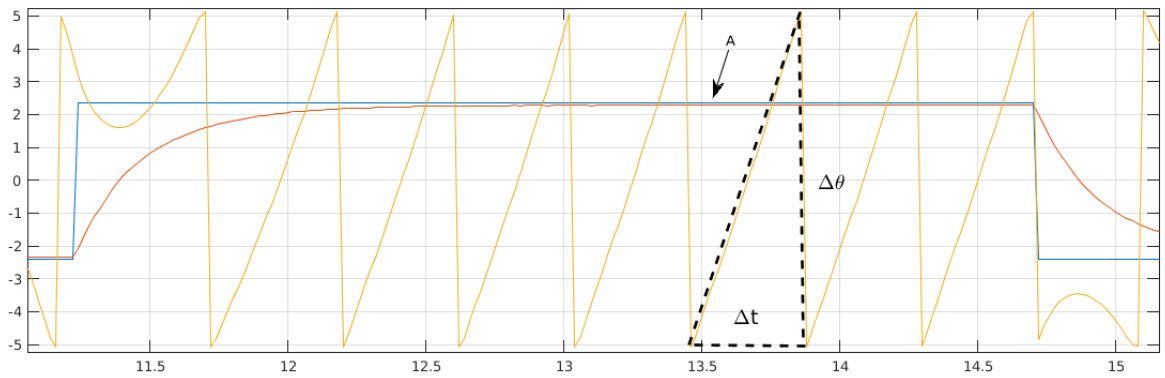

Figura 9: Cálculo da derivada da posição angular $\theta(t)$.

Em regime estacionário a derivada da curva $\theta(t)$ pode ser calculada de maneira trivial (aproveitando os segmentos de reta que entram em saturação) como pode ser observado na figura acima. A constante de posição K_p pode ser calculada da seguinte forma:

$$\alpha = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = AK_p \Rightarrow$$

$$K_p = \frac{\alpha}{A}$$