Segunda Lista de Exercícios - SEL 5739 Sistemas Não Lineares

Prof. Luís Fernando Costa Alberto

9 de Setembro de 2019

EXERCÍCIO 1) Dado um espaço normado X qualquer, mostre que a função norma $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ é contínua. A continuidade é uniforme?

EXERCÍCIO 2) Seja $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função Lipschtziana em $\mathbb{R}^n$. Mostre que $f(x)$ é contínua. Se for contínua, verifique se a continuidade é uniforme. Dê um exemplo de uma função contínua em $\mathbb{R}$ que não é Lipschtziana.

EXERCÍCIO 3) Verifique se as seguintes funções são Lipschtzianas globalmente, localmente ou não são Lipschtzianas. Se forem globalmente, encontre a constante de Lipschtz.

1. $senx$
2. x^2
3. $x^2 - x$
4. $\begin{bmatrix} x_1^2 - x_1x_2 \\ 2x_1 - x_2^2 \end{bmatrix}$
5. e^{-x}

EXERCÍCIO 4) Defina o operador $T : [-1,1] \subset \mathbb{R} \to [-1,1] \subset \mathbb{R}$ como sendo $x \mapsto \rho sen(x)$, onde $0 < \rho < 1$. Verifique numericamente, para $\rho = 0.9$, que a seqüência $x_{j+1} = sen(x_j)$ converge para diferentes valores de x_o. Então mostre que T é uma contração e portanto a seqüência é convergente para qualquer $x_o \in [-1,1]$.

EXERCÍCIO 5) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável e suponha que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f\prime(x)| = \rho < 1.$$

Mostre que f é uma contração em $\mathbb{R}$.

EXERCÍCIO 6) Estude os seguintes P.V.I.'s. Se não houver unicidade, mostre quais condições foram violadas no teorema de existência e unicidade das soluções. Estude o intervalo maximal de existência da solução.

1. $\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = 0 \end{cases}$ onde $f(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x < 0 \\ \sqrt{x} & se \quad x \geq 0 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(0) = x_o \end{cases}$

EXERCÍCIO 7) Seja $f(x) = \frac{x^2-1}{2}$. Mostre que toda solução de $\dot{x} = f(x)$ diferente das soluções $\phi(t) \equiv 1$ e $\Phi(t) \equiv 1$ é da forma $\varphi(t) = \frac{1+c\exp t}{1-c\exp t}$ com $c \neq 0$. Esboce as soluções e encontre o intervalo maximal de definição destas soluções.

EXERCÍCIO 8) Mostre que a mudança de variáveis $y = x^{1-n}$ transforma a equação de Bernoulli

$$\dot{x} = a(t)x + c(t)x^n$$

numa equação linear.

EXERCÍCIO 9) A equação do tipo

$$\dot{x} = r(t)x^2 + a(t)x + b(t)$$

é conhecida como equação de Ricatti. Mostre que se φ_1 é uma solução desta equação, então $\varphi_1 + \varphi_2$ é solução da equação de Ricatti se e só se φ_2 é solução da equação de Bernoulli:

$$\dot{y} = (a(t) + 2r(t)\varphi_1(t))y + r(t)y^2.$$

Encontre as soluções de

$$\dot{x} = \frac{x}{t} + t^3x^2 - t^5$$

sabendo que $\varphi_1(t) = t$ é uma solução desta equação.

EXERCÍCIO 10) Seja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ e suponhamos que $\varphi(t)$ seja solução do P.V.I.:

$$\dot{x} = f(t, x), \qquad x(t_o) = x_o.$$

Seria possível existir $t_1 \neq t_o$ tal que $\varphi(t_1) = \varphi(t_o)$ mas $\dot{\varphi}(t_1) \neq \dot{\varphi}(t_1)$ e linearmente independentes? Esboce esta situação em um retrato de fase em dimensão 2. Avalie a situação no caso em que o sistema seja autônomo, ou seja, $\dot{x} = f(x)$.