

Concreto Armado

PEF2604

FAU-USP

Expressões para pré-dimensionamento

Francisco Paulo Graziano e Jose Antonio Lerosa Siqueira

Concreto como material

- Alta resistência à compressão – f_{ck} (resistência característica)
- Baixa resistência à tração – $f_{ctk} = 0,1 f_{ck}$
- Crescimento da resistência com o tempo –
Maturidade - $f_{cj} = \beta f_{ck}$ com j em dias

semanas	1	2	4	9	18	52	150	300
dias	7	14	28	63	126	364	1050	2100
β	0,78	0,90	1,00	1,09	1,14	1,20	1,23	1,25

- Por convenção $f_{ck} = f_{c28}$ com tratamento estatístico (quantil 5% inferior)

Concreto como material

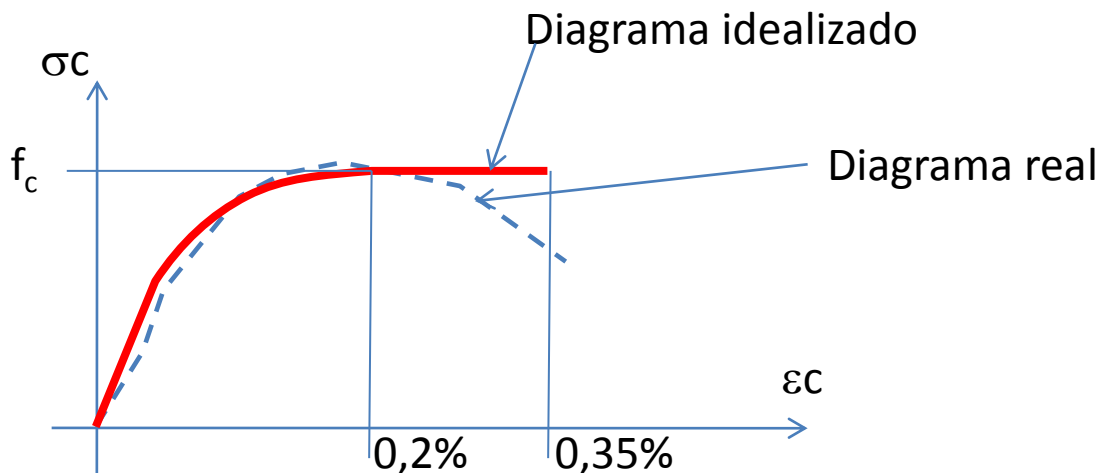
- A carga permanente (mantida no tempo) causa uma perda à resistência do concreto que deve ser considerada igual a 30%. Para este ajuste se projeta todo o crescimento esperado para o concreto (maturidade) e toda a perda esperada para a carga mantida.
- Assim a resistência a ser utilizada será: $0,7 \times 1,25 \times 0,97 f_{ck} = 0,85 f_{ck}$

Coef. Rüsç

Fator de ajuste

Concreto como material

- Desta forma espera-se que com a segurança adequada ao ELU (estado limite último) as tensões de compressão que atuam no concreto não ultrapassem $0,85 f_{cd}$
- Com $f_{cd} = f_{ck} / 1,4$ (valor de cálculo da resistência)



Valores usuais para f_{ck}

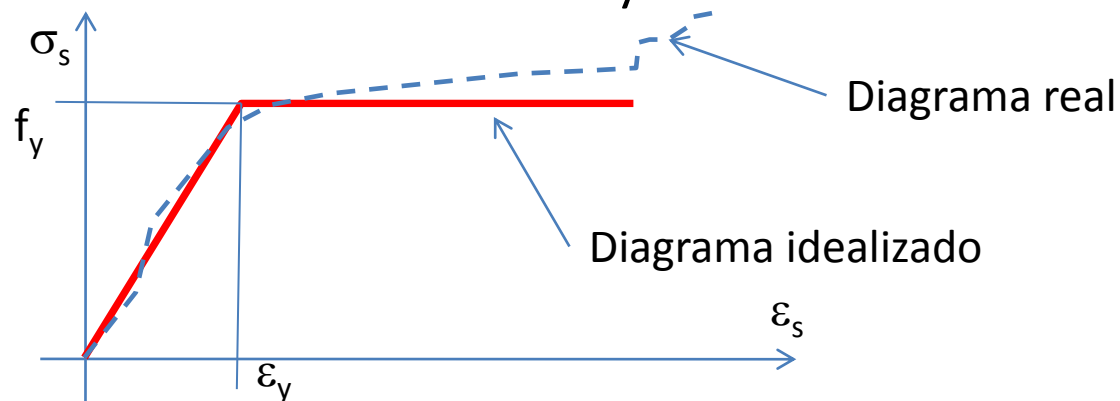
classe

- C20 $f_{ck} = 20\text{MPa}$ sem agressividade ambiental
- C25 $f_{ck} = 25\text{MPa}$ baixa agressividade ambiental
- C30 $f_{ck} = 30\text{MPa}$ media agressividade ambiental
- C35 $f_{ck} = 35\text{MPa}$ alta agressividade ambiental
- C40 $f_{ck} = 40\text{MPa}$ regiões especiais de agressividade
- C45 $f_{ck} = 45\text{MPa}$ regiões especiais de agressividade
- C50 $f_{ck} = 50\text{MPa}$ regiões especiais de agressividade

$$f_{cd} = f_{ck} / \gamma_c \quad \gamma_c = 1,4 \quad \text{coef de minoração do concreto}$$

Aço como material para o concreto armado

- O Aço tem resistência à compressão e à tração iguais.
- O valor de resistência tomado é o referente ao início do escoamento do aço. Este valor é tratado estatisticamente de forma obter-se o a grandeza característica: f_{yk}

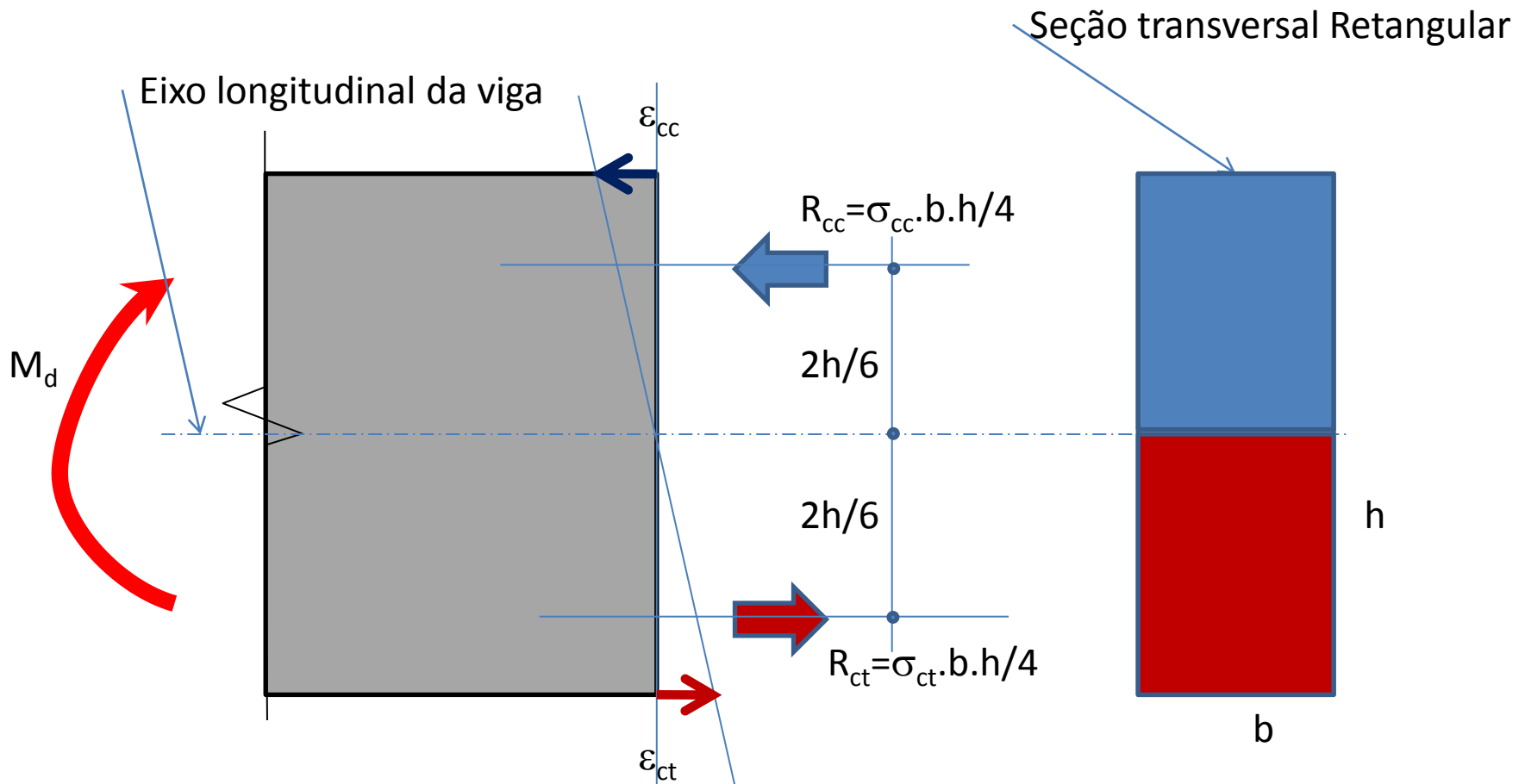


Valores usuais para o aço

Tipo de aço

- CA25 $f_{yk} = 250\text{MPa}$ $f_{yd}=217,4 \text{ MPa}$
- CA50 $f_{yk} = 500\text{MPa}$ $f_{yd}=434,8 \text{ MPa}$
- CA60 $f_{ck} = 600\text{MPa}$ $f_{yd}=521,7 \text{ MPa}$
- $f_{yd}=f_{yk}/\gamma_s$
- $\gamma_s=1,15$ Coeficiente de minoração do aço
- $E_s = 210 \text{ GPa}$ Módulo de elasticidade dos aços

Flexão Simples Concreto Simples



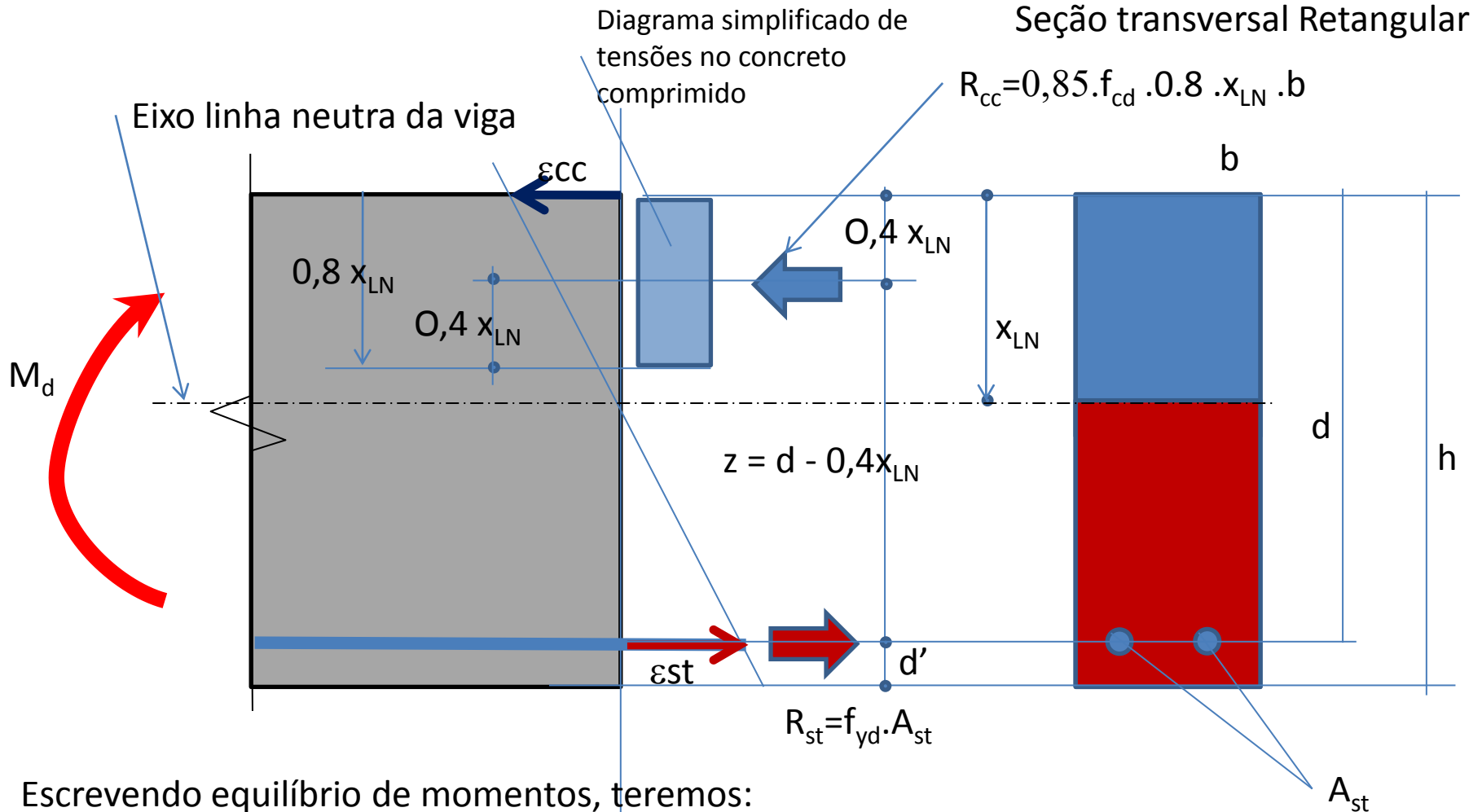
Escrevendo equilíbrio de momentos, teremos:

$$M_d = R_{ct} \cdot 2h/3 = \sigma_{ct} \cdot b \cdot h / 4 \cdot 2h/3 = \sigma_{ct} \cdot b \cdot h^2 / 6$$

$$M_{d,res} = f_{ctd} \cdot b \cdot h^2 / 6$$

Momento que leva o concreto a ruptura por tração

Flexão Simples Concreto Armado



Escrevendo equilíbrio de momentos, teremos:

$$M_d = R_{st} \cdot z = f_{yd} \cdot A_{st} \cdot z = f_{yd} \cdot A_{st} \cdot (d - 0,4 x_{LN}) = 0,8 \cdot x_{LN} \cdot b \cdot 0,85 \cdot f_{cd} \cdot (d - 0,4 x_{LN})$$

Dado M_d obtém-se x_{LN} e então z e A_s necessário.

Flexão Simples Concreto Armado

Seção transversal Retangular

- Simplificação para $f_{ck} \leq 35 \text{ MPa}$:
- Aproximação de $z = 0,8 d$ e $0,8 x_{LN} = 0,8 \cdot 0,5 d$
- Assim: $R_{st} = M_d / (0,8 d)$ e $A_{st} = R_{st} / f_{yd}$
- Para garantir ductilidade na ruptura, deve-se respeitar a relação:

$$A_{st} \leq A_{st,lim}$$

$$\begin{aligned} \text{com } A_{st,lim} &= 0,4 d \cdot b \cdot 0,85 f_{cd} / f_{yd} \\ &= 0,34 \cdot b \cdot d \cdot f_{cd} / f_{yd} \end{aligned}$$

- Se a relação acima não for cumprida, então deve-se acrescentar uma armadura de compressão, de forma que :

$$A_{sc} = A_{st} - A_{st,lim}$$

Flexão Simples Concreto Armado

Seção transversal Retangular

- Simplificação para $35\text{MPa} < f_{ck} \leq 50\text{MPa}$:
- Aproximação de $z = 0,84 d$ e $0,8 x_{LN} = 0,8 \cdot 0,4 d$
- Assim: $R_{st} = M_d / (0,84 d)$ e $A_{st} = R_{st} / f_{yd}$
- Para garantir ductilidade na ruptura, deve-se respeitar a relação:

$$A_{st} \leq A_{st,lim} \text{ com}$$

$$\begin{aligned} A_{st,lim} &= 0,32 d \cdot b \cdot 0,85 f_{cd} / f_{yd} \\ &= 0,272 \cdot b \cdot d \cdot f_{cd} / f_{yd} \end{aligned}$$

- Se a relação acima não for cumprida, então deve-se acrescentar um armadura de compressão, de forma que :

$$A_{sc} = A_{st} - A_{st,lim}$$

Exemplo de dimensionamento à flexão simples

Seção transversal Retangular

Dados

- $b=0,20\text{m}$
- $h=0,60\text{m}$
- concreto C25 e aço CA-50
- $d'=0,1 h= 0,06\text{m}$ (valor assumido inicial)
- $M_k=100 \text{ kNm}$

Exemplo de dimensionamento à flexão simples

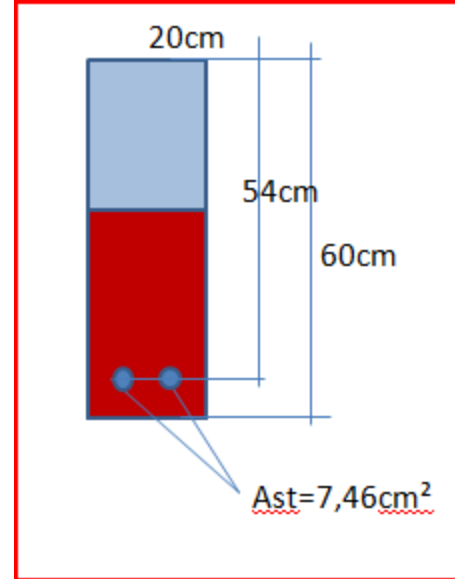
Seção transversal Retangular

Dados

- $b=0,20\text{m}$
- $h=0,60\text{m}$
- concreto C25 e aço CA-50
- $d'=0,1 h= 0,06\text{m}$ (valor assumido inicial)
- $M_k=100\text{ kNm}$

Resolução

EX1



- $A_{st,lim} = 0,34 \cdot b \cdot d \cdot f_{cd}/f_{yd} = 0,34 \times 20 \times 54 \times 0,041 = 15,05\text{ cm}^2$
 - Com $f_{cd}/f_{yd} = (25/1,4) / (500/1,15) = 0,041$
 - $R_{st} = M_d / (0,8d) = 100 \times 1,4 / (0,8 \times 0,54) = 324,07\text{ kN}$
 - $A_{st} = R_{st} / f_{yd} = 324,07 / (500/1,15) \times 10 = 7,46\text{ cm}^2$
 - Como $A_{st} < A_{st,lim} \rightarrow$ não há A_{sc} .
- Acerto dimensional

Exemplo de dimensionamento à flexão simples

Seção transversal Retangular

Dados

- $b=0,20\text{m}$
- $h=0,60\text{m}$
- concreto C25 e aço CA-50
- $d'=0,1 h= 0,06\text{m}$ (valor assumido inicial)
- **$M_k=250 \text{ kNm}$**

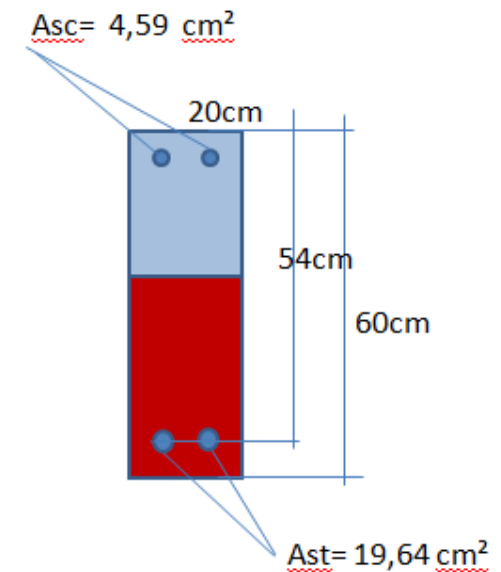
Exemplo de dimensionamento à flexão
simples Seção transversal Retangular

Dados

- $b=0,20\text{m}$
- $h=0,60\text{m}$
- concreto C25 e aço CA-50
- $d'=0,1 h= 0,06\text{m}$ (valor assumido inicial)
- **$M_k=250 \text{ kNm}$**

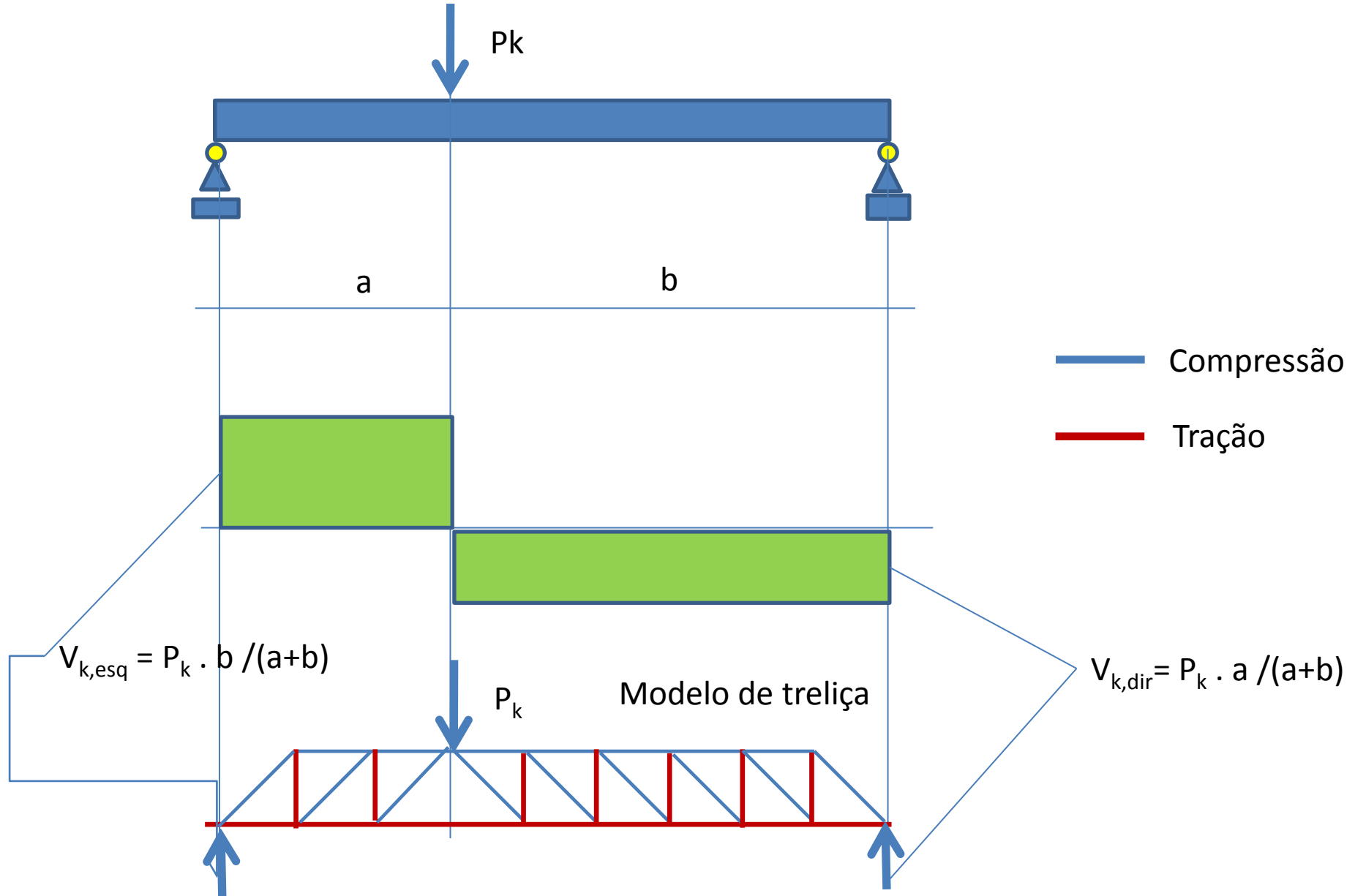
Resolução

EX2

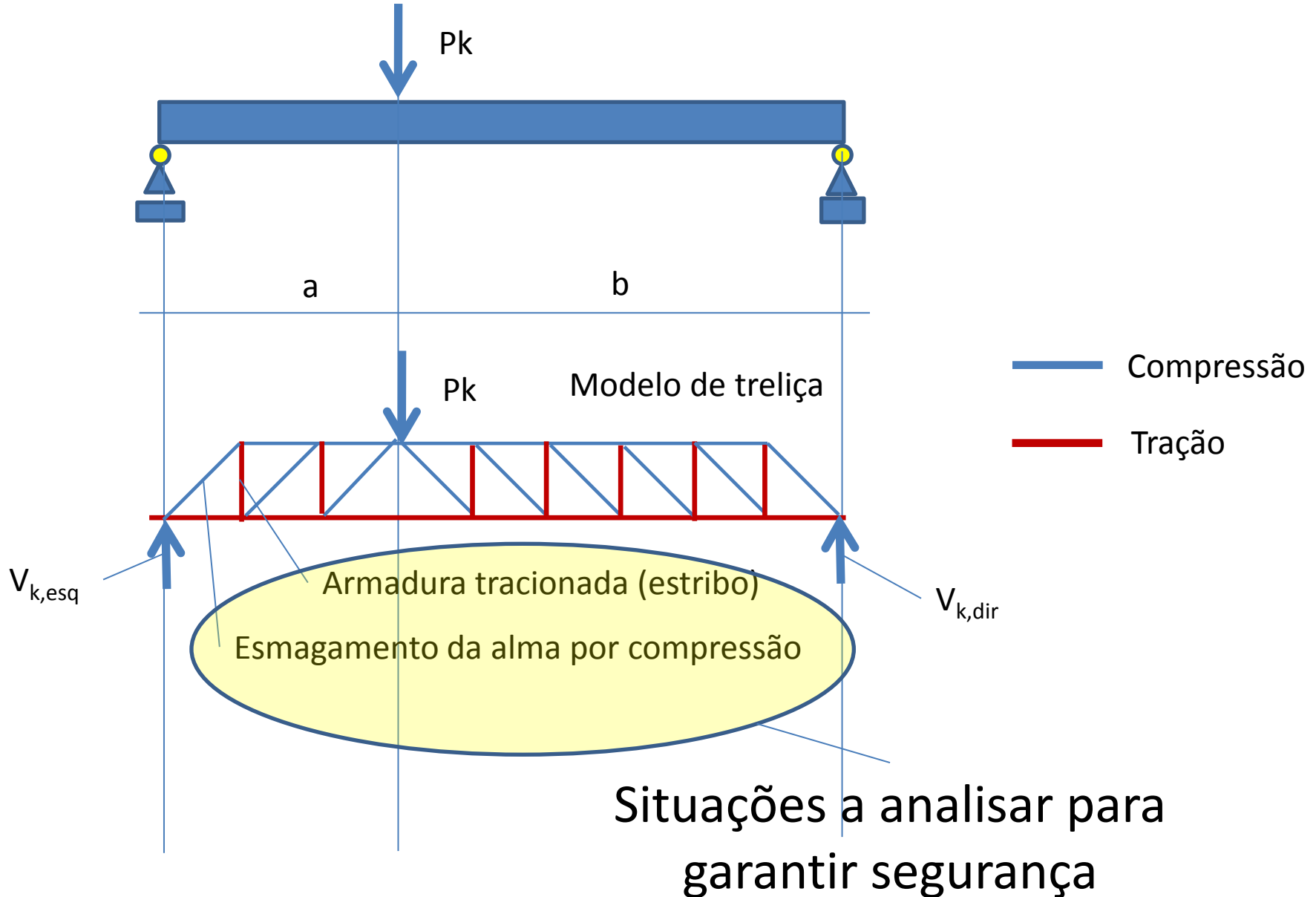


- $A_{st,lim} = 15,05 \text{ cm}^2$ (idem exercício anterior)
- $R_{st} = M_d / (0,8d) = 250 \times 1,4 / (0,8 \times 0,54) = 810,19 \text{ kN}$
- $A_{st} = R_{st} / f_{yd} = 810,19 / (500 / 1,15) \times 10 = 19,64 \text{ cm}^2$
- Como $A_{st} > A_{st,lim} \rightarrow$ há A_{sc}
- $A_{sc} = A_{st} - A_{st,lim} = 19,64 - 15,05 = 4,59 \text{ cm}^2$

Dimensionamento ao Cortante



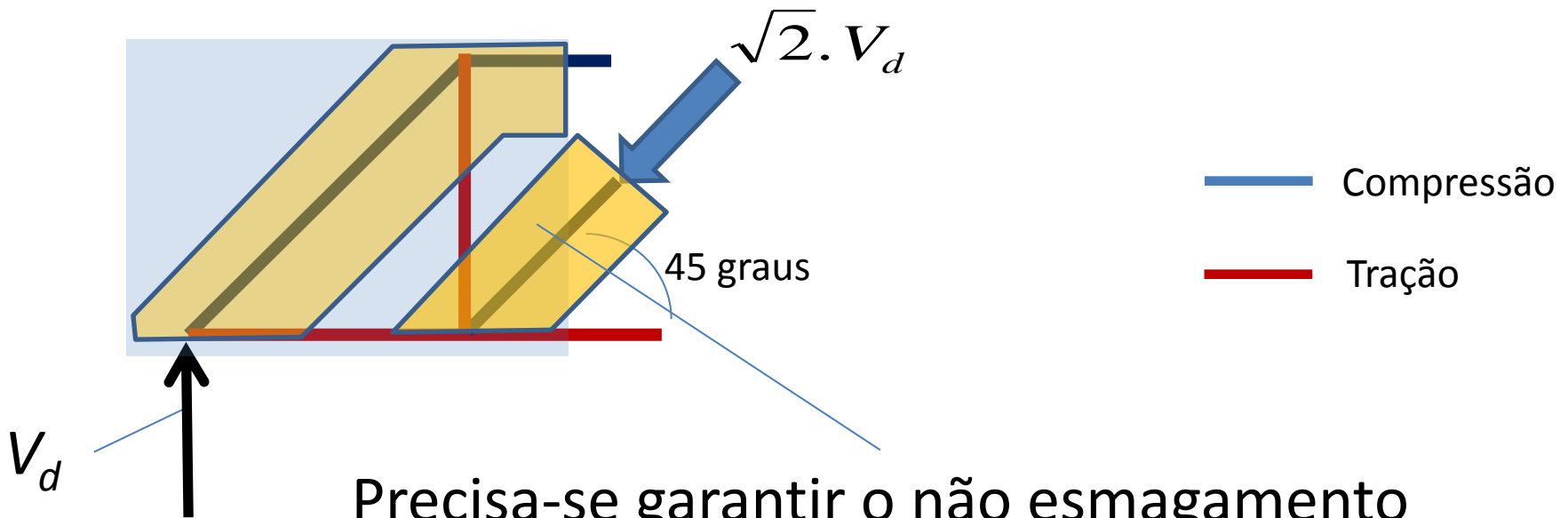
Dimensionamento ao Cortante



Dimensionamento ao Cortante

Compressão da alma de concreto

Extremidade esquerda da viga



Precisa-se garantir o não esmagamento da alma da viga

Dimensionamento ao Cortante

Verificação ao esmagamento do concreto da alma

- V_k — Solicitação característica de Força Cortante
- $V_d = \gamma_f \cdot V_k = 1,4 \cdot V_k$ Solic. de Cálculo ...
- **$V_{Rd2} = 0,27 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d$** Força Cortante Resistente na alma de concreto (acima deste valor a alma da viga é rompida por esmagamento)
- Portanto: $V_d \leq V_{Rd2}$ é necessário

$$\alpha_{v2} = 1 - f_{ck}/250$$

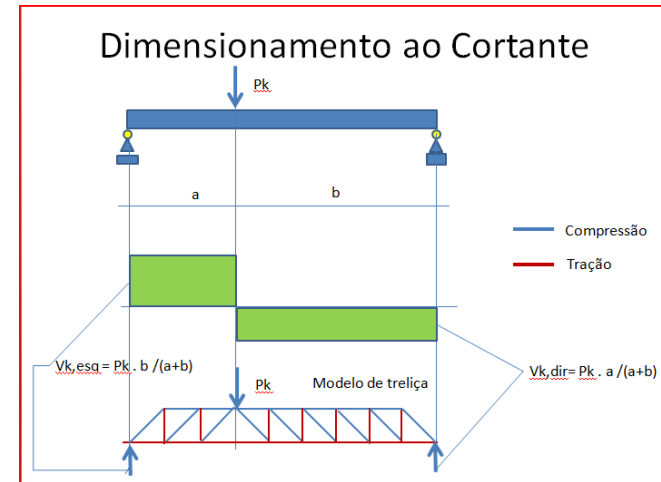
fck (MPa)	20	25	30	35	40	45	50
α_{v2}	0,92	0,90	0,88	0,86	0,84	0,82	0,80

Exemplo de dimensionamento ao cortante

Seção transversal Retangular

Dados

- $b=0,20\text{m}$
- $h=0,60\text{m}$
- concreto C25 e aço CA-50
- $d'=0,1 h= 0,06\text{m}$ (valor assumido inicial)
- $V_k=300\text{ kN}$



Verificar a segurança da alma de concreto

EX3

Exemplo de dimensionamento ao
cortante Seção transversal Retangular

Dados

- $b=0,20\text{m}$
- $h=0,60\text{m}$
- concreto C25 e aço CA-50
- $d'=0,1 h=0,06\text{m}$ (valor assumido inicial)
- $V_k=300\text{ kN}$

Verificar a segurança da alma de concreto

Resolução EX3



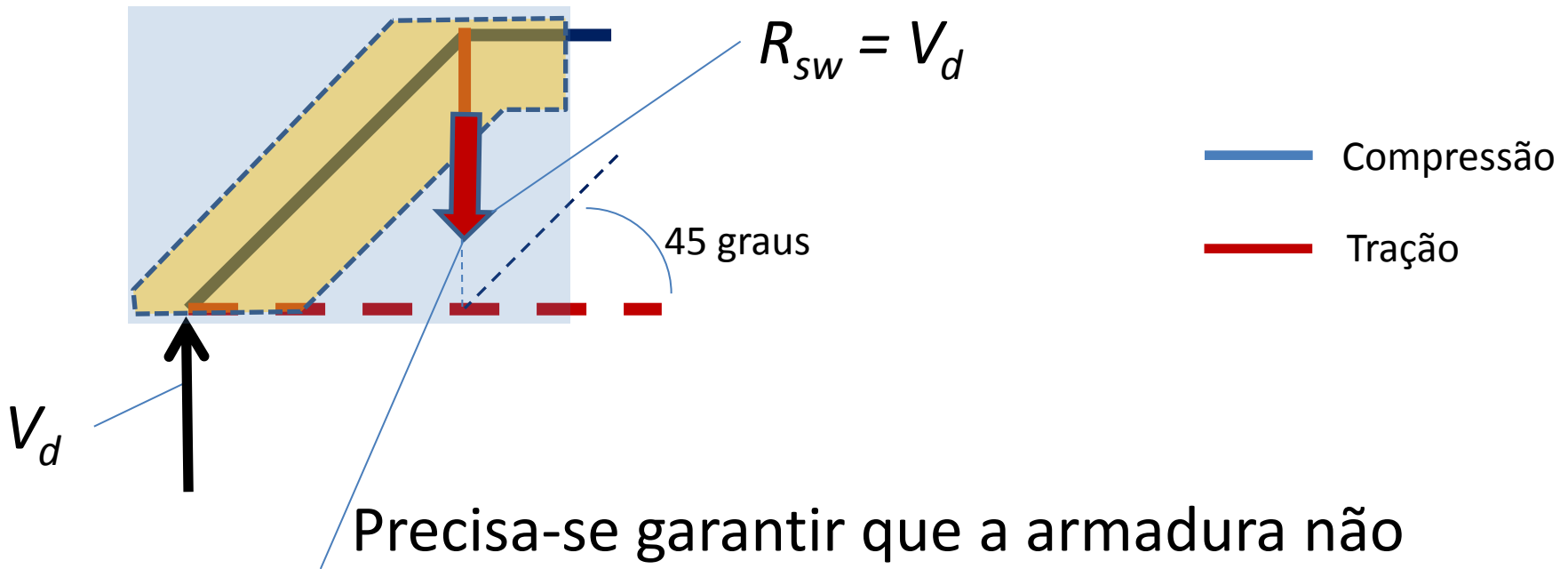
f_{ck} (MPa)	20	25	30	35	40	45	50
α_{v2}	0,92	0,90	0,88	0,86	0,84	0,82	0,80

- $\alpha_{v2} = 0,9$
- $V_{Rd2} = 0,27 \times 0,9 \times 25000 / 1,4 \times 0,2 \times 0,54$
 $= 468,64\text{ kN}$
- $V_{Sd} = 300 \times 1,4 = 420\text{ kN}$
- $V_{Sd} < V_{Rd2}$
- **Ok ! Segurança da alma de concreto verificada**

Dimensionamento ao Cortante

Tração na armadura do estribo

Extremidade esquerda da viga



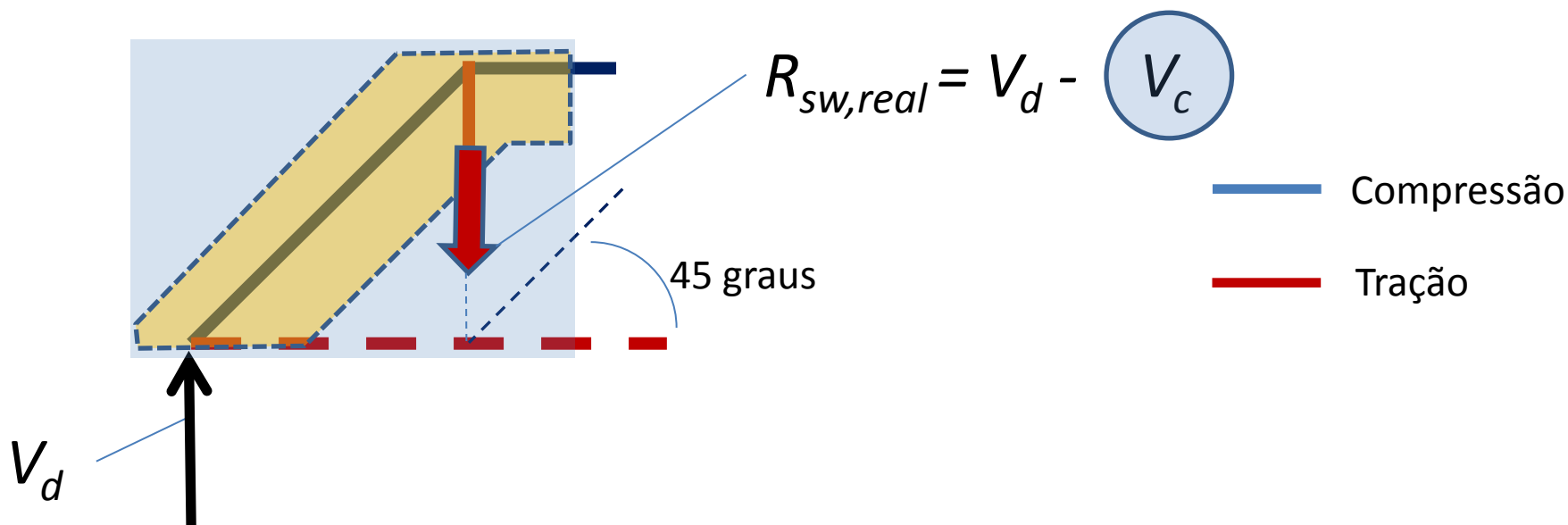
Precisa-se garantir que a armadura não rompa por tração

Dimensionamento ao Cortante

Tração na armadura do estribo

Extremidade esquerda da viga

Obtido em ensaios

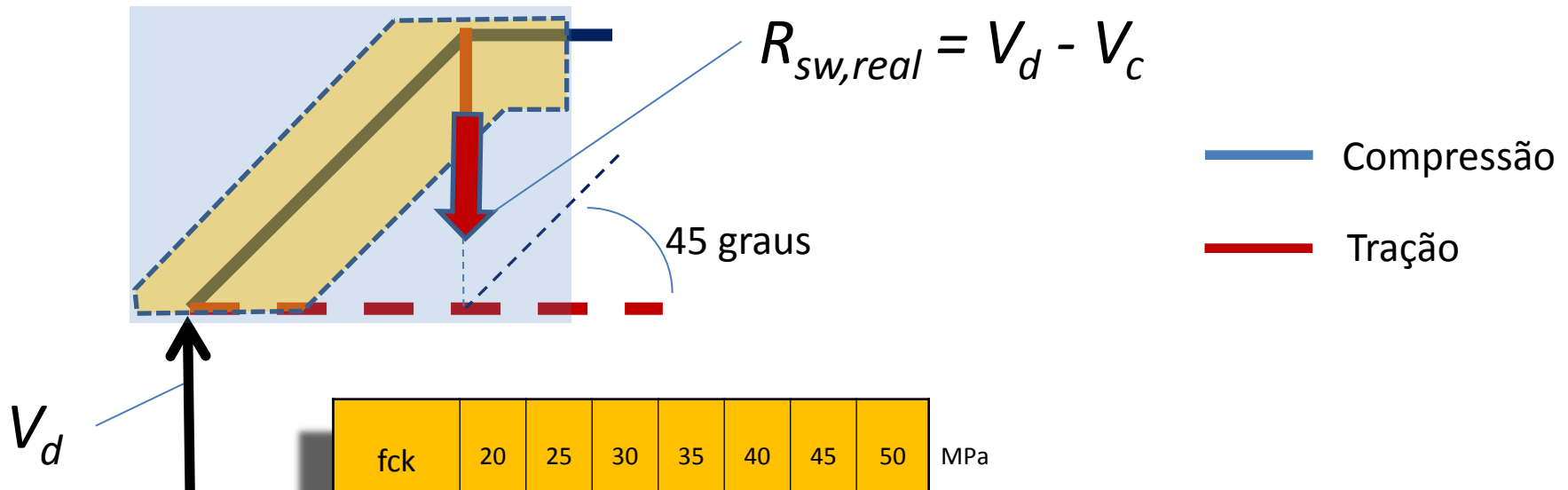


A força real no estribo é menor do que a determinada pelo modelo matemático

Tração na armadura do estribo

Extremidade esquerda da viga

Obtido em ensaios



fck	20	25	30	35	40	45	50	MPa
fctd	1,11	1,28	1,45	1,60	1,75	1,90	2,04	MPa
τ_{cd}	660	770	870	960	1050	1140	1220	kN/m ²

$$V_c = \tau_{cd} \cdot b \cdot d$$

Atenção τ_{cd} em kN/m²

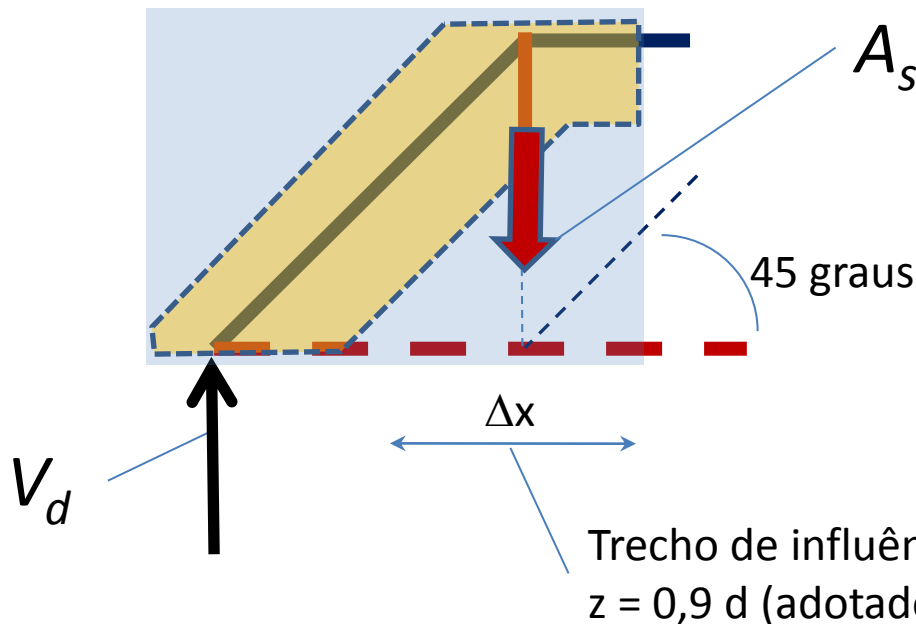
Dimensionamento ao Cortante

Tração na armadura do estribo

Extremidade esquerda da viga

Área de aço dos estribos

$$A_{sw} = \frac{R_{sw}}{f_{yd,w}}$$



$$A_{sw/s} = \frac{Vsd - Vc}{f_{yd,w} \cdot 0,9d}$$

$$c/ f_{yd,w} = f_{yd} \leq 435 \text{ MPa}$$

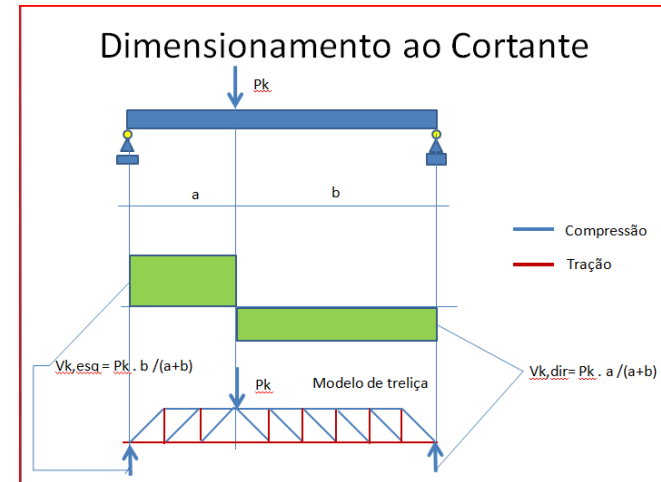
Área de aço dos estribos por unidade de comprimento de viga

Exemplo de dimensionamento ao cortante

Seção transversal Retangular

Dados

- $b=0,20\text{m}$
- $h=0,60\text{m}$
- concreto C25 e aço CA-50
- $d'=0,1 h= 0,06\text{m}$ (valor assumido inicial)
- $V_k=300\text{ kN}$



Determinar a armadura dos estribos

EX4

Exemplo de dimensionamento ao cortante

Seção transversal Retangular

Dados

- $b=0,20\text{m}$
- $h=0,60\text{m}$
- concreto C25 e aço CA-50
- $d'=0,1$ $h=0,06\text{m}$ (valor assumido inicial)
- $V_k=300\text{ kN}$

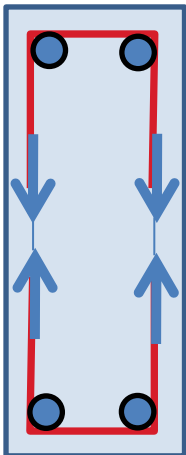
Determinar a armadura dos estribos

Resolução EX4

f_{ck}	20	25	30	35	40	45	50	MPa
f_{ctd}	1,11	1,28	1,45	1,60	1,75	1,90	2,04	MPa
τ_{cd}	660	770	870	960	1050	1140	1220	kN/m ²

- $V_c = \tau_{cd} \cdot b \cdot d = 770 \times 0,2 \times 0,54 = 83,16\text{ kN}$
- $A_{sw}/s = (300 \times 1,4 - 83,16) / (43,5 \times 0,9 \times 0,54) = 15,94\text{ cm}^2/\text{m}$

f_{ywd} em kN/cm²



1 estribo tem duas pernas, pelo menos, assim, deve-se dividir a área de aço pelo número de pernas.

No nosso caso adotaremos 1 estribo de 2 pernas, portanto:

$$A_{sw}/s, 1 \text{ perna} = 7,97\text{ cm}^2/\text{m}$$

Exemplo de dimensionamento ao cortante

Seção transversal Retangular

Dados

- $b=0,20\text{m}$
- $h=0,60\text{m}$
- concreto C25 e aço CA-50
- $d'=0,1h=0,06\text{m}$ (valor assumido inicial)
- $V_k=300\text{ kN}$

Determinar a armadura dos estribos

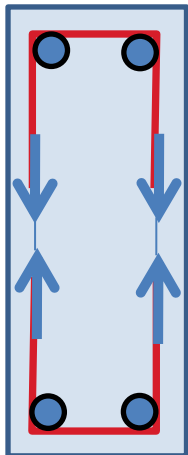
Resolução EX4

CONTINUAÇÃO

$$A_{sw/s, 1 \text{ perna}} = 7,97 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Vamos determinar o número de barras por comprimento longitudinal de viga (o esforço cortante se desenvolve ao longo do comprimento da viga).

Para isto se faz necessário conhecer o que os fornecedores de aço oferecem ao mercado. Vejamos a tabela abaixo, onde relacionamos o diâmetro da barra em mm e a área correspondente em cm^2 .



Diam	As(cm^2)
5.0	0,2
6.3	0,315
8.0	0,5
10.0	0,8
12.5	1,25
16	2,0
20	3,15
25	5,0

O espaçamento entre estribos mínimo deve ser 10 cm e de no máximo uma distância igual à metade altura da viga .

No nosso caso, $10 \text{ cm} \leq s \leq 30 \text{ cm}$

Vamos admitir inicialmente $s=20\text{cm}$ e teremos que o $A_{s,nec}$ para 1 perna a cada 20 cm será de $0,2 \cdot 7,97 = 1,54 \text{ cm}^2$ daria ferro de 16mm muito alto!

Vamos impor ferro de 12.5mm $\rightarrow A_s = 1,25 \text{ cm}^2$ e determinar o espaçamento: $s = 1,25 / 7,97 = 0,156 \text{ m}$ assim adotamos $s=15\text{cm}$...

Exemplo de dimensionamento ao cortante

Seção transversal Retangular

Dados

- $b=0,20\text{m}$
- $h=0,60\text{m}$
- concreto C25 e aço CA-50
- $d'=0,1$ $h=0,06\text{m}$ (valor assumido inicial)
- $V_k=300\text{ kN}$

Determinar a armadura dos estribos

Resolução EX4

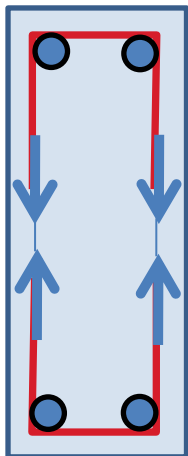
CONTINUAÇÃO

$$A_{sw}/s, 1 \text{ perna} = 7,97 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$\phi 12.5 \text{ c/ } 15\text{cm}$ (como obtido)

Vejamos que estes estribos são suficiente, refazendo o cálculo ao contrário:

$$A_{s,\text{escolhido}} = 2 \times 1,25 / 0,15 = 16,66 \text{ cm}^2/\text{m} \text{ superior ao necessário calculado de } 15,94 \text{ cm}^2/\text{m}$$



Diam	$A_s(\text{cm}^2)$
5.0	0,2
6.3	0,315
8.0	0,5
10.0 →	0,8
12.5	1,25
16	2,0
20	3,15
25	5,0

Se agora quiséssemos impor um $\phi 10\text{mm}$ na tabela obteríamos a área correspondente de $0,8\text{cm}^2$ e verificaríamos que o espaçamento necessário seria:

$$s = 0,8 / 7,97 = 0,10\text{m} \text{ ou seja } 10 \text{ cm}$$

Também possível de ser utilizado!

$$A_{s,\text{escolhido}} = 2 \times 0,8 / 0,10 = 16,0 \text{ cm}^2/\text{m}$$

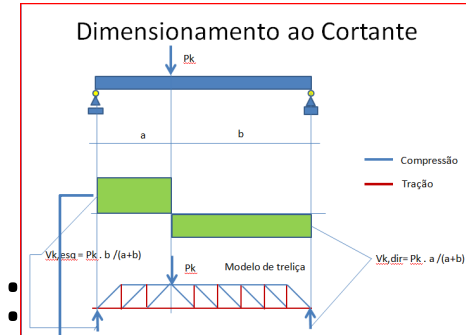
superior ao necessário calculado de $15,94 \text{ cm}^2/\text{m}$

Mas mais econômico que a escolha anterior

Resumindo

- Quando se faz o dimensionamento ao cortante a sequência é a seguinte:

- Escolhe o cortante da seção mais solicitada
- Verificar o esmagamento da diagonal comprimida ($V_{sd} \leq V_{Rd2}$)
- Determinar a área de aço necessária ao estribo
- Escolher a bitola (ϕ) e o espaçamento (s) dos estribos



$$V_{Rd2} = 0,27 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d$$

$$A_{sw/s} = \frac{V_{sd} - V_c}{f_{yd,w} \cdot 0,9d}$$

f_{ck}	20	25	30	35	40	45	50	MPa
f_{ctd}	1,11	1,28	1,45	1,60	1,75	1,90	2,04	MPa
τ_{cd}	660	770	870	960	1050	1140	1220	kN/m ²

$$V_c = \tau_{cd} \cdot b \cdot d$$

Atenção τ_{cd} em kN/m²

Armadura mínima de estribo

- Para fins desta disciplina adotaremos a armadura mínima como:
- $(A_{sw}/s)_{MIN} = 0,14 \times b_w$
- Com A_{sw}/s em cm^2/m
- b_w em cm
- Por exemplo, para $b_w = 20\text{cm}$,
 $(A_{sw}/s)_{MIN} = 2,8\text{cm}^2/\text{m}$

Corte da nossa viga exemplo na pior condição

