DISCIPLINA

PEF – 3528 – Ferramentas Computacionais na Mecânica das Estruturas Criação e Concepção

Valério S. Almeida - 2018
valerio.almeida@usp.br

OBJETIVOS:

Fornecer aos alunos de graduação uma visão e aplicação prática da mecânica computacional para a análise de estruturas mediante seu contato com os conceitos teóricos da modelagem física do problema em conjunto com sua efetiva modelagem computacional com o uso de métodos matemáticos clássicos. Permitir que os alunos entendam como isso é desenvolvido pelo mercado e quais ferramentas utilizam esses conceitos.

PROGRAMA

- Elementos Finitos.
- Conceitos e comandos básicos e de linguagem computacional.
- Desenvolvimento de códigos computacionais na resolução de problemas lineares de estruturas.
- Métodos de solução.
- Introdução à Visualização Científica.
- Ferramentas e bibliotecas.

AVALIAÇÃO
1 trabalho a ser entregue no final do curso e atividades distribuídas no curso que culminarão no referido trabalho.

SISTEMAS FÍSICOS:

Mecânica dos Fluidos, Mecânica das Estruturas, Transferência de Calor, Biomecânica, Geomecânica, Acústica.

Modelagem exata muito complexa

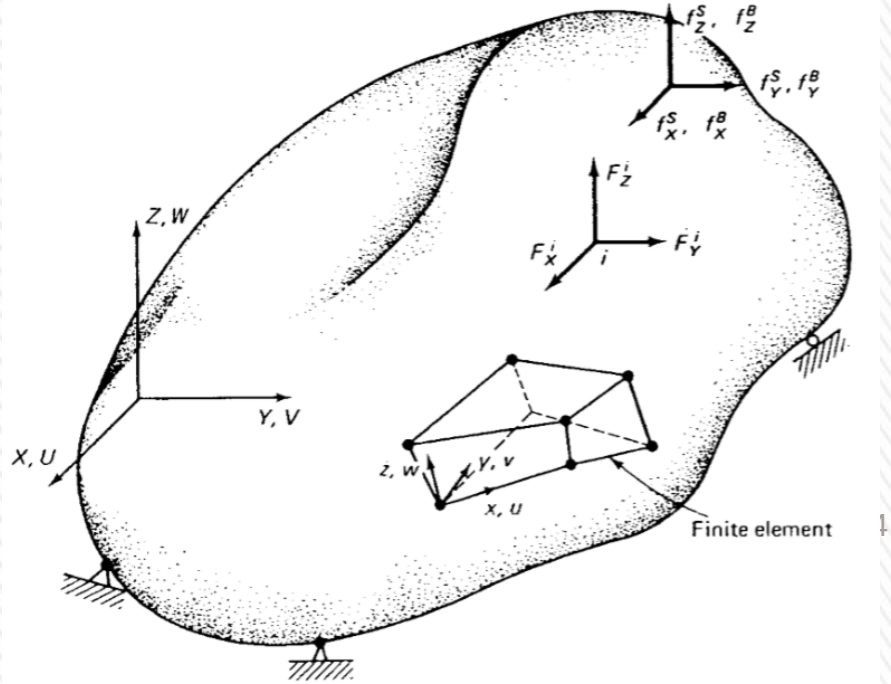
Resolução de equações diferenciais complexas e impossíveis muitas vezes.

EXEMPLOS DE SISTEMAS FÍSICOS

Problema da teoria da elasticidade considerando o meio homogêneo, isótropo, estático e sofrendo pequenas mudanças de forma. O equacionamento em deslocamentos é expresso pela EDP elíptica de Laplace denominada de Eq. de Navier-Cauchy:

$$u_{i,jj}(s) + \frac{1}{1-2\cdot\nu}\cdot u_{j,ji}(s) + \frac{b_i(s)}{G} = 0 \qquad i, j = 1,2,3$$

A equação de Navier-Cauchy
não admite solução exata
para casos gerais



Mecânica das Estruturas

Obter campos de deslocamentos, tensões, frequências das estruturas.

Se efeitos de inércia são considerados ou não:

Mecânica do Contínuo: Estática ou Dinâmica

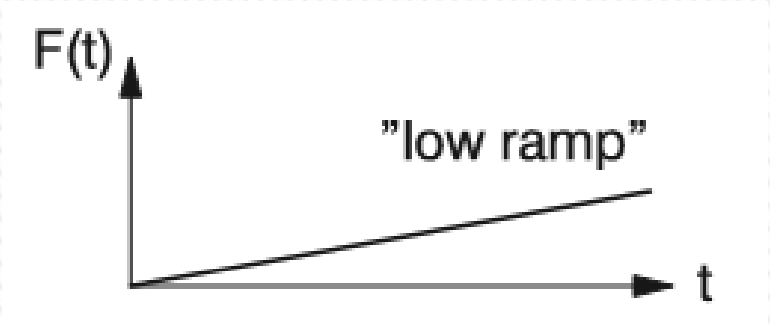
Dinâmica: dependência do tempo é necessária, que requer o cálculo de derivadas de forças inerciais (amortecimento) com respeito ao tempo;

Estática: problemas quase-estático. Em problemas de plasticidade, fluência, é necessário se guardar históricos de deformações (tensões), mas não dependem de forças inerciais.

Tipos de Carregamento:

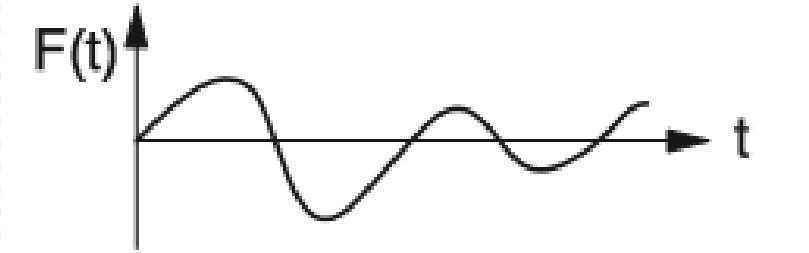
Estático: influencia dos efeitos inerciais são negligenciáveis;

Quase-Estático: há a dependência do tempo, sem forças inerciais, como em fluência (creep), cargas móveis;



Dinâmico: inercias têm que ser considerados: vento, terremoto, impactos.

$$F = m.\ddot{a}$$



Mecânica das Estruturas

Análise de problemas estáticos:

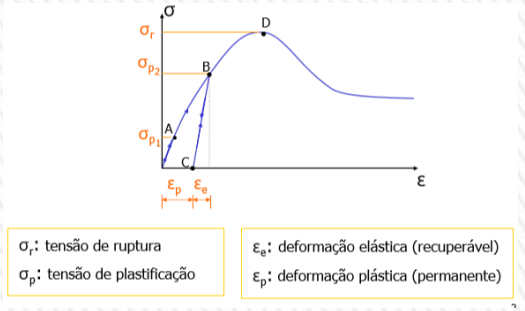
Linear: resposta linear no caso de causa e efeito. Se dobrar a força aplicada, dobra-se os deslocamentos e esforços.

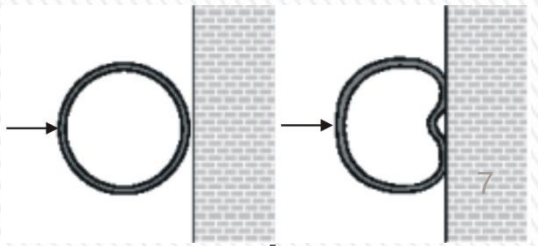
Não-Linear (NL): casos não lineares, tipos:

Não linearidade Geométrica

Não Linearidade Física

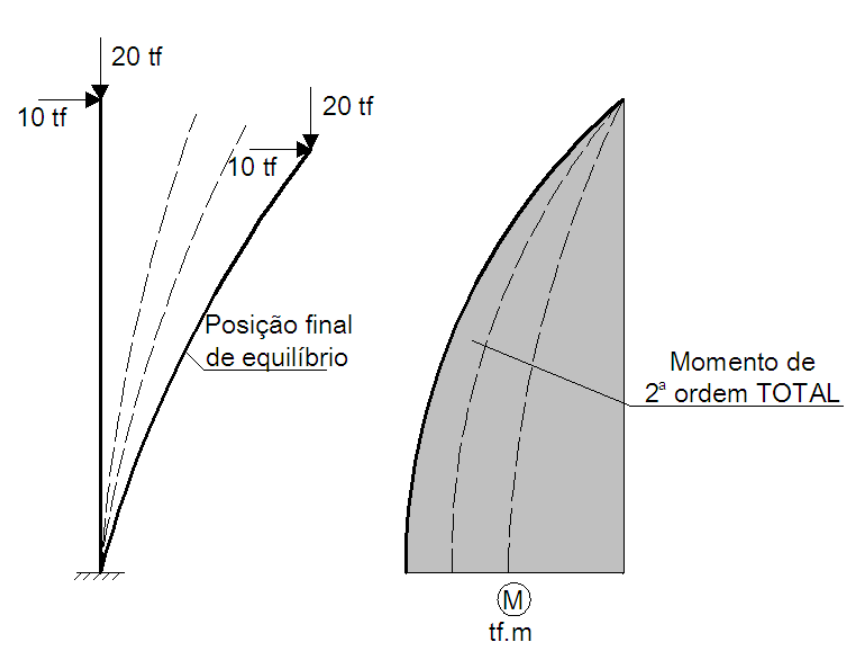
Não Linearidade de Contato

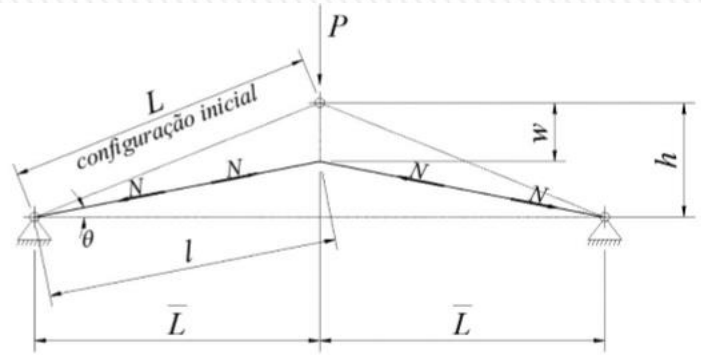




Problemas NL resolvidos em processos incrementais, simulando passos de tempo.

NL Geométrica: Equilíbrio na posição deformada

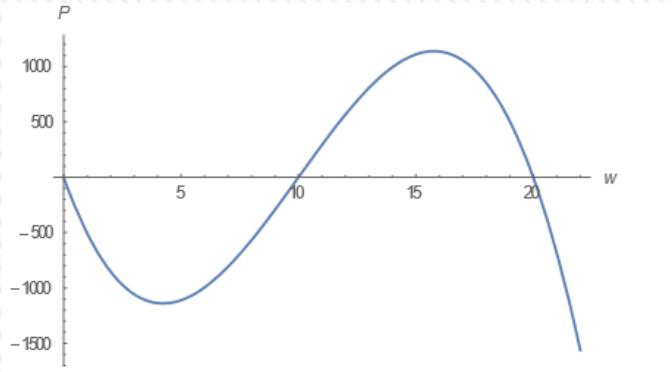




$$P = 2N\,sen\theta = 2N\,\frac{h-w}{l}$$

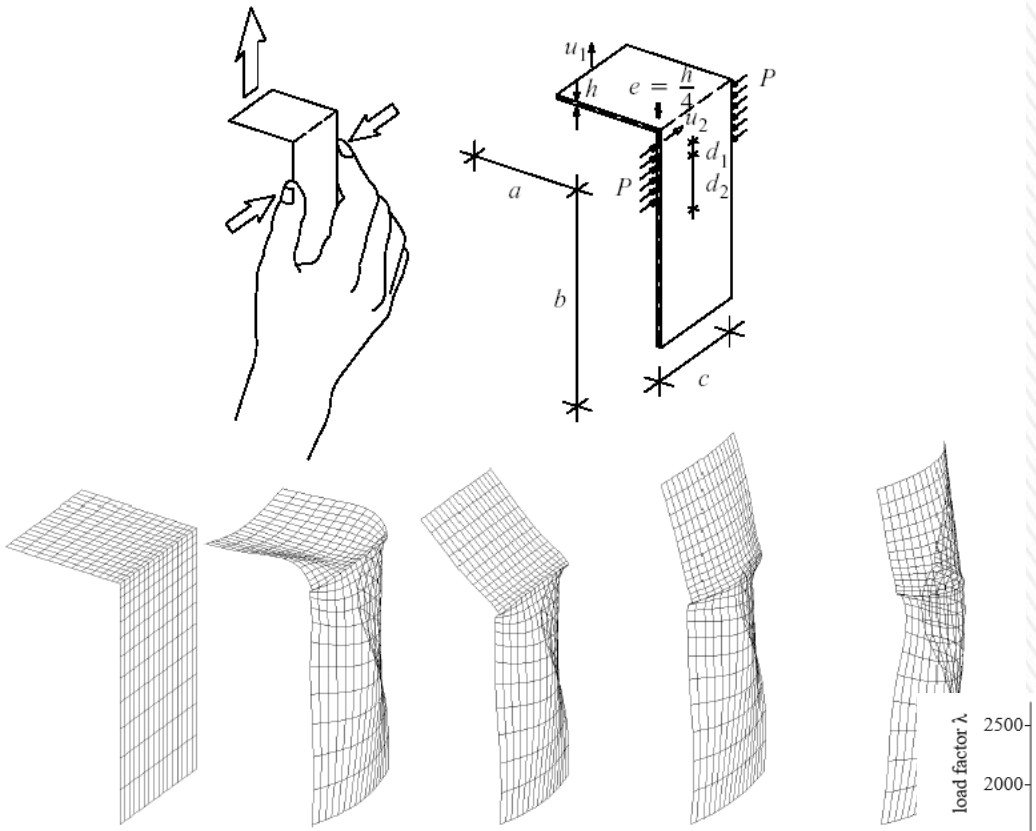
$$l = \sqrt{\bar{L}^2 + (h-w)^2}$$

$$P(w) = 2EA\left(\frac{\sqrt{\bar{L}^2 + (h-w)^2} - \sqrt{\bar{L}^2 + h^2}}{\sqrt{\bar{L}^2 + h^2}}\right)\frac{h-w}{\sqrt{\bar{L}^2 + (h-w)^2}}$$



Processo incremental, nesse caso é analítico

NL Geométrica: Equilíbrio na posição deformada



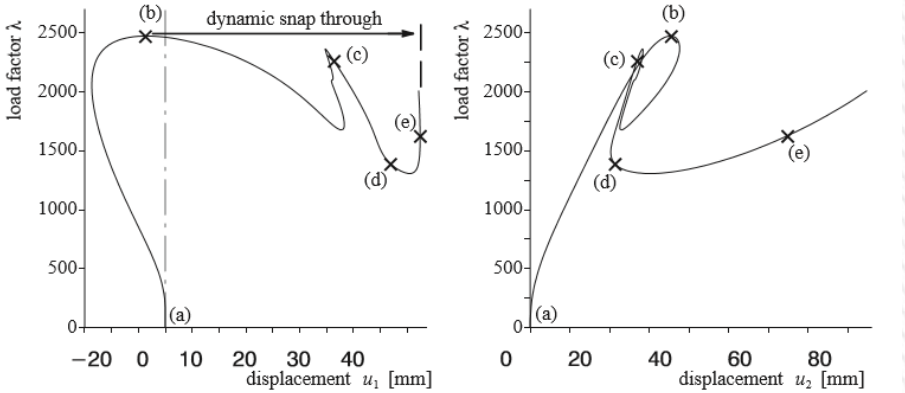
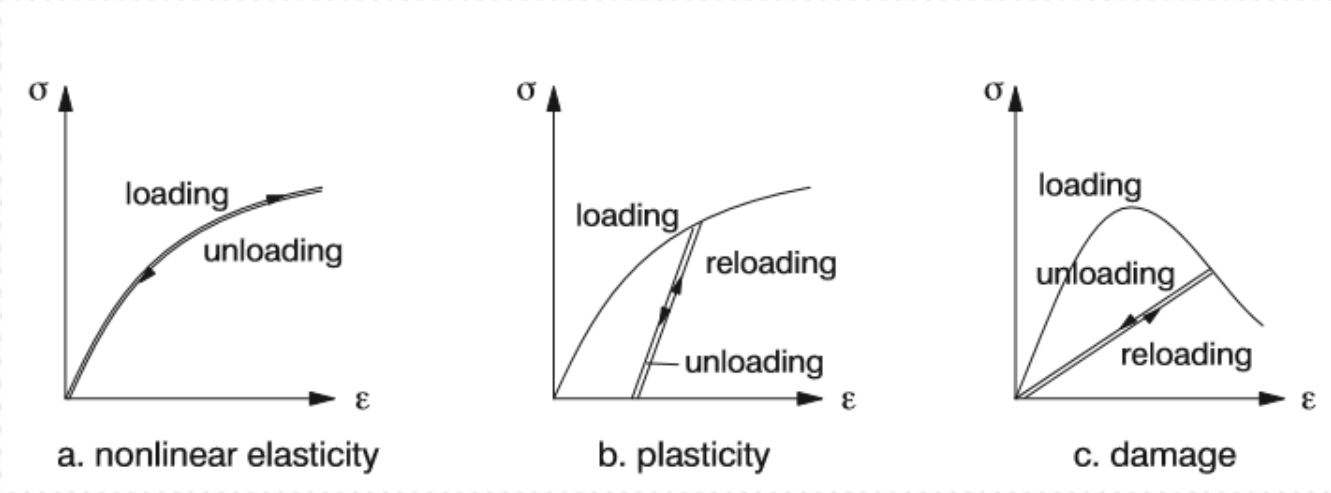
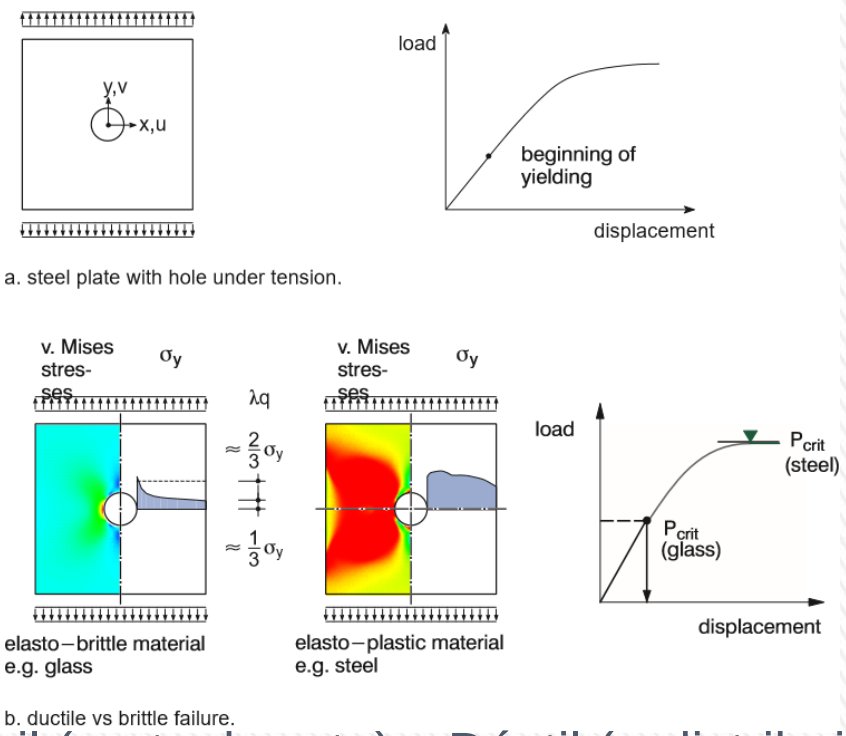


Figure 1.12: Geometrically nonlinear problem (M. Bischoff, PhD−thesis, 1999)

Processo incremental, nesse caso é complexo!

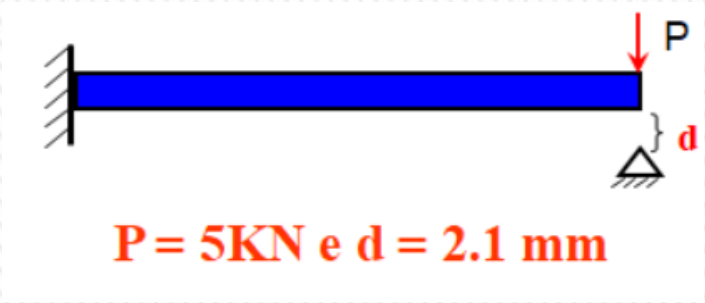
NL Física: Comportamento Constitutivo não é linear





Material Frágil (rupt. abrupta) x Dúctil (redistribui tensão)

NL Contato



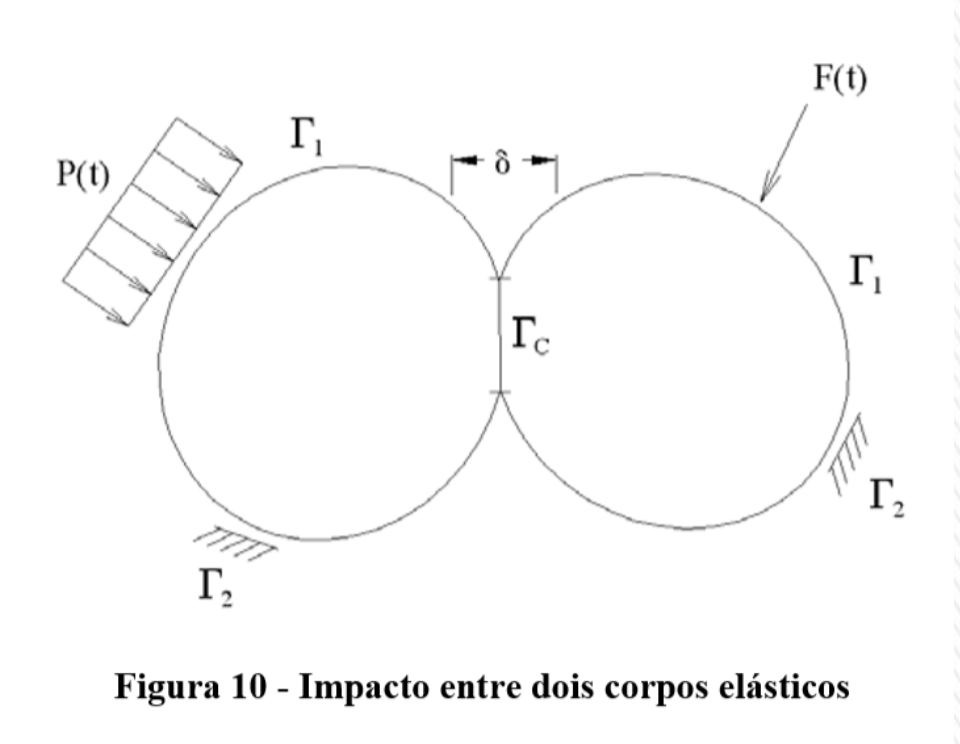
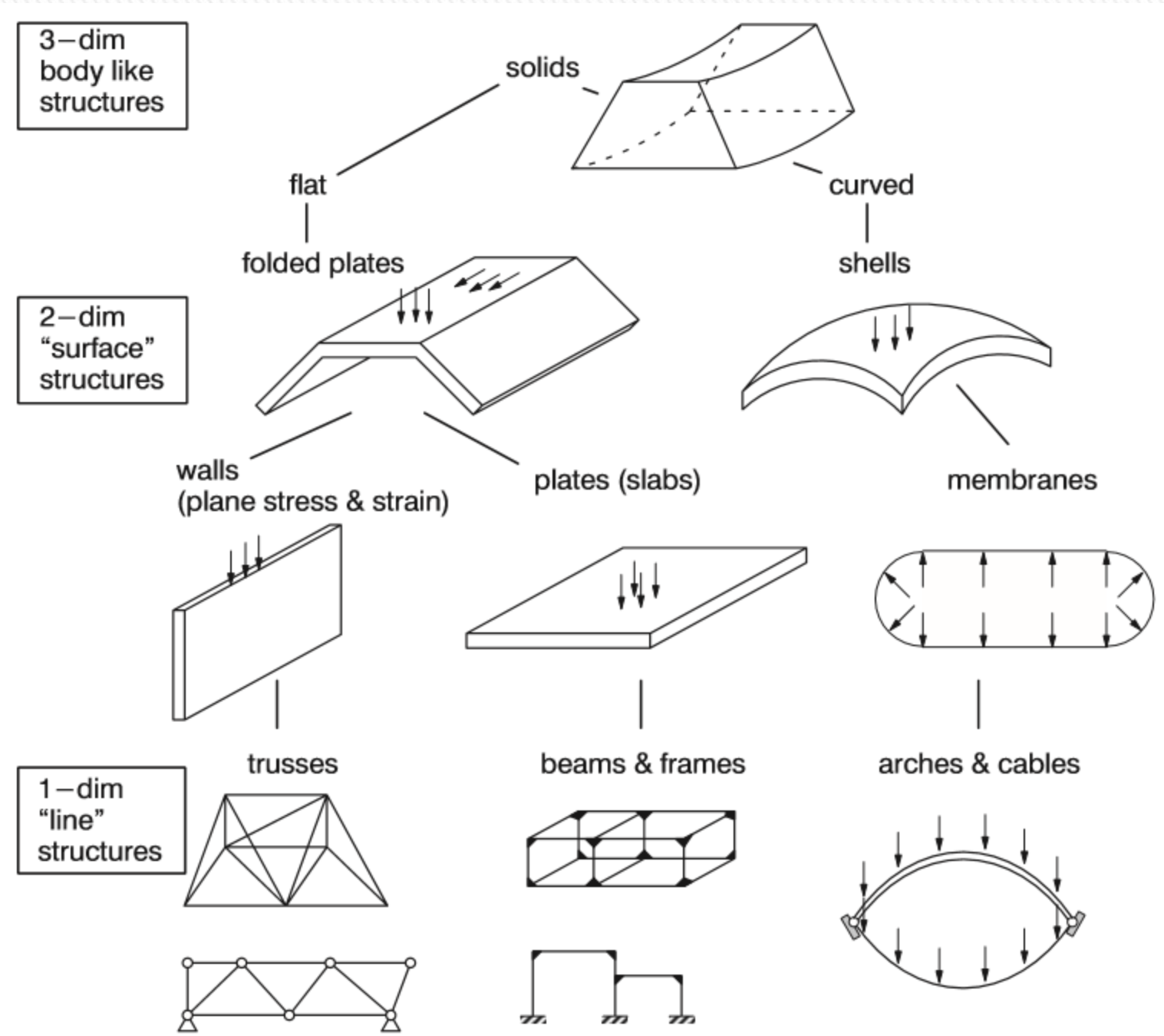


Figura 10 - Impacto entre dois corpos elásticos

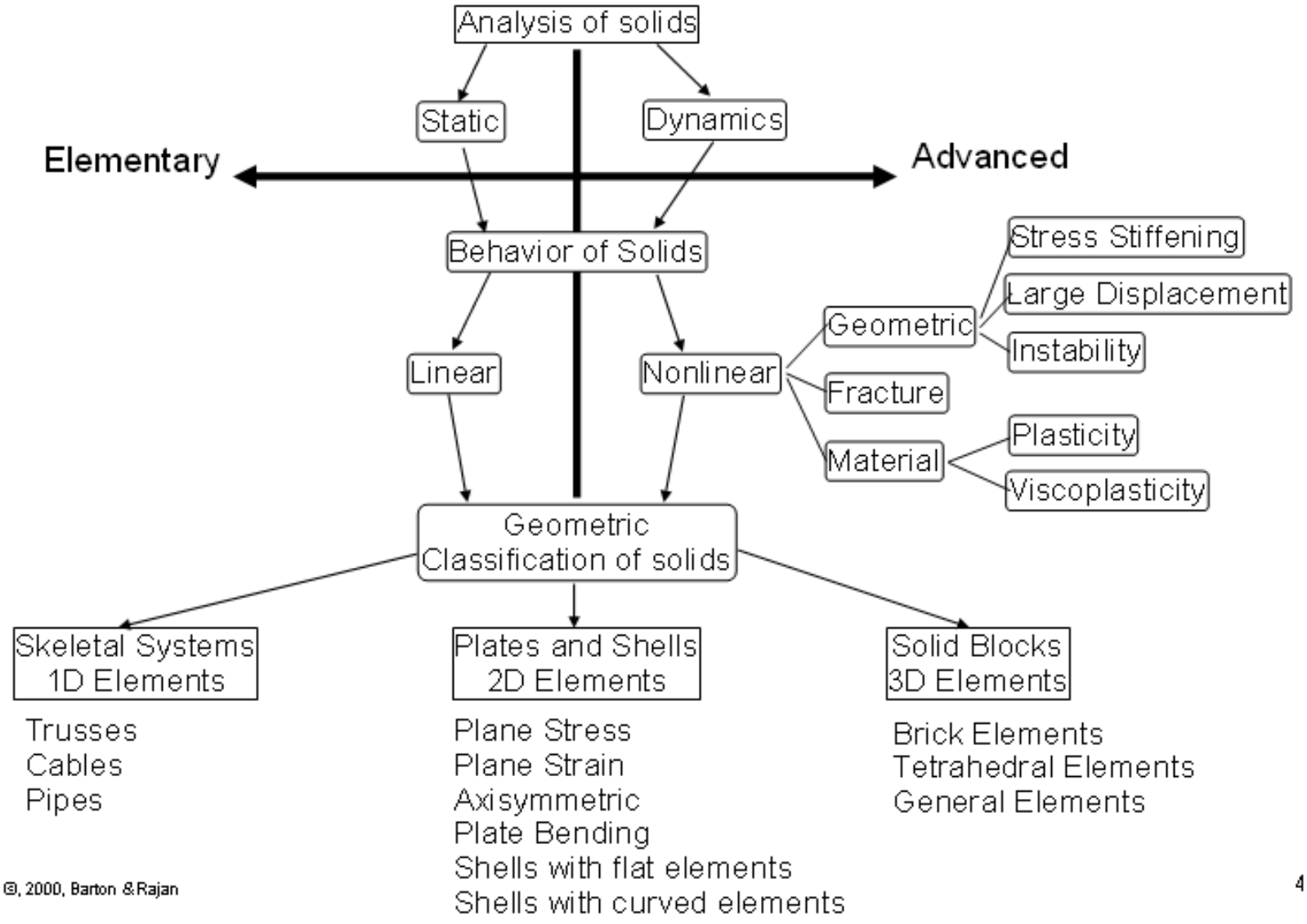
Mecânica das Estruturas

Classificação das estruturas:

- Estruturas lineares (reticuladas):
  - treliça (plana, espacial);
  - pórtico plano (vigas e cabos);
  - pórtico espacial;
  - grelha;
- Estruturas de superfície:
  - estado plano: de tensões e deformações
  - placas e cascas
- Estruturas sólidas (3D): Ex. solo, blocos.


3–dim body like structures
solids
flat
curved
folded plates
shells
2–dim "surface" structures
walls (plane stress & strain)
plates (slabs)
membranes
trusses
beams & frames
arches & cables
1–dim "line" structures

Classification of Solid-Mechanics Problems



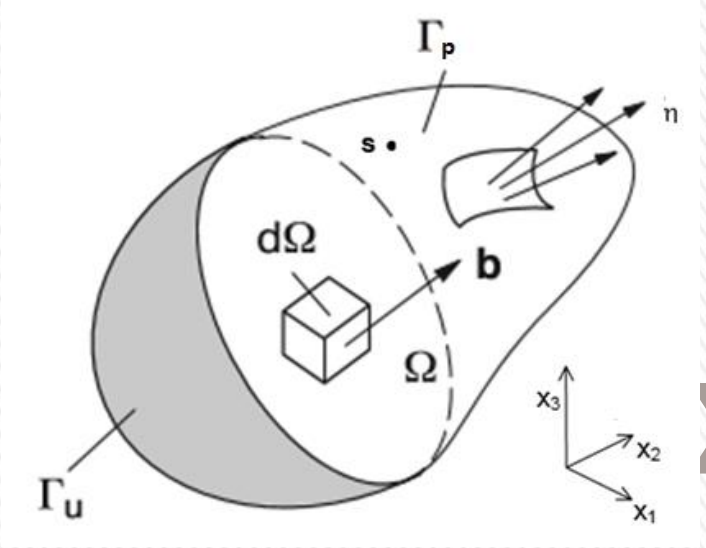
©, 2000, Barton & Rajan

EDP: Sólido 3D

$$u_{i,jj}(s) + \frac{1}{1-2\cdot\nu}\cdot u_{j,ji}(s) + \frac{b_i(s)}{G} = 0 \qquad i, j = 1,2,3$$

$u_i = \bar{u}_i \quad onde \quad \Gamma = \Gamma_u \quad i = 1,2,3$

$p_i = \bar{p}_i \quad onde \quad \Gamma = \Gamma_p \quad i = 1,2,3$

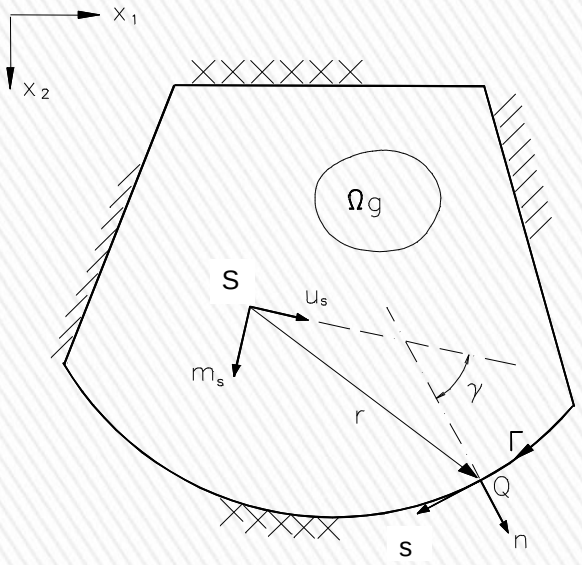


EDP: PLACA

Teoria clássica de placa de Kirchhoff

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p_z}{D}$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$



$$m_{ij} = -D\left[(1-\upsilon)w_{,ij} + \upsilon w_{,ll}\,\delta_{ij}\right] \qquad (i,j=1,2)$$

EDO: VIGA/TRELIÇA

Teoria clássica de viga de Bernoulli

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{p_z}{D}$$

$$D = EI$$

$$V = -\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} D$$

$$M = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} D$$

Deslocamento axial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{p_x}{EA}$$

Representação da resposta real de um problema físico

Problema Real → Caract. complexas

Meio (Anisotropia, Não-homogeneidade, etc.)

Ação externa (Aleatória, Não-proporcional, etc.)

Condições de Contorno (Mista, unilateral, etc.)

Material com resposta não linear

Resposta Real → Obtenção Extrem. difícil

Resp. Problema Real → Idealização

Suavização das complexidades originais a

partir de admissão de hipóteses para o problema

Conjunto de hipóteses: ***Modelo***

Representação matemática do modelo

Representação matemática de um modelo físico

a. Isolar uma região do fenômeno

Volume de controle

b. Aplicação de um princípio físico

Balanço de energia

Balanço de momento

Balanço de massa

c. Obtenção das equações governantes

Equações Diferenciais

Equações Integrais

Elemento estruturais: representado por modelo matemático

Equações governantes

Métodos analíticos

Soluções de problemas limitados

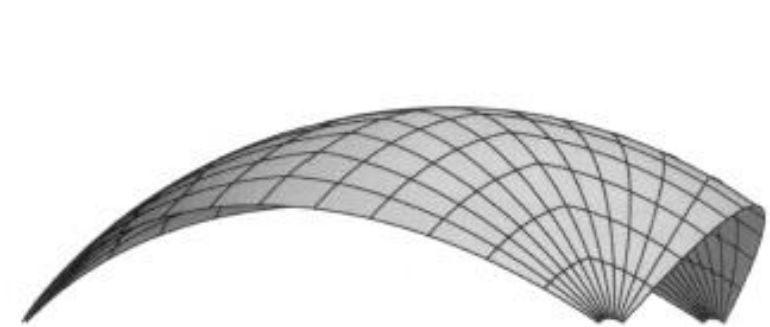
Exemplos:

Séries de Fourier (tabelas de lajes retangulares);

Eq. de Mindlin para solo (homogêneo semi-infinito)

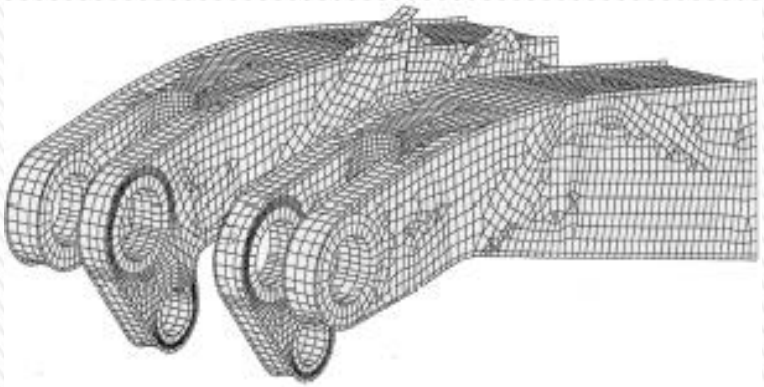
Métodos numéricos (discretos)

Problemas gerais









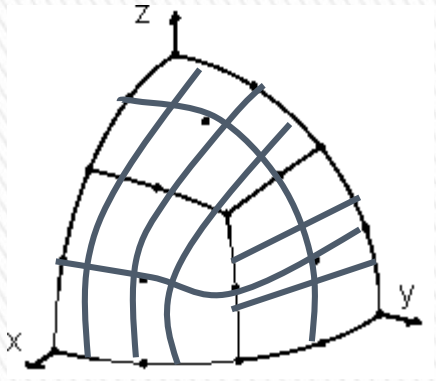
Modelos complexos: de grande escala, processos incrementais de cargas e de tempo.

Alguns métodos numéricos

Métodos de Domínio:

MDF, MEF

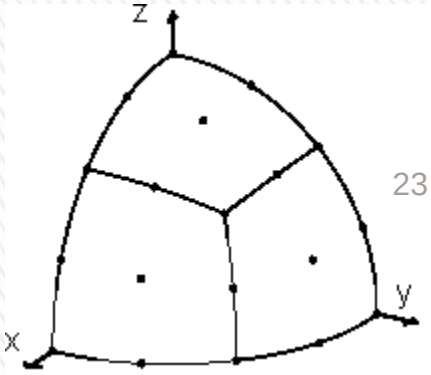
- Formulação + simples
- Discretizar todo o domínio
- Indicado p/ análise de Ω finitos

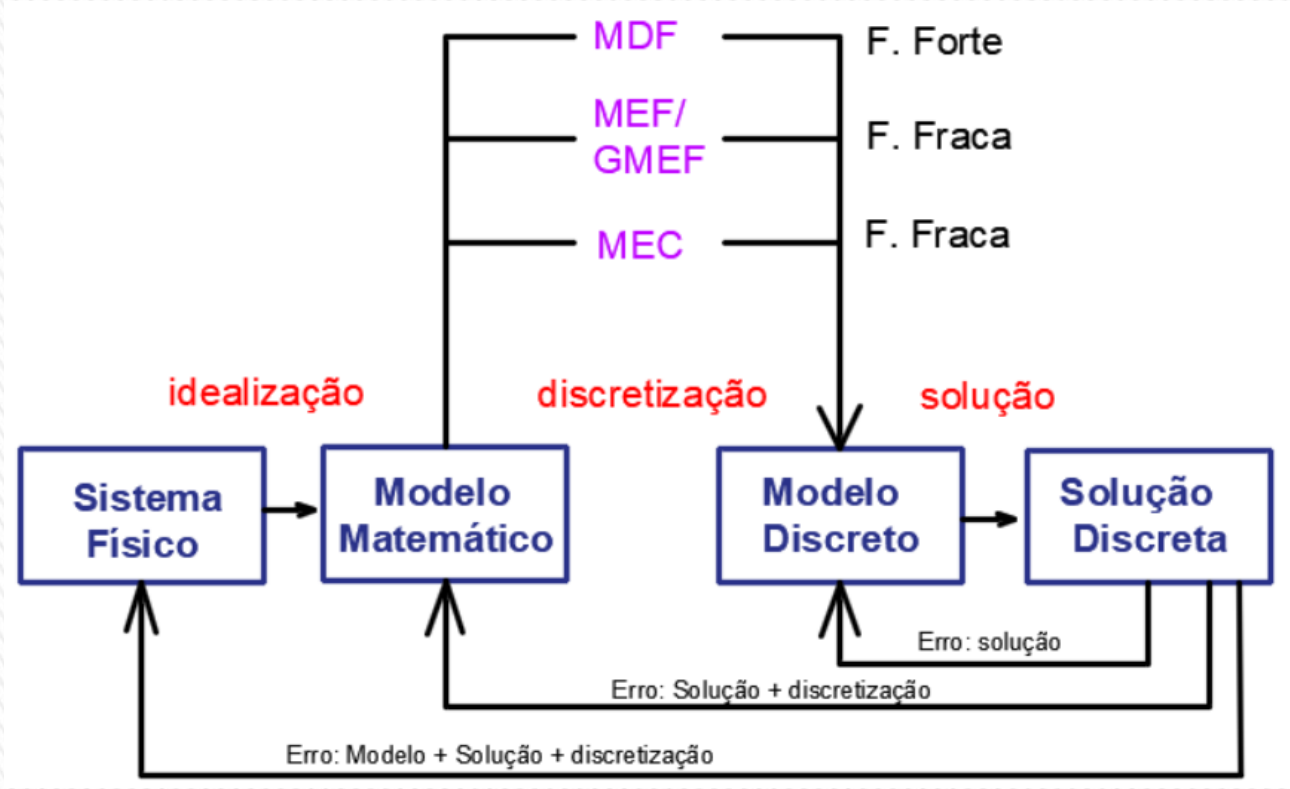


Método de Contorno:

MEC

- Formulação não tão convencional
- Discretizar apenas o Γ de interesse
- Indicado p/ análise de Ω infinitos





Formulação Forte: Diferenças Finitas

Formulação Fraca: MEF, MEC

Diferenças Finitas

Discretização do domínio e a substituição das derivadas na ED por aprox. por valores numéricos das funções.

As derivadas são trocadas pela razão incremental que converge para o valor da derivada qdo o incremento tende a zero.

Diferenças Finitas: EDOs

Fórmula centrada (Molécula computacional)

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{3!}y'''(\xi)$$

$$y''(x) = \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12}y^{(4)}(\xi)$$

Aprox. de alta ordem (Molécula computacional)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{-u_{i+2} + 8u_{i+1} - 8u_{i-1} + u_{i-2}}{12\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)^4 \qquad \text{central difference}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i = \frac{-u_{i+2} + 16u_{i+1} - 30u_i + 16u_{i-1} - u_{i-2}}{12(\Delta x)^2} + \mathcal{O}(\Delta x)^4 \qquad \text{central difference}$$

Pros and cons of high-order difference schemes

- ⊖ more grid points, fill-in, considerable overhead cost
- ⊕ high resolution, reasonable accuracy on coarse grids

Example: 1D Poisson equation

Boundary value problem

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \quad \text{in } \Omega = (0,1), \qquad u(0) = u(1) = 0$$

One-dimensional mesh



$$u_i \approx u(x_i), \quad f_i = f(x_i) \qquad x_i = i\Delta x, \quad \Delta x = \frac{1}{N}, \quad i = 0, 1, \ldots, N$$

Central difference approximation $\mathcal{O}(\Delta x)^2$

$$\begin{cases} -\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{(\Delta x)^2} = f_i, & \forall i = 1, \ldots, N-1 \\ u_0 = u_N = 0 & \text{Dirichlet boundary conditions} \end{cases}$$

Result: the original PDE is replaced by a linear system for nodal values

Problema de torção

Example: 1D Poisson equation

Linear system for the central difference scheme

$$\begin{cases} i=1 & -\frac{u_0-2u_1+u_2}{(\Delta x)^2} & = f_1 \\ i=2 & -\frac{u_1-2u_2+u_3}{(\Delta x)^2} & = f_2 \\ i=3 & -\frac{u_2-2u_3+u_4}{(\Delta x)^2} & = f_3 \\ & \cdots & \\ i=N-1 & \frac{u_{N-2}-2u_{N-1}+u_N}{(\Delta x)^2} & = f_{N-1} \end{cases}$$

Matrix form $\boxed{Au = F}$ $\quad A \in \mathbb{R}^{N-1\times N-1} \quad u, F \in \mathbb{R}^{N-1}$

$$A = \frac{1}{(\Delta x)^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & & \cdots & \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \cdot \\ u_{N-1} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \cdot \\ f_{N-1} \end{bmatrix}$$

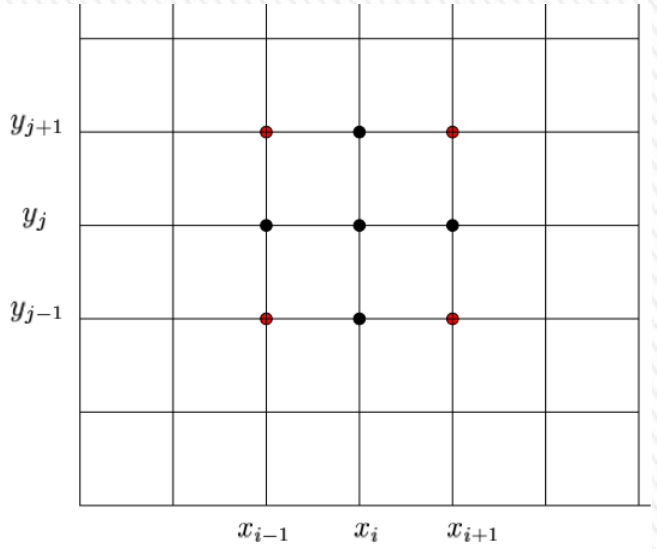
The matrix A is tridiagonal and symmetric positive definite $\Rightarrow$ invertible.

Para EDPs 2D (placas, cascas):

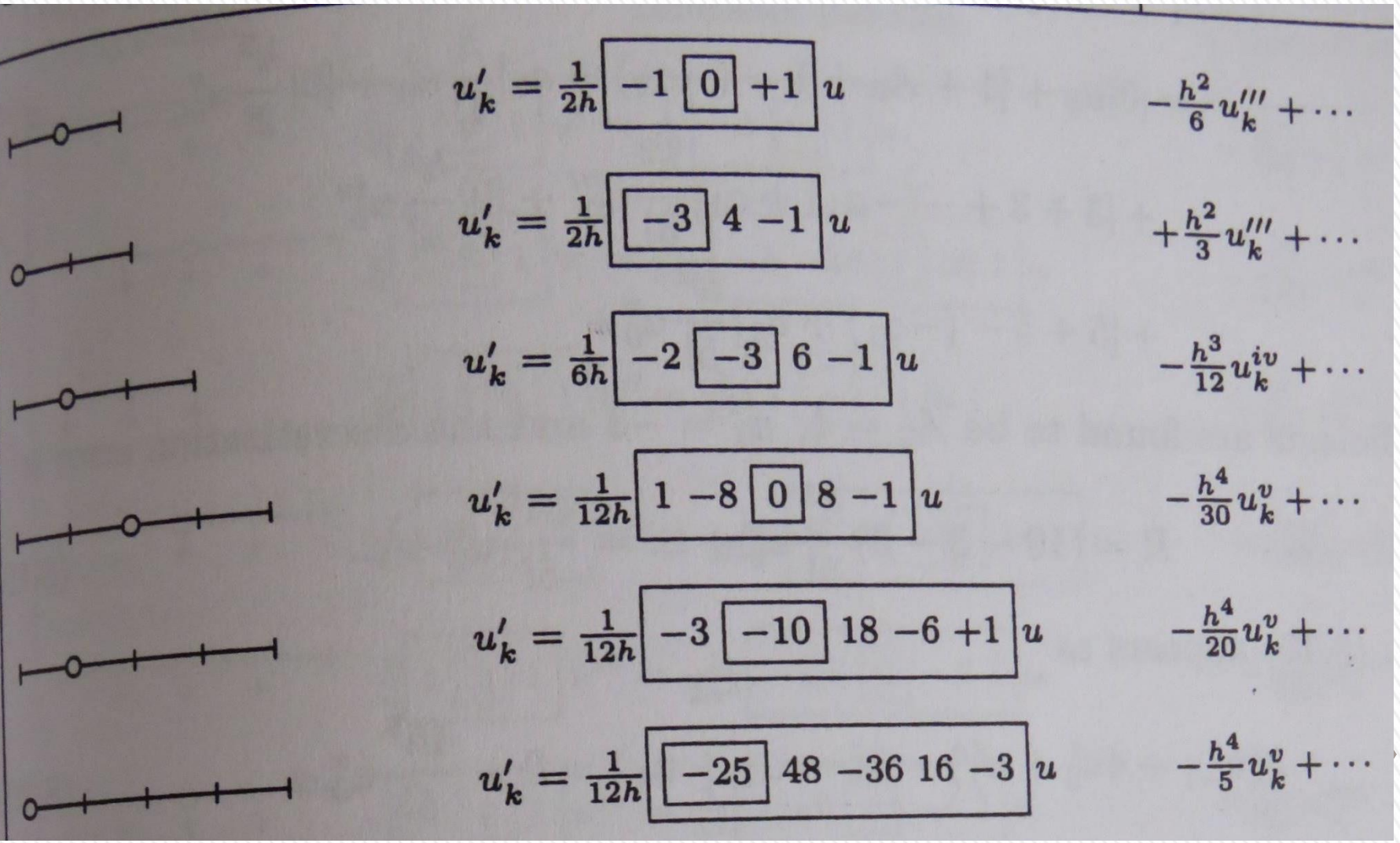
$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_{i,j} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i+1,j} - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i-1,j}}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)^2$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i+1,j} = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}}{2\Delta y} + \mathcal{O}(\Delta y)^2$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i-1,j} = \frac{u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j-1}}{2\Delta y} + \mathcal{O}(\Delta y)^2$$



Molécula computacional (1D)



$$u'_k = \frac{1}{2h}\boxed{-1\ \boxed{0}\ +1}\,u \qquad -\frac{h^2}{6}u'''_k + \cdots$$

$$u'_k = \frac{1}{2h}\boxed{\boxed{-3}\ 4\ -1}\,u \qquad +\frac{h^2}{3}u'''_k + \cdots$$

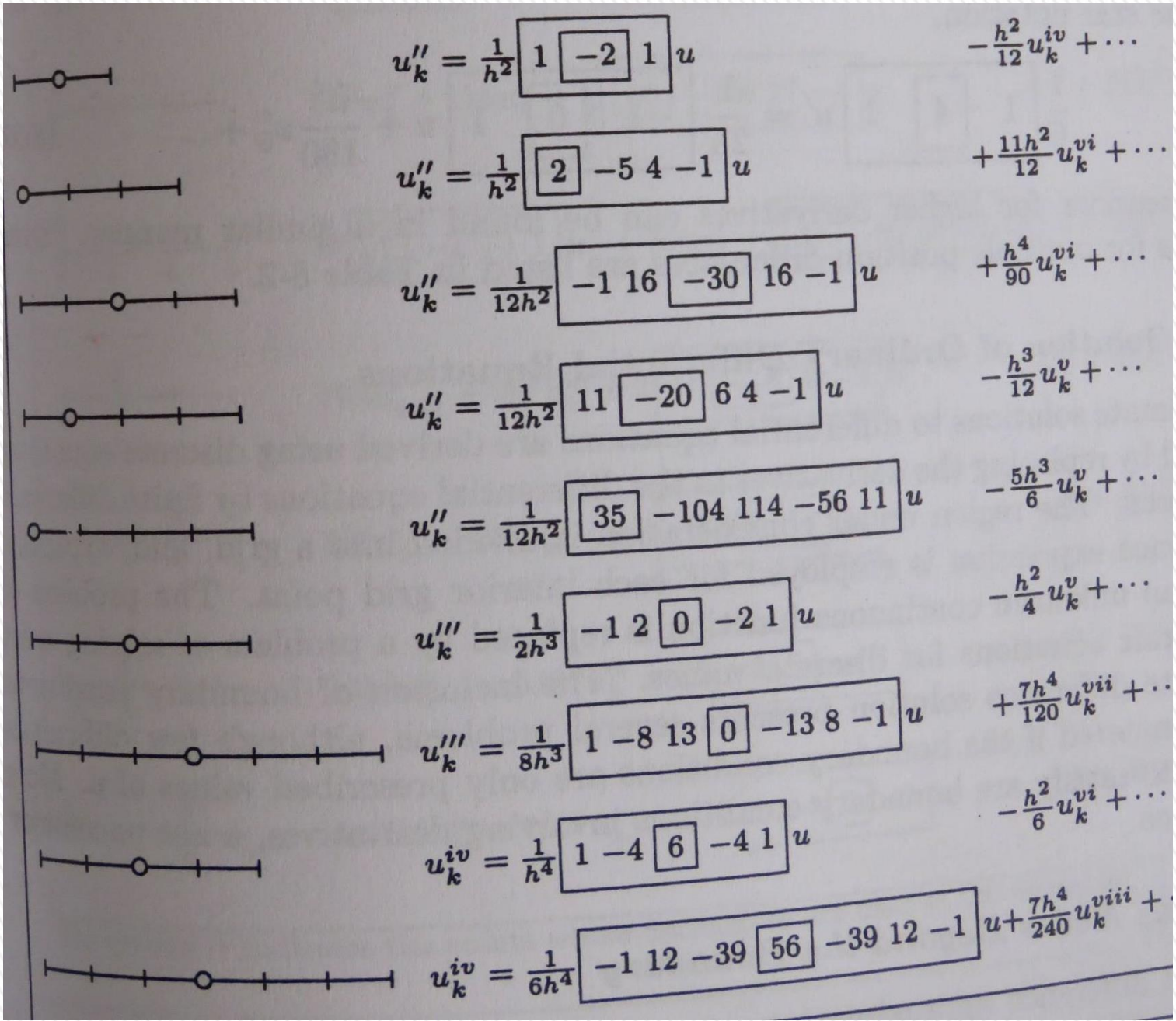
$$u'_k = \frac{1}{6h}\boxed{-2\ \boxed{-3}\ 6\ -1}\,u \qquad -\frac{h^3}{12}u^{iv}_k + \cdots$$

$$u'_k = \frac{1}{12h}\boxed{1\ -8\ \boxed{0}\ 8\ -1}\,u \qquad -\frac{h^4}{30}u^{v}_k + \cdots$$

$$u'_k = \frac{1}{12h}\boxed{-3\ \boxed{-10}\ 18\ -6\ +1}\,u \qquad -\frac{h^4}{20}u^{v}_k + \cdots$$

$$u'_k = \frac{1}{12h}\boxed{\boxed{-25}\ 48\ -36\ 16\ -3}\,u \qquad -\frac{h^4}{5}u^{v}_k + \cdots$$

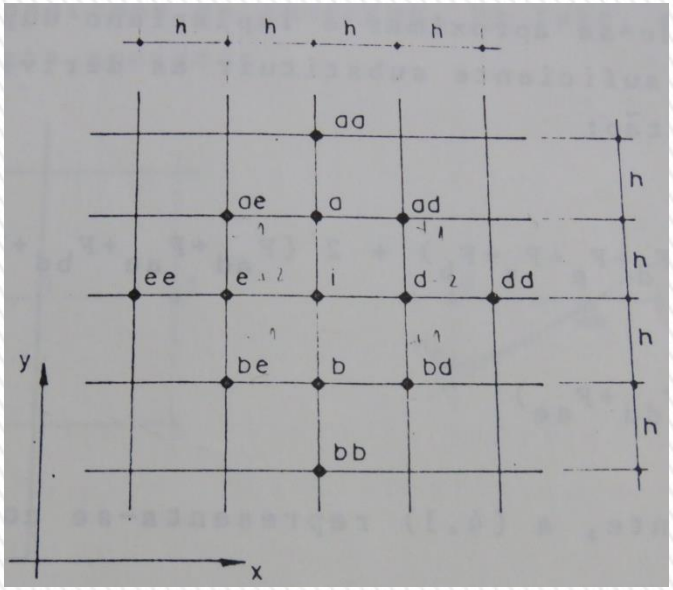
Molécula computacional (1D)



Molécula computacional (2D, placa)

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p_z}{D}$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$



$$\left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}\right)_i = \frac{1}{h^4}\left(F_{dd} - 4F_d + 6F_i - 4F_e + F_{ee}\right)$$

$$\left(\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}\right)_i = \frac{1}{h^4}\left(F_{aa} - 4F_a + 6F_i - 4F_b + F_{bb}\right)$$

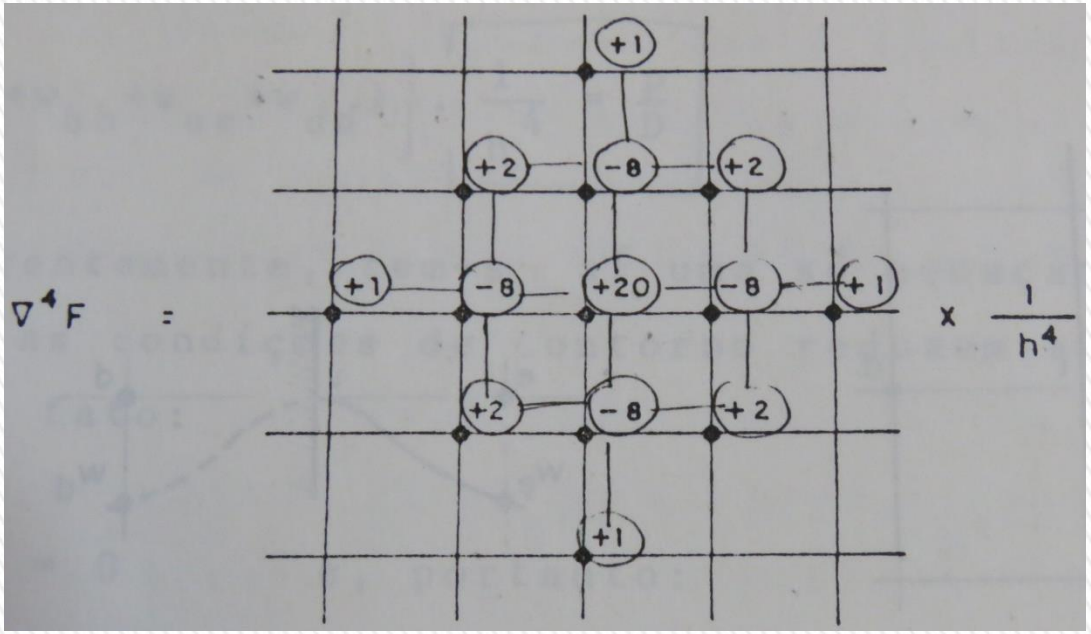
$$\left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_i = \frac{1}{h^4}\left(F_{ad} - 2F_a + F_{ae} - 2F_d + 4F_i - 2F_e + F_{bd} - 2F_b + F_{be}\right)$$

$$(\nabla^4 F) = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p_z}{D}$$

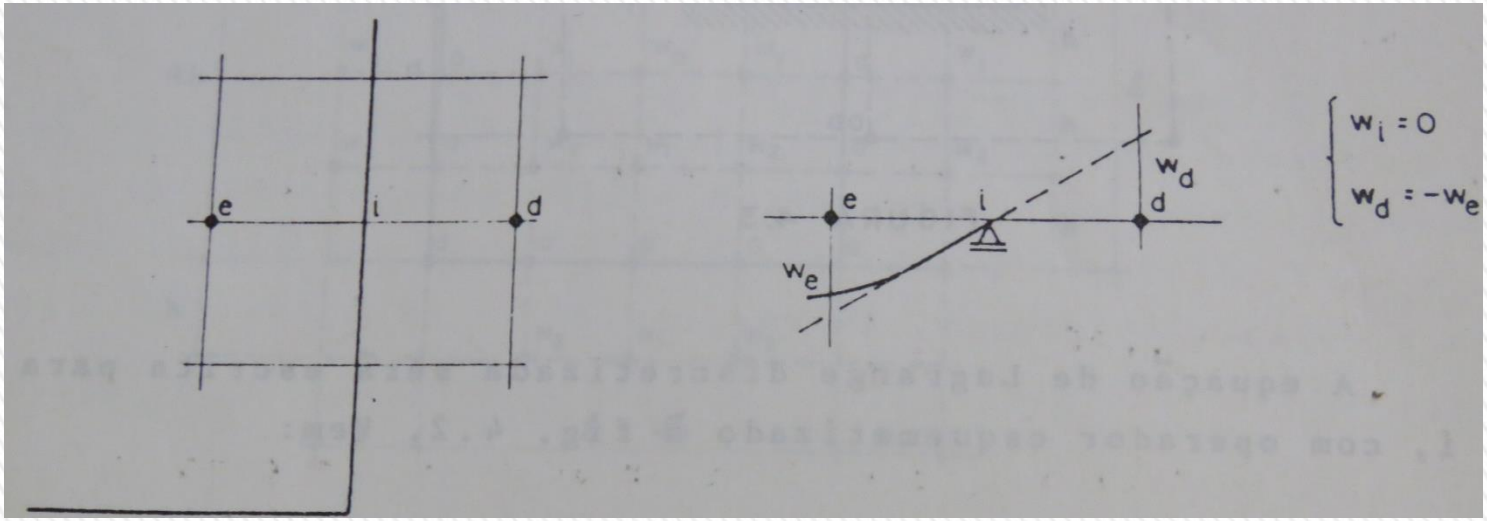
$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

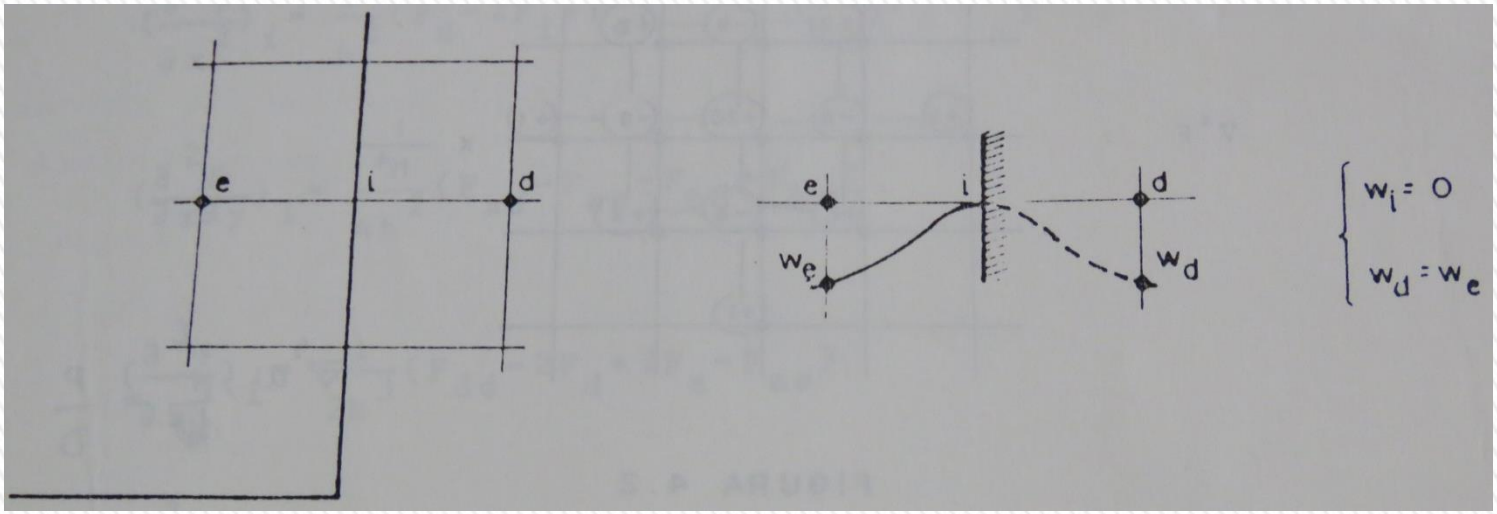
$$(\nabla^4 F)_i = \frac{1}{h^4}\left[20\ F_i - 8(F_d + F_e + F_a + F_b) + 2\ (F_{ad} + F_{ae} + F_{bd} + F_{be}) + \right.$$

$$\left. + (F_{aa} + F_{bb} + F_{dd} + F_{ee})\right]$$

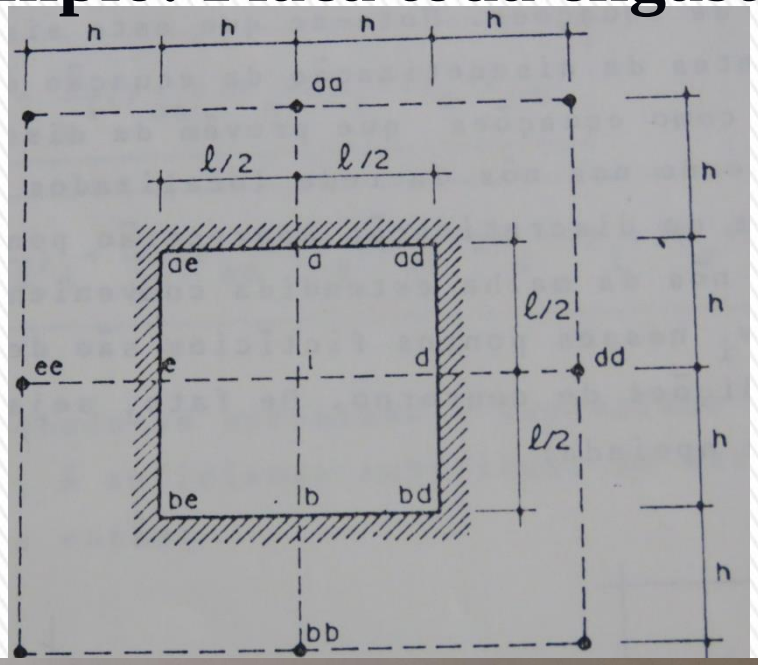


Pontos fictícios





Exemplo: Placa toda engastada



$$\boxed{\nabla^4 w} = \left[20w_i - 8(w_a + w_b + w_e + w_d) + 2(w_{ae} + w_{ad} + w_{be} + w_{bd}) + (w_{aa} + w_{bb} + w_{ee} + w_{dd})\right] \cdot \boxed{\frac{1}{h^4} = \frac{p}{D}} \qquad (a)$$

Aparentemente, tem-se aí uma só equação e 13 incógnitas. Todavia, as condições de contorno reduzem as incógnitas a apenas uma. De fato:

- nas bordas $w = 0$ e, portanto:

Exemplo: Placa toda engastada

$$w_a = w_b = w_e = w_d = w_{ae} = w_{ad} = w_{be} = w_{bd} = 0$$

- a placa é engastada no contorno e, portanto (ver final do § 4.1):

$$w_{aa} = w_i \quad ; \quad w_{bb} = w_i \quad ; \quad w_{ee} = w_i \quad ; \quad w_{dd} = w_i$$

A equação (a) simplifica-se então para:

$$20w_i + 4w_i = \frac{ph^4}{D} = \frac{p\ell^4}{16D}$$

$$w_i = \frac{p\ell^4}{384D} = 0{,}00261\ \frac{p\ell^4}{D} \qquad (b)$$

A solução é simples mas, naturalmente, de aproximação muito grosseira. Utilizemos agora malhas mais apertadas, $h = \ell/4$

$$(w_i)_{exato} = 0{,}00126 \cdot \frac{p.l^4}{D}$$

Exercício: Placa toda engastada

