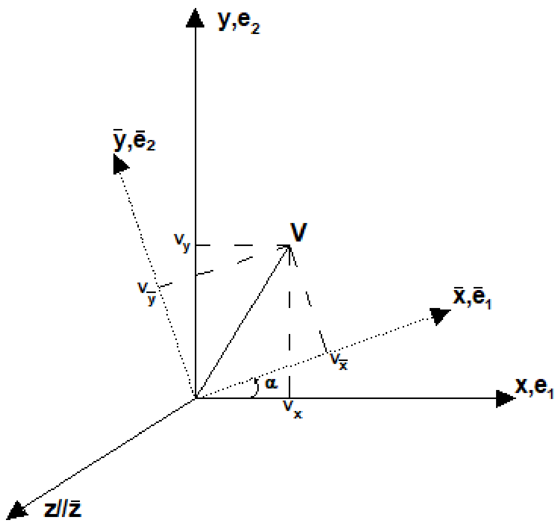
TRANSFORMAÇÕES DE COORDENADAS PARA PÓRTICO PLANO

Seja um vetor V contido no plano *xy*, de versores (e_1, e_2). Defina-se um sistema cartesiano local $(\bar{x}, \bar{y})$, de versores $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$, também contido no plano *xy*, mas rotacionado (sentido positivo dextrorso) de um ângulo α entre o eixo *x* e este novo eixo $\bar{x}$, conforme esquematizado na figura abaixo.



O vetor V pode ser decomposto como:

$$V = V_{\bar{x}} \cdot \bar{e}_1 + V_{\bar{y}} \cdot \bar{e}_2 \qquad (23)$$

E

$$V_x = V_{\bar{x}} \cdot \cos\alpha + (-)V_{\bar{y}} \cdot sen\alpha \qquad V_y = V_{\bar{x}} \cdot sen\alpha + V_{\bar{y}} \cdot \cos\alpha \qquad (24)$$

Assim, a eq. (24) pode ser escrita matricialmente como:

$$\begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} V_{\bar{x}} \\ V_{\bar{y}} \end{Bmatrix} \qquad (25)$$

A matriz que relaciona as componentes no sistema (x, y) e $(\bar{x}, \bar{y})$ é dita matriz de transformação de bases e é também ortogonal. Sabe-se da álgebra que se uma matriz é ortogonal, por exemplo, a matriz $[A]$, é possível demonstrar que:

$$[A]^{-1} = [A]^T \qquad (26)$$

Ou seja, a inversa de uma matriz é sua transposta. Relembrando que uma matriz transposta é definida conforme um exemplo indicado na relação (27):

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad ; \quad [A]^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad (27)$$

Assim, na relação (25), usando a propriedade de ortogonalidade da matriz de transformação, é possível redigi-la da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} V_{\bar{x}} \\ V_{\bar{y}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & sen\alpha \\ -sen\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \end{Bmatrix} \qquad (28)$$

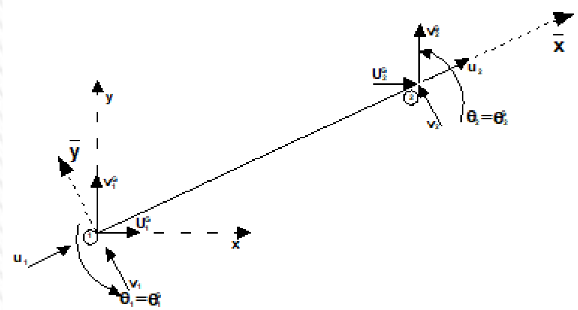
Ou

$$\begin{Bmatrix} V_{\bar{x}} \\ V_{\bar{y}} \end{Bmatrix} = [\hat{R}] \cdot \begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \end{Bmatrix} \qquad (29)$$

Onde $\hat{R}$ é dita matriz de rotação.

Voltando para a barra de pórtico plano genérica "j", pode-se transformar os vetores deslocamentos locais para um sistema global.

$$\begin{Bmatrix} U_1^G \\ V_1^G \\ \theta_1^G \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha & 0 \\ sen\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} \qquad (30)$$



Expandindo para considerar o nó local 2 :

$$\begin{Bmatrix} U_1^G \\ V_1^G \\ \theta_1^G \\ U_2^G \\ V_2^G \\ \theta_2^G \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ sen\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & -sen\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & sen\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \qquad (31)$$

DISCIPLINA

PEF – 3528 – Ferramentas Computacionais na Mecânica das Estruturas Criação e Concepção

Aula 03

Valério S. Almeida - 2018
valerio.almeida@usp.br

TRANSFORMAÇÕES DE COORDENADAS PARA PÓRTICO PLANO

Ou

$$\{U\}^e{}_{6x1} = \begin{bmatrix} [\overline{R}]^T & [0] \\ [0] & [\overline{R}]^T \end{bmatrix} \cdot \{\delta\}_{6x1} \rightarrow \{U\}^e{}_{6x1} = [R]^T \cdot \{\delta\}_{6x1} \qquad (32)$$

De maneira correlata, a mesma transformação é aplicada ao vetor de forças, assim:

$$\{F\}^e{}_{6x1} = [R]^T_{6x6} \cdot \{f\}_{6x1} \qquad (33)$$

Com a matriz de rotação transposta definida como:

$$[R]^T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ sen\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & -sen\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & sen\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad (34)$$

Ou, definida na forma direta:

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & sen\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -sen\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & sen\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -sen\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Onde

$\{U\}^e$: vetor de deslocamentos nodais do elemento, no **sistema global**;

$\{F\}^e$: vetor de forças nodais equivalentes do elemento, **sistema global.**

A equação (22), deve também ser equacionada para o sistema de referência global.

$$[k]_{6X6} \cdot \{\delta\} = \{f\} \qquad (22)$$

Isto é feito, aplicando as propriedades de ortogonalidade da matriz de rotação sobre as relações (32) e (33) em (22), da seguinte maneira:

$$[k]_{6X6} \cdot \{\delta\} = [R] \cdot \{F\}^e \rightarrow [k]_{6X6} \cdot [R] \cdot \{U\}^e = [R] \cdot \{F\}^e \qquad (35)$$

Pré-multiplicando a relação (35) por $[R]^{-1}$:

$$[R]^{-1} \cdot [k]_{6X6} \cdot [R] \cdot \{U\}^e = [R]^{-1} \cdot [R] \cdot \{F\}^e \qquad (36)$$

Lembrando da álgebra que $[A]^{-1} \cdot [A] = [I]$, onde *I* é a matriz identidade e da definição (26), a expressão (36) resulta em:

$$[R]^T \cdot [k]_{6X6} \cdot [R] \cdot \{U\}^e = \{F\}^e \qquad (37)$$

Ou de modo compacto:

$$[K]^e_{6X6} \cdot \{U\}^e = \{F\}^e \qquad (38)$$

TRANSFORMAÇÕES DE COORDENADAS PARA PÓRTICO PLANO

$$[K]^e_{6X6} = [R]^T \cdot [k] \cdot [R] \qquad (39)$$

$[K]^e$: matriz de rigidez do elemento, no **sistema global**;

Resumindo, para cada elemento:

i) Definem-se carga distribuída, área, inércia, módulo de elasticidade e seus nós inicial e final, de modo que seu sistema local já fique determinado;

ii) Calcula seus cossenos diretores (*cos* e *sen*) e comprimento;

iii) Obtém as forças nodais equivalentes no sistema local;

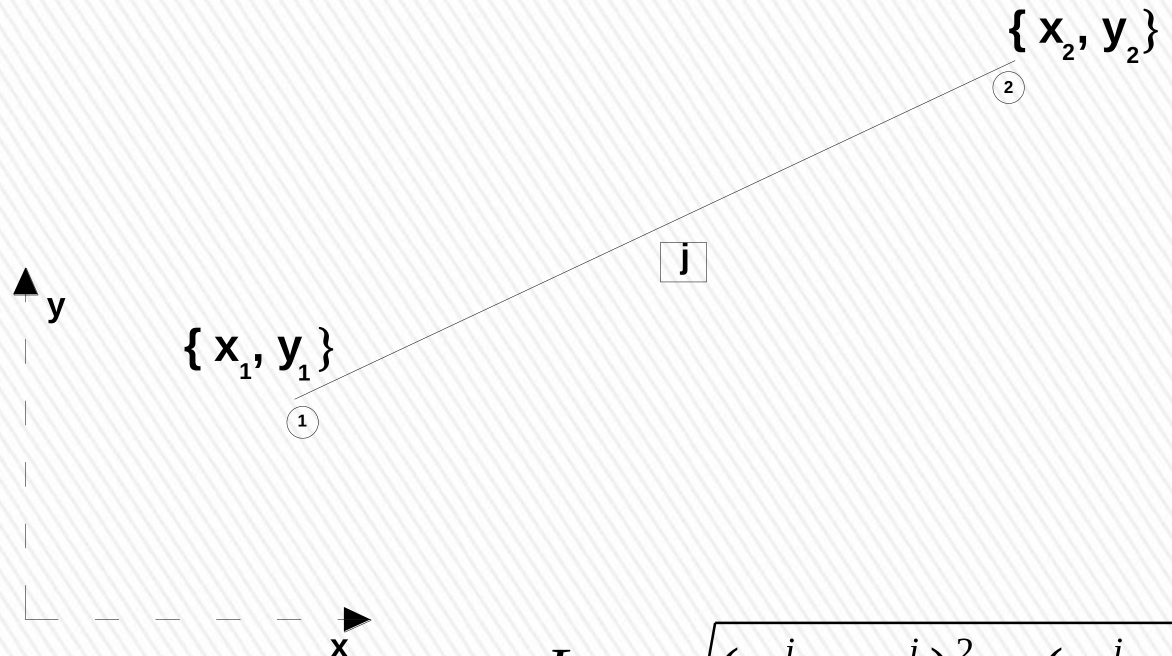
iv) Obtem a matriz de rigidez no sistema local;

v) Obtem a matriz de rotação, relação (34);

vi) Obtém as forças nodais equivalentes no sistema global, eq. (33), usando a relação das forças nodais equivalentes no sistema local;

vii) Obtem a matriz de rigidez no sistema global, eq. (39), usando a matriz de rigidez no sistema local.

Cálculo da matriz de rotação do elemento



$$L_j = \sqrt{(x_2^j - x_1^j)^2 + (y_2^j - y_1^j)^2}$$

$$(\cos\alpha)_j = \frac{x_2^j - x_1^j}{L_j}$$

$$(sen\alpha)_j = \frac{y_2^j - y_1^j}{L_j}$$

Pseudocódigos – Parte 1

Início do Programa Principal

Chamar Rotina Ler coordenadas dos nós (NN,X,Y)

Chamar Rotina Ler dados das barras (NE, SECAO)

Chamar Rotina Ler dados gerais barras (NSEC,NMAT, MATERIAL,SECAO)

Fazer j de 1 até NE

Chamar Rotina Montar Matriz de Rotacao Barra ($X_1^j, Y_1^j, X_2^j, Y_2^j, L_j, R_j$)

Chamar Rotina Montar Matriz de Rigidez Barra ($L_j, E_j, I_j, A_j, \bar{k}$)

Chamar Rotina Transposta Matriz ($Rt_j, R_j, 6, 6$)

Chamar Rotina Multiplica Matriz-Matriz ($A, Rt_j, \bar{k}, 6, 6, 6$)

Chamar Rotina Multiplica Matriz-Matriz ($B, A, R_j, 6, 6, 6$) $[K]^e_{6X6} = [R]^T \cdot [\bar{k}] \cdot [R]$

.....

Fim de Fazer j

Fim do Programa Principal

Pseudocódigos – Parte 1

Início da Rotina *Montar Matriz de Rotacao Barra*($x_1^j, y_1^j, x_2^j, y_2^j, L_j, R_j$)

// calculando características das barras e armazenando nos vetores $\{L\},\{\cos\},\{sen\}$ e

//montar matriz de rotação $R[6,6]$ para cada barra:

// Input:

// x1,y1,x2,y2: coordenadas de inicio e fim da barra

// Output:

// Lj: comprimento da barra

// Rj matriz de rotação da barra

$$L_j \leftarrow \sqrt{(x_2^j - x_1^j)^2 + (y_2^j - y_1^j)^2}$$

$$(\cos)_j \leftarrow (x_2^j - x_1^j)/L_j$$

$$(sen)_j \leftarrow (y_2^j - y_1^j)/L_j$$

$$[R]_j \leftarrow 0$$

$$R(1,1) \leftarrow (\cos)_j$$

$$R(2,2) \leftarrow (\cos)_j$$

$$R(4,4) \leftarrow (\cos)_j$$

$$R(5,5) \leftarrow (\cos)_j$$

$$R(1,2) \leftarrow (sen)_j$$

$$R(2,1) \leftarrow -(sen)_j$$

$$R(4,5) \leftarrow (sen)_j$$

$$R(5,4) \leftarrow -(sen)_j$$

$$R(3,3) \leftarrow 1$$

$$R(6,6) \leftarrow 1$$

Pseudocódigos – Parte 1

Início da Rotina *Montar Matriz de Rigidez Barra(* $L_j, E_j, I_j, A_j, k)$

// Rotina para montar matriz de rigidez da barra
// calculando matriz de rigidez de cada barra e armazenando ela na matriz *k*, onde *k[6,6]*
// Input:
// Lj,Ej, Ij, Aj: comprimento, módulo Young, Inércia e área da barra
// Output:
// k: matriz de rigidez da barra, sistema local

$[k]_j \leftarrow 0$

$k(1,1) = E_j \cdot A_j / L_j$

$k(1,4) = -k(1,1)$

$k(4,1) = k(1,4)$

$k(4,4) = k(1,1)$

$k(2,2) = 12 \cdot E_j \cdot I_j / L_j^3$

$k(2,5) = -k(2,2)$

$k(5,5) = k(2,2)$

$k(5,2) = k(2,5)$

$k(2,3) = 6 \cdot E_j \cdot I_j / L_j^2$

$k(2,6) = k(2,3)$

$k(6,2) = k(2,6)$

$k(5,3) = -k(2,3)$

$k(5,6) = k(5,3)$

$k(3,3) = 4 \cdot E_j \cdot I_j / L_j$

$k(6,6) = k(3,3)$

$k(3,6) = 0{,}5 \cdot k(3,3)$

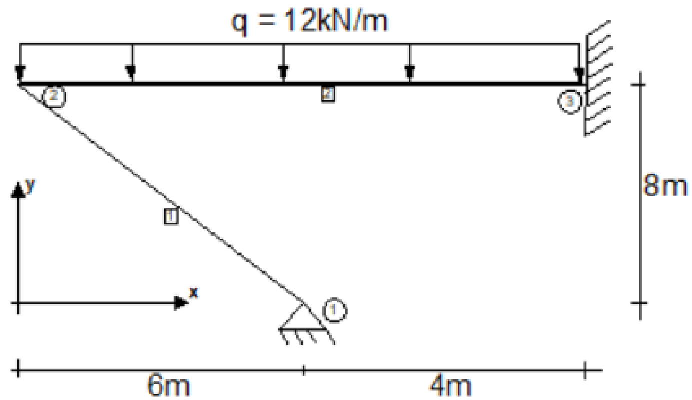
$k(6,3) = k(3,6)$

$k(3,5) = -k(2,3)$

$k(6,5) = k(5,6)$

Fim da Rotina *Montar Matriz de Rigidez Barra*

Exemplo: Para o pórtico do trabalho anterior, obtenha a matriz de rotação e seu comprimento.



Barra 1:

$x_1 = 6\ ,\ y_1 = 0\ ,\ x_2 = 0\ ,\ y_2 = 8$

$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(0-6)^2 + (8-0)^2} = 10m$

$\cos\alpha = \dfrac{x_2 - x_1}{L} = \dfrac{0-6}{10} = -0{,}6$

$sen\alpha = \dfrac{y_2 - y_1}{L} = \dfrac{8-0}{10} = 0{,}8$

$$[R]^1 = \begin{bmatrix} \cos\alpha & sen\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -sen\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & sen\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -sen\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}8 & -0{,}6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}6 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}8 & -0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Barra 2:

$x_1 = 0\ ,\ y_1 = 8\ ,\ x_2 = 10\ ,\ y_2 = 8$

$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(10-0)^2 + (8-8)^2} = 10m$

$\cos\alpha = \dfrac{x_2 - x_1}{L} = \dfrac{10-0}{10} = 1$

$sen\alpha = \dfrac{y_2 - y_1}{L} = \dfrac{8-8}{10} = 0$

$$[R]^2 = \begin{bmatrix} \cos\alpha & sen\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -sen\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & sen\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -sen\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sistema Algébrico do Pórtico Plano

$$[k]_{6X6}\cdot\{\delta\}=\{f\}$$

$$[R]^T\cdot[k]_{6X6}\cdot[R]\cdot\{U\}^e=\{F\}^e$$

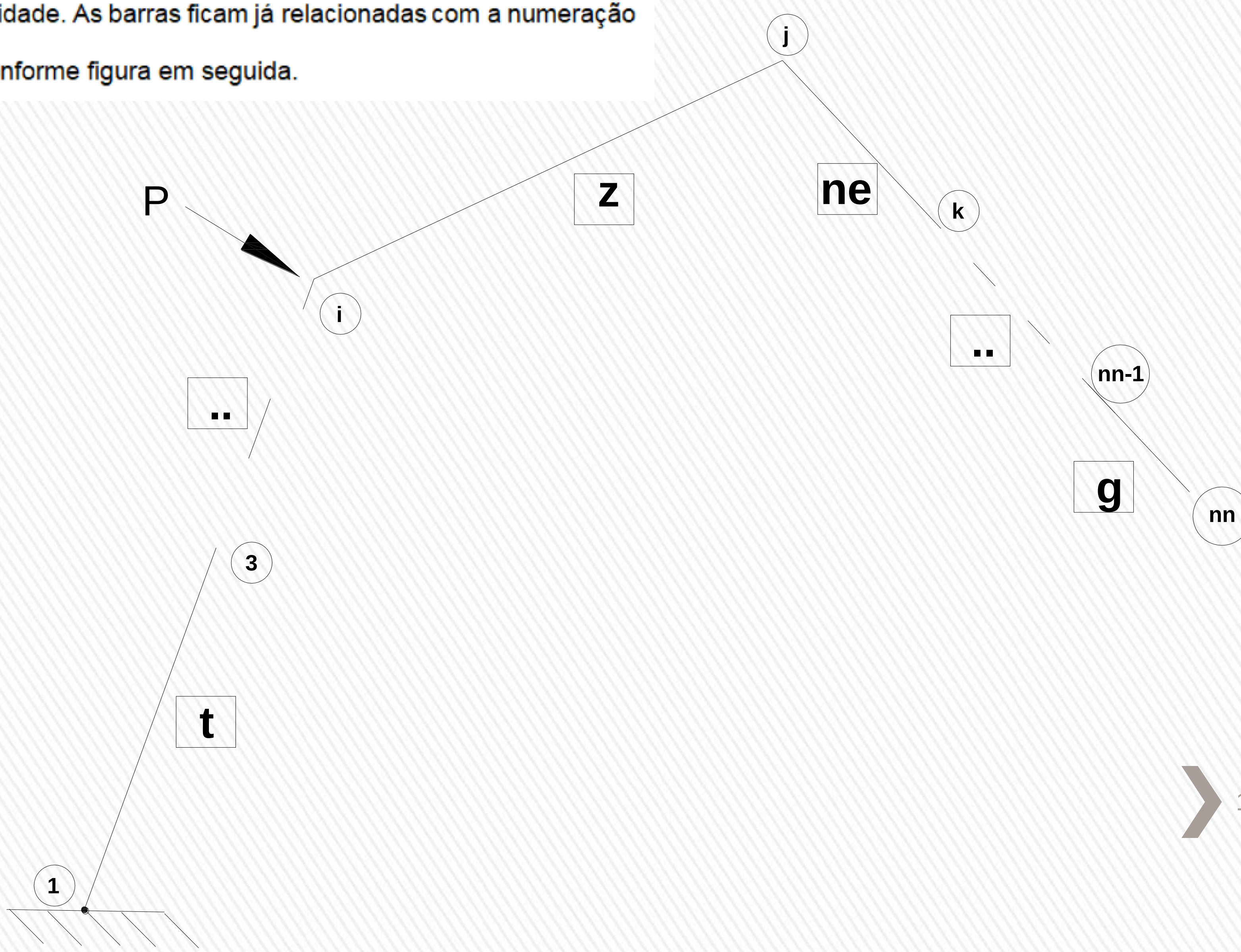
$$[Kest]_{6X6}=[R]^T\cdot[k]_{6X6}\cdot[R]$$

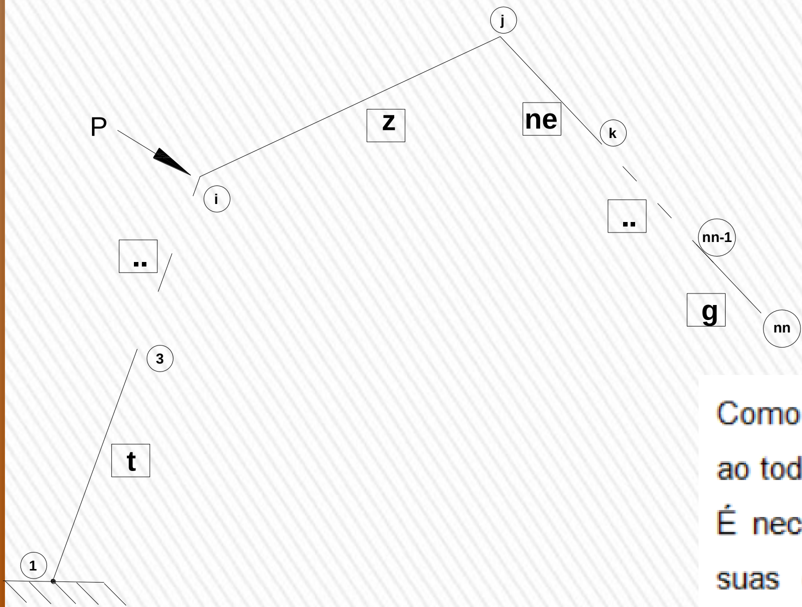
$$\{F\}^e{}_{6x1}=[R]^T_{6x6}\cdot\{f\}_{6x1}$$

$$[k]=\begin{bmatrix}
\frac{E\cdot A}{L} & 0 & 0 & -\frac{E\cdot A}{L} & 0 & 0\\
0 & \frac{12\cdot E\cdot I}{L^3} & \frac{6\cdot E\cdot I}{L^2} & 0 & -\frac{12\cdot E\cdot I}{L^3} & \frac{6\cdot E\cdot I}{L^2}\\
0 & \frac{6\cdot E\cdot I}{L^2} & \frac{4\cdot E\cdot I}{L} & 0 & -\frac{6\cdot E\cdot I}{L^2} & \frac{2\cdot E\cdot I}{L}\\
-\frac{E\cdot A}{L} & 0 & 0 & \frac{E\cdot A}{L} & 0 & 0\\
0 & -\frac{12\cdot E\cdot I}{L^3} & -\frac{6\cdot E\cdot I}{L^2} & 0 & \frac{12\cdot E\cdot I}{L^3} & -\frac{6\cdot E\cdot I}{L^2}\\
0 & \frac{6\cdot E\cdot I}{L^2} & \frac{2\cdot E\cdot I}{L} & 0 & -\frac{6\cdot E\cdot I}{L^2} & \frac{4\cdot E\cdot I}{L}
\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}u_1\\v_1\\\theta_1\\u_2\\v_2\\\theta_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}f_{10}\\f_{20}\\f_{30}\\f_{40}\\f_{50}\\f_{60}\end{Bmatrix}$$

Sistema Algébrico do Pórtico Plano

Agora, note que uma estrutura é composta por nn nós e ne barras de modo que estes nós são numerados com valores naturais a partir da unidade. As barras ficam já relacionadas com a numeração dos nós, conforme figura em seguida.





Como cada nó do pórtico plano possui 3 graus de liberdade associado, então, ao todo se tem ***3nn graus de liberdade***.

É necessário, na geração dos dados do pórtico, indicar o numero total de nós, suas coordenadas em relação a um sistema cartesiano, a quantidade de elementos seu nó inicial e final no sistema global, o que se chama de ***incidência*** ou **conectividade**. Esquematicamente, conforme figura anterior, a incidência de cada barra é descrita como:

Tabela de Incidência

Elemento	***Nó inicial***	***Nó final***
t	*1*	*3*
z	*i*	*j*
g	*nn-1*	*nn*
ne	*j*	*k*

Esta forma de descrever incidência das barras já indica qual é o nó inicial e final local, assim, por exemplo, para o elemento *ne*, seu nó local 1 e 2 são respectivamente os nós globais ***j*** e ***k***.

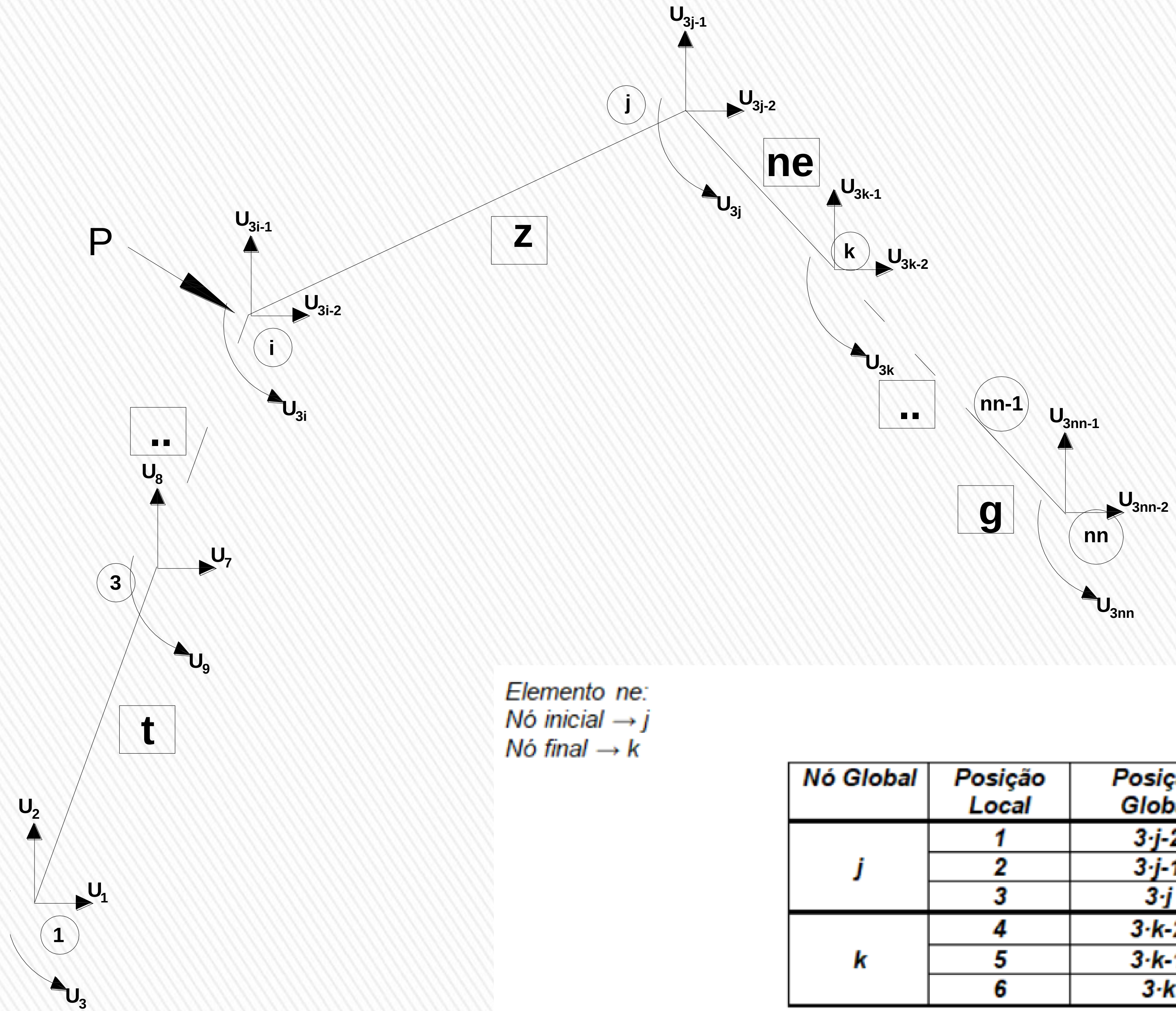
O vetor deslocamento (e de forças) pode ser explicitado da seguinte forma:

$$\{U\}^e = \begin{Bmatrix} U_1^G \\ V_1^G \\ \theta_1^G \\ U_2^G \\ V_2^G \\ \theta_2^G \end{Bmatrix}^e = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix}^e \tag{40}$$

Note que na eq. (40), as três primeiras linhas se referem aos deslocamentos do nó inicial e os três últimos ao nó final. Desta forma, pode-se gerar uma **lei de endereçamento** entre os nós locais e globais, conforme tabela de Incidência, da seguinte maneira:

Elemento ne:
Nó inicial → j
Nó final → k

Nó Global	***Posição Local***	***Posição Global***
j	***1***	***3·j-2***
	2	***3·j-1***
	3	***3·j***
k	***4***	***3·k-2***
	5	***3·k-1***
	6	***3·k***



Elemento ne:
Nó inicial → j
Nó final → k

Nó Global	Posição Local	Posição Global
j	1	3·j-2
	2	3·j-1
	3	3·j
k	4	3·k-2
	5	3·k-1
	6	3·k

Desta forma, escrevendo o sistema algébrico de todas as barras, levando em conta todos os deslocamentos de todas as barras, em termos de posicionamento global, chega-se a um sistema linear da estrutura do tipo:

$$[Kest]_{3 \cdot nn \times 3 \cdot nn} \cdot \{Uest\}_{3 \cdot nn} = \{Fest\}_{3 \cdot nn} \qquad (41)$$

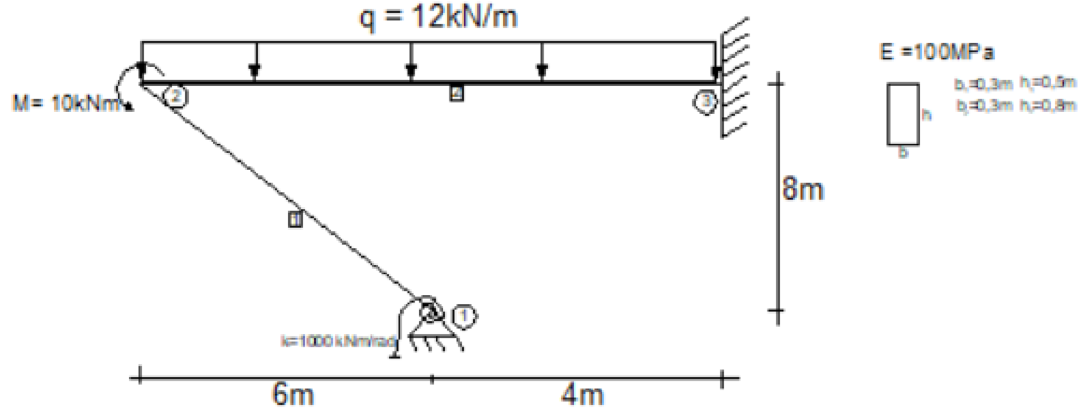
Onde:

$[Kest]_{3 \cdot nn \times 3 \cdot nn}$: matriz de rigidez da estrutura, formada pela influência de cada barra;

$[Uest]_{3 \cdot nn}$: vetor deslocamento de toda a estrutura, coordenadas globais;

$[Fest]_{3 \cdot nn}$: vetor de forças de toda a estrutura, coordenadas globais;

Exemplo: Para o pórtico a seguir, obtenha o sistema linear de toda a estrutura.



Nós da estrutura "1" , "2" e "3" → NN = 3

No. Total de graus de liberdade → NGDL = 3* NN = 9

Barra 1:

Nó inicial = 1 Nó final = 2

Barra 2:

Nó inicial = 2 Nó final = 3

$$[K^G]^1 = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{ccc|ccc} k^1_{11} & k^1_{12} & k^1_{13} & k^1_{14} & k^1_{15} & k^1_{16} \\ k^1_{21} & k^1_{22} & k^1_{23} & k^1_{24} & k^1_{25} & k^1_{26} \\ k^1_{31} & k^1_{32} & k^1_{33} & k^1_{34} & k^1_{35} & k^1_{36} \\ \hline k^1_{41} & k^1_{42} & k^1_{43} & k^1_{44} & k^1_{45} & k^1_{46} \\ k^1_{51} & k^1_{52} & k^1_{53} & k^1_{54} & k^1_{55} & k^1_{56} \\ k^1_{61} & k^1_{62} & k^1_{63} & k^1_{64} & k^1_{65} & k^1_{66} \end{array}\right] & \begin{array}{c} 1 \\ \\ 2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} 1 \qquad\qquad & \qquad\qquad 2 \end{array} & \end{array}$$

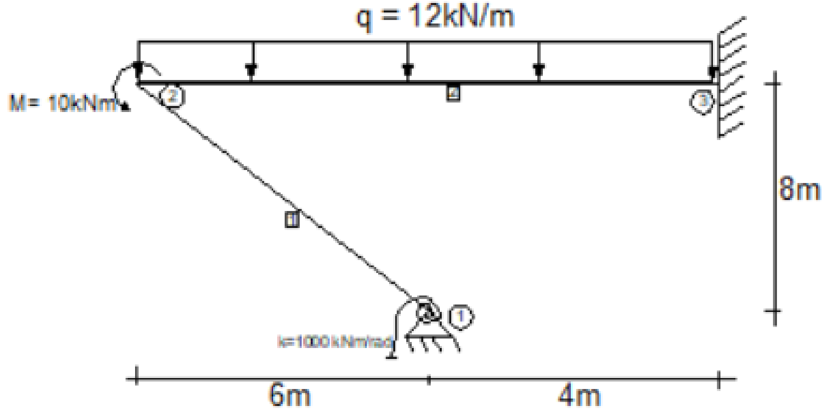
$$[K^G]^2 = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{ccc|ccc} k^2_{11} & k^2_{12} & k^2_{13} & k^2_{14} & k^2_{15} & k^2_{16} \\ k^2_{21} & k^2_{22} & k^2_{23} & k^2_{24} & k^2_{25} & k^2_{26} \\ k^2_{31} & k^2_{32} & k^2_{33} & k^2_{34} & k^2_{35} & k^2_{36} \\ \hline k^2_{41} & k^2_{42} & k^2_{43} & k^2_{44} & k^2_{45} & k^2_{46} \\ k^2_{51} & k^2_{52} & k^2_{53} & k^2_{54} & k^2_{55} & k^2_{56} \\ k^2_{61} & k^2_{62} & k^2_{63} & k^2_{64} & k^2_{65} & k^2_{66} \end{array}\right] & \begin{array}{c} 2 \\ \\ 3 \end{array} \\ \begin{array}{cc} 2 \qquad\qquad & \qquad\qquad 3 \end{array} & \end{array}$$

$$
\left[K^e\right]^1 = \begin{array}{c c}
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
k^1_{11} & k^1_{12} & k^1_{13} & k^1_{14} & k^1_{15} & k^1_{16} \\
k^1_{21} & k^1_{22} & k^1_{23} & k^1_{24} & k^1_{25} & k^1_{26} \\
k^1_{31} & k^1_{32} & k^1_{33} & k^1_{34} & k^1_{35} & k^1_{36} \\
\hline
k^1_{41} & k^1_{42} & k^1_{43} & k^1_{44} & k^1_{45} & k^1_{46} \\
k^1_{51} & k^1_{52} & k^1_{53} & k^1_{54} & k^1_{55} & k^1_{56} \\
k^1_{61} & k^1_{62} & k^1_{63} & k^1_{64} & k^1_{65} & k^1_{66}
\end{array}\right] & \begin{array}{c} 1 \\ \\ \\ 2 \end{array} \\
\begin{array}{cc} 1 \qquad\qquad & \qquad\qquad 2 \end{array} &
\end{array}
\qquad
\left[K^e\right]^2 = \begin{array}{c c}
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
k^2_{11} & k^2_{12} & k^2_{13} & k^2_{14} & k^2_{15} & k^2_{16} \\
k^2_{21} & k^2_{22} & k^2_{23} & k^2_{24} & k^2_{25} & k^2_{26} \\
k^2_{31} & k^2_{32} & k^2_{33} & k^2_{34} & k^2_{35} & k^2_{36} \\
\hline
k^2_{41} & k^2_{42} & k^2_{43} & k^2_{44} & k^2_{45} & k^2_{46} \\
k^2_{51} & k^2_{52} & k^2_{53} & k^2_{54} & k^2_{55} & k^2_{56} \\
k^2_{61} & k^2_{62} & k^2_{63} & k^2_{64} & k^2_{65} & k^2_{66}
\end{array}\right] & \begin{array}{c} 2 \\ \\ \\ 3 \end{array} \\
\begin{array}{cc} 2 \qquad\qquad & \qquad\qquad 3 \end{array} &
\end{array}
$$

$$
\left[Kest\right] = \begin{bmatrix}
k^1_{11} & k^1_{12} & k^1_{13} & k^1_{14} & k^1_{15} & k^1_{16} & 0 & 0 & 0 \\
k^1_{21} & k^1_{22} & k^1_{23} & k^1_{24} & k^1_{25} & k^1_{26} & 0 & 0 & 0 \\
k^1_{31} & k^1_{32} & k^1_{33} & k^1_{34} & k^1_{35} & k^1_{36} & 0 & 0 & 0 \\
k^1_{41} & k^1_{42} & k^1_{43} & (k^1_{44}+k^2_{11}) & (k^1_{45}+k^2_{12}) & (k^1_{46}+k^2_{13}) & k^2_{14} & k^2_{15} & k^2_{16} \\
k^1_{51} & k^1_{52} & k^1_{53} & (k^1_{54}+k^2_{21}) & (k^1_{55}+k^2_{22}) & (k^1_{56}+k^2_{23}) & k^2_{24} & k^2_{25} & k^2_{26} \\
k^1_{61} & k^1_{62} & k^1_{63} & (k^1_{64}+k^2_{31}) & (k^1_{65}+k^2_{32}) & (k^1_{66}+k^2_{33}) & k^2_{34} & k^2_{35} & k^2_{36} \\
0 & 0 & 0 & k^2_{41} & k^2_{42} & k^2_{43} & k^2_{44} & k^2_{45} & k^2_{46} \\
0 & 0 & 0 & k^2_{51} & k^2_{52} & k^2_{53} & k^2_{54} & k^2_{55} & k^2_{56} \\
0 & 0 & 0 & k^2_{61} & k^2_{62} & k^2_{63} & k^2_{64} & k^2_{65} & k^2_{66}
\end{bmatrix}
$$

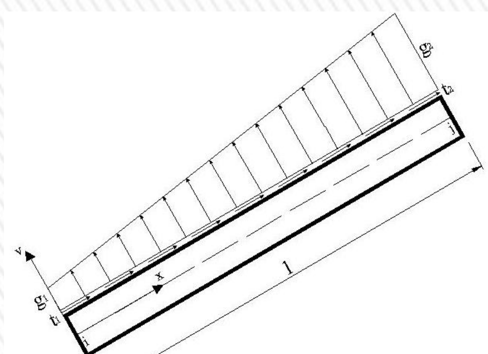
$$
[Kest]=\begin{bmatrix}
k^1_{11} & k^1_{12} & k^1_{13} & k^1_{14} & k^1_{15} & k^1_{16} & 0 & 0 & 0 \\
k^1_{21} & k^1_{22} & k^1_{23} & k^1_{24} & k^1_{25} & k^1_{26} & 0 & 0 & 0 \\
k^1_{31} & k^1_{32} & k^1_{33} & k^1_{34} & k^1_{35} & k^1_{36} & 0 & 0 & 0 \\
k^1_{41} & k^1_{42} & k^1_{43} & (k^1_{44}+k^2_{11}) & (k^1_{45}+k^2_{12}) & (k^1_{46}+k^2_{13}) & k^2_{14} & k^2_{15} & k^2_{16} \\
k^1_{51} & k^1_{52} & k^1_{53} & (k^1_{54}+k^2_{21}) & (k^1_{55}+k^2_{22}) & (k^1_{56}+k^2_{23}) & k^2_{24} & k^2_{25} & k^2_{26} \\
k^1_{61} & k^1_{62} & k^1_{63} & (k^1_{64}+k^2_{31}) & (k^1_{65}+k^2_{32}) & (k^1_{66}+k^2_{33}) & k^2_{34} & k^2_{35} & k^2_{36} \\
0 & 0 & 0 & k^2_{41} & k^2_{42} & k^2_{43} & k^2_{44} & k^2_{45} & k^2_{46} \\
0 & 0 & 0 & k^2_{51} & k^2_{52} & k^2_{53} & k^2_{54} & k^2_{55} & k^2_{56} \\
0 & 0 & 0 & k^2_{61} & k^2_{62} & k^2_{63} & k^2_{64} & k^2_{65} & k^2_{66}
\end{bmatrix}
$$

$$
[Kest]=\begin{array}{c c}
\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
k^1_{11} & k^1_{12} & k^1_{13} & k^1_{14} & k^1_{15} & k^1_{16} & 0 & 0 & 0 \\
k^1_{21} & k^1_{22} & k^1_{23} & k^1_{24} & k^1_{25} & k^1_{26} & 0 & 0 & 0 \\
k^1_{31} & k^1_{32} & k^1_{33} & k^1_{34} & k^1_{35} & k^1_{36} & 0 & 0 & 0 \\
\hline
k^1_{41} & k^1_{42} & k^1_{43} & (k^1_{44}+k^2_{11}) & (k^1_{45}+k^2_{12}) & (k^1_{46}+k^2_{13}) & k^2_{14} & k^2_{15} & k^2_{16} \\
k^1_{51} & k^1_{52} & k^1_{53} & (k^1_{54}+k^2_{21}) & (k^1_{55}+k^2_{22}) & (k^1_{56}+k^2_{23}) & k^2_{24} & k^2_{25} & k^2_{26} \\
k^1_{61} & k^1_{62} & k^1_{63} & (k^1_{64}+k^2_{31}) & (k^1_{65}+k^2_{32}) & (k^1_{66}+k^2_{33}) & k^2_{34} & k^2_{35} & k^2_{36} \\
\hline
0 & 0 & 0 & k^2_{41} & k^2_{42} & k^2_{43} & k^2_{44} & k^2_{45} & k^2_{46} \\
0 & 0 & 0 & k^2_{51} & k^2_{52} & k^2_{53} & k^2_{54} & k^2_{55} & k^2_{56} \\
0 & 0 & 0 & k^2_{61} & k^2_{62} & k^2_{63} & k^2_{64} & k^2_{65} & k^2_{66}
\end{array}\right] &
\begin{array}{c} \\ 1 \\ \\ \\ 2 \\ \\ \\ 3 \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{ccc} \quad 1 \quad & \qquad\qquad 2 \qquad\qquad & \quad 3 \quad \end{array} &
\end{array}
$$



$$\{F\}^e_{6x1} = [R]^T_{6x6} \cdot \{f_p\}_{6x1}$$

$$\{f_p\} = \begin{Bmatrix} \left(\frac{1}{3}.t_1 + \frac{1}{6}.t_2\right).\ell \\ \left(\frac{7}{20}.g_1 + \frac{3}{20}.g_2\right).\ell \\ \left(\frac{1}{20}.g_1 + \frac{1}{30}.g_2\right).\ell^2 \\ \left(\frac{1}{6}.t_1 + \frac{1}{3}.t_2\right).\ell \\ \left(\frac{3}{20}.g_1 + \frac{7}{20}.g_2\right).\ell \\ \left(-\frac{1}{30}.g_1 - \frac{1}{20}.g_2\right).\ell^2 \end{Bmatrix}$$



Barra 1: $\{F_p\}^1 = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T$

Barra 2: $\{F_p\}^2 = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -60 \quad -100 \quad 0 \quad -60 \quad 100\}^T$

$$\{F_{nodal}\} = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 10 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}$$

$$\{Fest\} = \begin{Bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \\ F_3^1 \\ F_4^1 + F_1^2 \\ F_5^1 + F_2^2 \\ F_6^1 + F_3^2 \\ F_4^2 \\ F_5^2 \\ F_6^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0+0 \\ 0-60 \\ 10-100 \\ 0 \\ -60 \\ 100 \end{Bmatrix}$$

Para procurar entender melhor o endereçamento dos termos das matrizes e vetores de cada barra desse exemplo, veja a seguinte consideração.

Barra 1: o valores dos vetor de forças nodais entraram nas linhas 1,2,3,4,5 e 6 (nós 1 e 2)

Barra 2: o valores dos vetor de forças nodais entraram nas linhas 4,5, 6,7,8 e 9 (nós 2 e 3)

Barra 1:

nó 1 (i)→ referente as linhas (3*i-2), (3*i-1) e (3*i) →(1,2,3)

nó 2 (i)→ referente as linhas (3*i-2), (3*i-1) e (3*i) →(4,5,6)

Barra 2:

nó 2 (i)→ referente as linhas (3*i-2), (3*i-1) e (3*i) →(4,5,6)

nó 3 (i)→ referente as linhas (3*i-2), (3*i-1) e (3*i) →(7,8,9)

Assim, para a barra genérica "k" com nó inicial i e final j, o vetor de forças nodais equivalentes dessa barra f_6 depois de rotacionado para as coordenas globais, fica endereça no vetor global da estrutura com a seguinte regra:

$$Fest(3 \cdot i - 2) = Fest(3 \cdot i - 2) + f^k(1)$$

$$Fest(3 \cdot i - 1) = Fest(3 \cdot i - 1) + f^k(2)$$

$$Fest(3 \cdot i) = Fest(3 \cdot i) + f^k(3)$$

$$Fest(3 \cdot j - 2) = Fest(3 \cdot j - 2) + f^k(4)$$

$$Fest(3 \cdot j - 1) = Fest(3 \cdot j - 1) + f^k(5)$$

$$Fest(3 \cdot j) = Fest(3 \cdot j) + f^k(6)$$

Para o **endereçamento da matriz do elemento** – já no sistema global – para a matriz da estrutura, a regra é a mesma, entretanto, endereçada com dois índices, linha e coluna, ficando:

$$Kest(3\cdot i-2,\ 3\cdot i-2)=Kest(3\cdot i-2,\ 3\cdot i-2)+k^k(1,\ 1)$$
$$Kest(3\cdot i-2,\ 3\cdot i-1)=Kest(3\cdot i-2,\ 3\cdot i-1)+k^k(1,\ 2)$$
$$Kest(3\cdot i-2,\ 3\cdot i)=Kest(3\cdot i-2,\ 3\cdot i)+k^k(1,\ 3)$$

$$Kest(3\cdot i-2,\ 3\cdot j-2)=Kest(3\cdot i-2,\ 3\cdot j-2)+k^k(1,\ 4)$$
$$Kest(3\cdot i-2,\ 3\cdot j-1)=Kest(3\cdot i-2,\ 3\cdot j-1)+k^k(1,\ 5)$$
$$Kest(3\cdot i-2,\ 3\cdot j)=Kest(3\cdot i-2,\ 3\cdot j)+k^k(1,\ 6)$$

$$Kest(3\cdot i-1,\ 3\cdot i-2)=Kest(3\cdot i-1,\ 3\cdot i-2)+k^k(2,\ 1)$$
$$Kest(3\cdot i-1,\ 3\cdot i-1)=Kest(3\cdot i-1,\ 3\cdot i-1)+k^k(2,\ 2)$$
$$Kest(3\cdot i-1,\ 3\cdot i)=Kest(3\cdot i-1,\ 3\cdot i)+k^k(2,\ 3)$$

$$Kest(3\cdot i-1,\ 3\cdot j-2)=Kest(3\cdot i-1,\ 3\cdot j-2)+k^k(2,\ 4)$$
$$Kest(3\cdot i-1,\ 3\cdot j-1)=Kest(3\cdot i-1,\ 3\cdot j-1)+k^k(2,\ 5)$$
$$Kest(3\cdot i-1,\ 3\cdot j)=Kest(3\cdot i-1,\ 3\cdot j)+k^k(2,\ 6)$$

$$Kest(3\cdot i,\ 3\cdot i-2)=Kest(3\cdot i,\ 3\cdot i-2)+k^k(3,\ 1)$$
$$Kest(3\cdot i,\ 3\cdot i-1)=Kest(3\cdot i,\ 3\cdot i-1)+k^k(3,\ 2)$$
$$Kest(3\cdot i,\ 3\cdot i)=Kest(3\cdot i,\ 3\cdot i)+k^k(3,\ 3)$$

$$Kest(3\cdot i-1,\ 3\cdot j-2)=Kest(3\cdot i-1,\ 3\cdot j-2)+k^k(2,\ 4)$$
$$Kest(3\cdot i-1,\ 3\cdot j-1)=Kest(3\cdot i-1,\ 3\cdot j-1)+k^k(2,\ 5)$$
$$Kest(3\cdot i-1,\ 3\cdot j)=Kest(3\cdot i-1,\ 3\cdot j)+k^k(2,\ 6)$$

$$Kest(3\cdot i,\ 3\cdot i-2)=Kest(3\cdot i,\ 3\cdot i-2)+k^k(3,\ 1)$$
$$Kest(3\cdot i,\ 3\cdot i-1)=Kest(3\cdot i,\ 3\cdot i-1)+k^k(3,\ 2)$$
$$Kest(3\cdot i,\ 3\cdot i)=Kest(3\cdot i,\ 3\cdot i)+k^k(3,\ 3)$$

$$Kest(3\cdot i,\ 3\cdot j-2)=Kest(3\cdot i,\ 3\cdot j-2)+k^k(3,\ 4)$$
$$Kest(3\cdot i,\ 3\cdot j-1)=Kest(3\cdot i,\ 3\cdot j-1)+k^k(3,\ 5)$$
$$Kest(3\cdot i,\ 3\cdot j)=Kest(3\cdot i,\ 3\cdot j)+k^k(3,\ 6)$$

$$Kest(3\cdot j-2,\ 3\cdot i-2)=Kest(3\cdot j-2,\ 3\cdot i-2)+k^k(4,\ 1)$$
$$Kest(3\cdot j-2,\ 3\cdot i-1)=Kest(3\cdot j-2,\ 3\cdot i-1)+k^k(4,\ 2)$$
$$Kest(3\cdot j-2,\ 3\cdot i)=Kest(3\cdot j-2,\ 3\cdot i)+k^k(4,\ 3)$$

$$Kest(3\cdot j-2,\ 3\cdot j-2)=Kest(3\cdot j-2,\ 3\cdot j-2)+k^k(4,\ 4)$$
$$Kest(3\cdot j-2,\ 3\cdot j-1)=Kest(3\cdot j-2,\ 3\cdot j-1)+k^k(4,\ 5)$$
$$Kest(3\cdot j-2,\ 3\cdot j)=Kest(3\cdot j-2,\ 3\cdot j)+k^k(4,\ 6)$$

$$Kest(3\cdot j-1,\ 3\cdot i-2)=Kest(3\cdot j-1,\ 3\cdot i-2)+k^k(5,\ 1)$$
$$Kest(3\cdot j-1,\ 3\cdot i-1)=Kest(3\cdot j-1,\ 3\cdot i-1)+k^k(5,\ 2)$$
$$Kest(3\cdot j-1,\ 3\cdot i)=Kest(3\cdot j-1,\ 3\cdot i)+k^k(5,\ 3)$$

$$Kest(3\cdot j-1,\ 3\cdot j-2)=Kest(3\cdot j-1,\ 3\cdot j-2)+k^k(5,\ 2)$$
$$Kest(3\cdot j-1,\ 3\cdot j-1)=Kest(3\cdot j-1,\ 3\cdot j-1)+k^k(5,\ 5)$$
$$Kest(3\cdot j-1,\ 3\cdot j)=Kest(3\cdot j-1,\ 3\cdot j)+k^k(5,\ 6)$$

$$Kest(3\cdot j,\ 3\cdot i-2)=Kest(3\cdot j,\ 3\cdot i-2)+k^k(6,\ 1)$$
$$Kest(3\cdot j,\ 3\cdot i-1)=Kest(3\cdot j,\ 3\cdot i-1)+k^k(6,\ 2)$$
$$Kest(3\cdot j,\ 3\cdot i)=Kest(3\cdot j,\ 3\cdot i)+k^k(6,\ 3)$$

$$Kest(3\cdot j,\ 3\cdot j-2)=Kest(3\cdot j,\ 3\cdot j-2)+k^k(6,\ 4)$$
$$Kest(3\cdot j,\ 3\cdot j-1)=Kest(3\cdot j,\ 3\cdot j-1)+k^k(6,\ 5)$$
$$Kest(3\cdot j,\ 3\cdot j)=Kest(3\cdot j,\ 3\cdot j)+k^k(6,\ 6)$$

Início do Programa Principal

....

Chamar Rotina Ler dados restricao (NN,COND)

Chamar Rotina Ler dados acoes (Fconcen,NN,g1,g2,NE)

Fazer j de 1 até NE

Chamar Rotina Montar Matriz de Rotacao Barra ($X_1^j, Y_1^j, X_2^j, Y_2^j, L_j, R_j$)

Chamar Rotina Montar Matriz de Rigidez Barra (L_j, E_j, I_j, A_j, k)

Chamar Rotina Transposta Matriz ($Rt_j, R_j, 6, 6$)

Chamar Rotina Multiplica Matriz-Matriz ($A, Rt_j, k, 6, 6, 6$)

Chamar Rotina Multiplica Matriz-Matriz ($B, A, R_j, 6, 6, 6$)

Chamar Rotina Monta Vetor Forcas (g1, g2, $f_{p_j}, 6$)

$$\{F\}^e_{6x1} = [R]^T_{6x6} \cdot \{f_p\}_{6x1}$$

Chamar Rotina Multiplica Matriz-Vetor ($F, Rt_j, f_{p_j}, 6, 6$)

Chamar enderecamento matriz rigidez elemento (K_{est} *,B)*

Chamar enderecamento vetor forca nodais (F_{est} *,F,* F_{concen} *)*

Fim de Fazer j

Fim do Programa Principal

CONDIÇÕES DE CONTORNO DE DESLOCAMENTOS

Note que todos os graus de liberdade da estrutura foram “relaxados” de modo a poderem ser determinados no sistema algébrico final. Entretanto, a estrutura está dentro da mecânica estática, ou seja, ela não deve apresentar movimentos translacionais e rotacionais de corpo rígido. Isto representa dentro da teoria das estruturas que sejam pelo menos estruturas isostáticas, ou seja, não hipostáticas e/ou mecanismos.

Assim, é licito dizer que em certos nós a estrutura está impedida de movimento, devendo então impor a certos graus de liberdade condições de contorno em deslocamentos e/ou giros, para que o problema estático seja solúvel. Estas imposições podem ser deslocamentos nulos, conforme tipo de vinculação (1º., 2º gênero ou engaste), ou mesmo imposição de deslocamentos prescritos, por exemplo, recalques translacionais simulando uma base elástica.

Este texto se voltará para o desenvolvimento de procedimentos aplicados sobre o sistema linear da estrutura para levar em conta apenas restrições nulas de deslocamentos.

Existem varias técnicas para impor condições de contorno no sistema linear da estrutura gerado (eq. 41). Duas técnicas se destacam para aplicações:

- Técnica de “zeros e uns”;
- Técnica da penalidade.

Técnica de "zeros e uns"

Consiste em zerar a linha e coluna do respectivo grau de liberdade a ser restrito da matriz de rigidez e do vetor de forças nodais resultantes e colocar o valor unitário da respectiva posição da diagonal principal deste grau de liberdade.

Seja o sistema linear da estrutura $[Kest]_{3\cdot nn\ x\ 3\cdot nn} \cdot \{Uest\}_{3\cdot nn} = \{Fest\}_{3\cdot nn}$ (41)

Ou matricialmente:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & .. & k_{1j} & k_{13nn} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & .. & k_{2j} & k_{23nn} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & .. & k_{3j} & k_{33nn} \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ k_{j1} & k_{j2} & k_{j3} & .. & k_{jj} & k_{j3nn} \\ k_{3nn1} & k_{3nn2} & k_{3nn3} & .. & k_{3nnj} & k_{3nn3nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ .. \\ U_j \\ U_{3nn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ .. \\ F_j \\ F_{3nn} \end{Bmatrix} \qquad (42)$$

Suponha-se que os graus de liberdade (deslocamento ou rotação) das posições "2" e "j" sejam nulos, ou seja:

$U_2 = 0$ e $U_j = 0$

Assim, pela técnica de "zeros e uns", o sistema linear final fica:

Técnica de "zeros e uns"

$$
\begin{array}{cccccc}
\begin{array}{cccccc} & \text{coluna 2} & & & \text{coluna j} & \end{array} & & & & & \\
\left[\begin{array}{cccccc}
k_{11} & 0 & k_{13} & .. & 0 & k_{13nn} \\
0 & 1 & 0 & .. & 0 & 0 \\
k_{31} & 0 & k_{33} & .. & 0 & k_{33nn} \\
.. & .. & .. & .. & .. & .. \\
0 & 0 & 0 & .. & 1 & 0 \\
k_{3nn1} & 0 & k_{3nn3} & .. & 0 & k_{3nn3nn}
\end{array}\right] & \cdot & \left\{\begin{array}{c}
U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ .. \\ U_j \\ U_{3nn}
\end{array}\right\} & = & \left\{\begin{array}{c}
F_1 \\ 0 \\ F_3 \\ .. \\ 0 \\ F_{3nn}
\end{array}\right\} & \begin{array}{l}
\\ \text{linha 2} \\ \\ \\ \text{linha j} \\ \\
\end{array}
\end{array}
$$

```
Início da Rotina CondContZeroUm(Kest,Fest,nn,COND)
// Input:
// Kest: matriz de rigidez da estrutura
// Fest: vetor de forças de toda a estrutura
/ nn: numero de nós da estrutura
//COND: vetor que indica se grau de liberdade está livre (0) ou impedido (1)
// Output:
// Kest: matriz de rigidez da estrutura com condições de contorno
// Fest: vetor de forças de toda a estrutura  com condições de contorno
//Declaração de variáveis
Inteiros nn,Cond(3nn)
Real Kest(3nn,3nn), Fest(3nn)

Fazer i de 1 até 3nn
        Se ( Cond(i) = 1 ) então
                Fazer j de 1 até 3nn
                        Kest(j,i) = 0
                        Kest(i,j) = 0
                Fim de Fazer j
               Kest(i,i) = 1
               Fest(i) = 0
        Fim entao
Fim de Fazer i
```

Técnica da Penalidade

Consiste em atribuir ao respectivo grau de liberdade restrito um valor muito grande na sua posição da diagonal principal.

Este procedimento é similar, como será visto à frente, a atribuir um elemento nesta posição restrita com rigidez "infinita", que leve o deslocamento deste grau de liberdade a ser nulo.

Assim, seja o sistema linear (eq.42), com a imposição das linhas "2" e "j":

$U_2 = 0$ e $U_j = 0$

Assim, pela técnica da penalidade, o sistema linear final fica:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & .. & k_{1j} & k_{13nn} \\ k_{21} & \infty & k_{23} & .. & k_{2j} & k_{23nn} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & .. & k_{3j} & k_{33nn} \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ k_{j1} & k_{j2} & k_{j3} & .. & \infty & k_{j3nn} \\ k_{3nn1} & k_{3nn2} & k_{3nn3} & .. & k_{3nnj} & k_{3nn3nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ .. \\ U_j \\ U_{3nn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ .. \\ F_j \\ F_{3nn} \end{Bmatrix}$$