

Transformações conformes e problemas de condições de contorno em eletrostática

Edivaldo Moura Santos

3 de Setembro de 2019

Essas notas são essencialmente um apanhado de resultados dos capítulos 2, 3, 4, 8 e 9 de:

- *Variáveis Complexas e suas Aplicações*, Ruel V. Churchill, McGraw-Hill.

com o intuito de fazer uma introdução rápida ao tópico de aplicações de variáveis complexas na solução de alguns problemas de eletrostática que podem ser reduzidos a duas dimensões.

1 Funções complexas e suas derivadas

Uma função complexa f é um mapeamento no plano complexo

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto w \end{aligned}$$

para $z = x + iy \in \mathbb{C}$ e $w = u + iv \in \mathbb{C}$, sendo $u(x, y)$ e $v(x, y)$ funções reais de duas variáveis:

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} & v : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto u(x, y) & (x, y) &\longmapsto v(x, y) \end{aligned}$$

A derivada $f'(z_0)$ de uma função $f(z)$ no ponto $z = z_0$ é definida como

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = a + ib, \quad (1)$$

ou seja

$$\lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \operatorname{Re} \left(\frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} \right) = a \quad \text{e} \quad \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \operatorname{Im} \left(\frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} \right) = b, \quad (2)$$

com

$$\Delta u = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) \quad \text{e} \quad \Delta v = v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0). \quad (3)$$

Definida da maneira acima, a derivada de $f(z)$ existe em z_0 se o limite anterior existe e independe do caminho no plano tomado quando $\Delta z \rightarrow 0$.

Exemplo 1.1. $f(z) = z^2$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z_0 + \Delta z)^2 - z_0^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{z_0^2 + 2z_0\Delta z + \Delta z^2 - z_0^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} 2z_0 + \Delta z = 2z_0$$

2 Condições de Cauchy-Riemann

Uma pergunta natural que surge da definição de derivada anterior é: quais as condições suficientes para garantir a independência de caminho na operação de limite envolvida na derivada de $f(z)$?

Tomemos então dois caminhos distintos na operação limite da equação 2. O primeiro com $\Delta y = 0$ e, portanto, $\Delta z = \Delta x$. Para a parte real, temos

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{Re} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0) + i[v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)]}{\Delta x} \\ = & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{(x_0, y_0)} = a \end{aligned}$$

e para a parte imaginária

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{Im} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0) + i[v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)]}{\Delta x} \\ = & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{(x_0, y_0)} = b \end{aligned}$$

De forma semelhante, se tomarmos agora o caminho $\Delta x = 0$, ou seja, $\Delta z = i\Delta y$, temos

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \operatorname{Re} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) + i[v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)]}{i\Delta y} \\ = & \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta y} = \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_{(x_0, y_0)} = a \end{aligned}$$

e para a parte imaginária

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \operatorname{Im} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) + i[v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)]}{i\Delta y} \\ = & \lim_{\Delta y \rightarrow 0} -\frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta y} = -\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{(x_0, y_0)} = b \end{aligned}$$

Concluimos então que para que o limite seja independente do caminho, devemos ter

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad (4)$$

conhecidas como as *condições de Cauchy-Riemann*.

Com base nesses cálculos, dois teoremas podem ser demonstrados (ver prova em [1])

Teorema 2.1. *Se a derivada $f'(z)$ de uma função $f = u + iv$ existe num ponto z , então as derivadas parciais de primeira ordem, em relação a x e y , de cada uma das partes u e v , existem nesse ponto e satisfazem as condições de Cauchy-Riemann. Além disso, $f'(z)$ é dada em termos dessas derivadas parciais de acordo com*

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \quad (5)$$

Teorema 2.2. *Sejam $u(x, y)$ e $v(x, y)$ funções reais de x e y as quais, juntamente com suas derivadas parciais primeiras são contínuas num ponto $z_0 = x_0 + iy_0$. Se u e v satisfazem as condições de Cauchy-Riemann nesse ponto, então a derivada $f'(z_0)$ de $f(x + iy) = u + iv$ existe em z_0 .*

Exemplo 2.1. $f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y$

Vemos que para essa função as condições de Cauchy-Riemann são satisfeitas

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y$$

e então

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z$$

Exemplo 2.2. $f(z) = \log(z) = \log(|z|e^{i\theta}) = \ln|z| + i\theta$ se $r > 0$

Se tomarmos agora $-\pi < \Theta \leq \pi$, podemos escrever

$$\log(z) = \ln r + i(\Theta \pm 2n\pi) \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

com $r = |z|$, isto é, $\log(z)$ é uma função multivalente. O valor principal ou ramo principal de $\log(z)$ é dado por

$$\log(z) = \ln r + i\Theta \quad (r > 0, -\pi < \Theta \leq \pi)$$

e, definido desta forma, possui uma descontinuidade sobre o eixo x negativo, onde $\Theta = \pi$ sobre o eixo e $\Theta = -\pi$ imediatamente abaixo dele. Entretanto, se restringirmos Θ ao intervalo $-\pi < \Theta < \pi$, o ramo principal de $\log(z)$ passa a ser contínuo nesse domínio (exceto em $r = 0$) e temos que

$$u = \ln r = \ln(x^2 + y^2)^{1/2} \quad e \quad v = \Theta = \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right),$$

logo, a função satisfaz as condições de Cauchy-Riemann, já que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{1}{r} \cos \Theta \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{r} \sin \Theta$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\sec^2 \Theta} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{1}{r} \sin \Theta \quad e \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\sec^2 \Theta} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{r} \cos \Theta$$

A derivada de $\log(z)$ é dada então por

$$\frac{d}{dz} \log(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{r} (\cos \Theta - i \sin \Theta) = \frac{1}{z}$$

3 Funções analíticas

Definição: Uma função $f(z)$ se diz analítica num ponto z_0 se sua derivada $f'(z)$ existe não somente em z_0 como também em todo ponto z de uma vizinhança de z_0 . As funções z^2 e e^z são analíticas em todo o plano complexo, enquanto o ramo principal de $\log(z)$ é analítica no domínio $r > 0$, $-\pi < \theta < \pi$ (ou seja, excluindo-se o eixo x negativo e a origem).

4 Funções harmônicas conjugadas

Seja uma função $f = u + iv$ analítica num domínio de \mathbb{C} , então de acordo com o teorema 2.1 em todo ponto do domínio temos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

e portanto derivando uma vez mais, temos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

bem como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Logo,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \quad (6)$$

ou seja, u e v são soluções da *equação de Laplace*. Portanto, funções u e v que satisfazem as condições de Cauchy-Riemann são também *funções harmônicas*. As partes real e imaginária de uma função analítica são, portanto, harmônicas. Duas funções u e v são ditas *harmônicas conjugadas*, se a função complexa $f = u + iv$ é analítica.

Teorema 4.1. *Sejam u e v funções harmônicas conjugadas. Suas curvas de nível são as famílias de curvas $u(x, y) = c_1$ e $v(x, y) = c_2$. Estas famílias de curvas são ortogonais. Mais precisamente, em cada ponto $z_0 = x_0 + iy_0$ comum às duas curvas, as tangentes (ou as normais) a elas são perpendiculares, desde que $f'(z_0) \neq 0$, onde $f = u + iv$.*

Demonstração. A variação de u ao longo de $u = c_1$ é zero, logo, para um deslocamento infinitesimal $d\mathbf{r}_1 = dx \hat{\mathbf{x}} + dy \hat{\mathbf{y}}$ ao longo de $u = c_1$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = \nabla u \cdot d\mathbf{r}_1 = 0$$

e de forma análoga para a variação de v ao longo de $v = c_2$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = \nabla v \cdot d\mathbf{r}_2 = 0.$$

Logo, os vetores gradientes de u e v , ∇u e ∇v , são perpendiculares às respectivas curvas de nível. Como u e v satisfazem as condições de Cauchy-Riemann, esses vetores são perpendiculares entre si num ponto z_0 comum às duas curvas

$$\nabla u \cdot \nabla v = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

□

5 Transformações conformes

Aqui estamos interessados em analisar o mapeamento por uma função analítica $f(z)$ de uma região na vizinhança de um ponto z_0 onde $f'(z_0) \neq 0$, ou seja

$$f'(z_0) = |f'(z_0)|e^{i\psi_0} = R_0e^{i\psi_0} \quad (R_0 > 0) \quad (7)$$

Em particular, gostaríamos de estudar as relações entre uma curva C no plano z e sua imagem segundo $f(z)$ no plano w (figura 1).

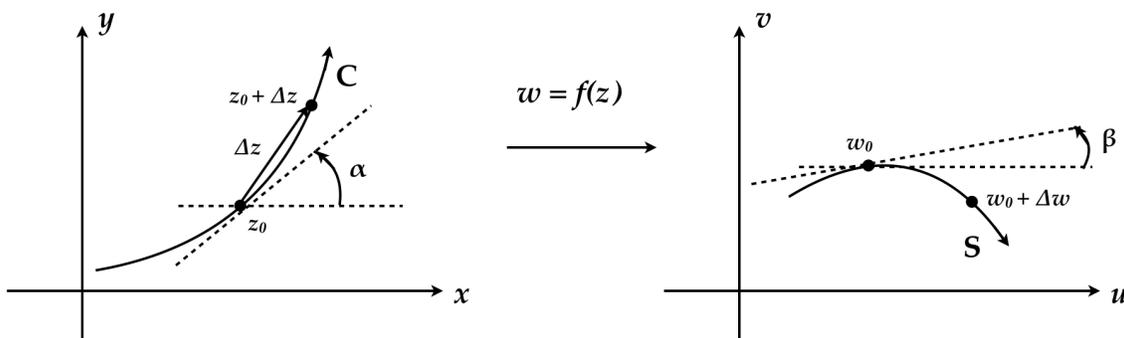


Figura 1: Mapeamento da vizinhança de um ponto z_0 por uma função analítica $f(z)$ tal que $f'(z_0) \neq 0$.

Como $\Delta w = f'(z_0)\Delta z$, temos que

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} |\Delta w|e^{i\arg(\Delta w)} = \left(\lim_{\Delta z \rightarrow 0} |\Delta z|e^{i\arg(\Delta z)} \right) R_0e^{i\psi_0}, \quad (8)$$

ou seja

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} |\Delta w| = \left(\lim_{\Delta z \rightarrow 0} |\Delta z| \right) R_0 \quad (9)$$

e

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg(\Delta w) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg(\Delta z) + \psi_0 \quad (10)$$

De acordo com a figura 1, temos então que

$$\beta = \alpha + \psi_0,$$

ou seja, a curva tangente a C em z_0 gira de um ângulo ψ_0 sob a transformação $f(z)$ com $f'(z_0) \neq 0$. Perceba também que qualquer curva C passando por z_0 tem uma tangente que girará do mesmo ângulo ψ_0 , pois este só depende do ponto z_0 . Dessa forma, tal transformação preserva o ângulo entre curvas que se cruzam em z_0 (ver figura 2).

Além disso, na vizinhança de z_0 , temos

$$|\Delta w| = |f'(z_0)\Delta z| = R_0|\Delta z|, \quad (11)$$

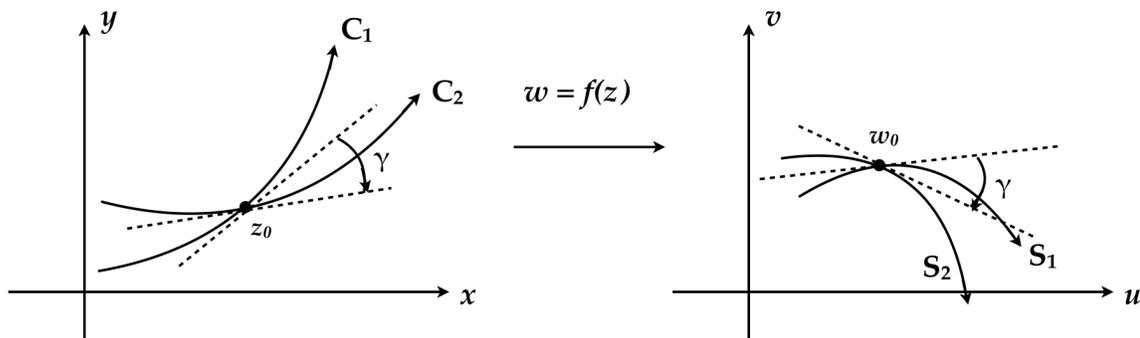


Figura 2: O ângulo entre duas curvas C_1 e C_2 que se cruzam em z_0 é preservado pela transformação por $f(z)$ com $f'(z_0) \neq 0$.

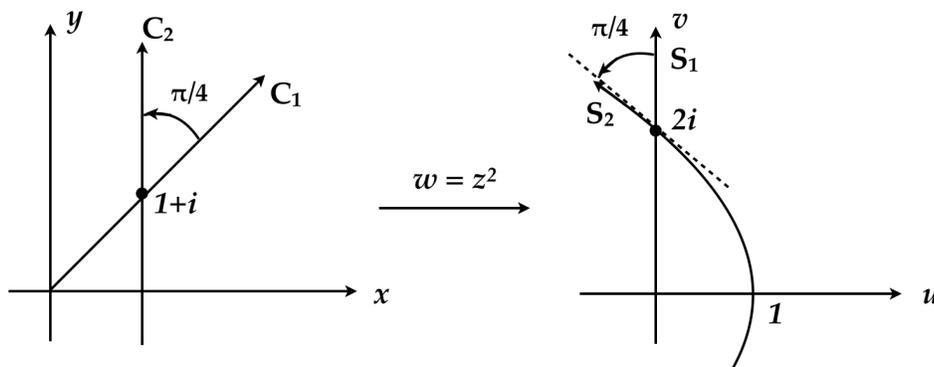
ou seja, $f(z)$ altera os comprimentos de segmentos em torno de z_0 de um fator R_0 .

Transformações no plano complexo que preservam o ângulo em valor absoluto e sentido entre pares de curvas que se cruzam em cada ponto de um domínio são ditas *conformes*. Sendo assim, em cada ponto de um domínio onde f é analítica e $f'(z) \neq 0$, a transformação $w = f(z)$ é conforme. Localmente, transformações conformes são simples no sentido de que podem sempre ser vistas como expansões ou contrações dos comprimentos no entorno de um ponto, juntamente com rotações em torno do mesmo ponto.

Exemplo 5.1. $w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$

Temos então que

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$$



O ângulo entre as retas C_1 ($y = x$) e C_2 ($x = 1$) é claramente $\pi/4$. Após o mapeamento por $w = z^2$, temos que a imagem da reta C_1 corresponde a S_1 ($u = 0$ e $v = 2x^2$), enquanto para a reta C_2 , temos como imagem S_2 ($u = 1 - y^2$ e $v = 2y$), ou seja, $u = 1 - v^2/4$ sobre S_2 . Logo,

o ângulo entre S_1 e S_2 no plano- w é

$$\tan \alpha = - \left. \frac{du}{dv} \right|_{v=2} = 1 \implies \alpha = \pi/4$$

Exemplo 5.2. $w = \frac{i-z}{i+z}$ (transformação fracionária)

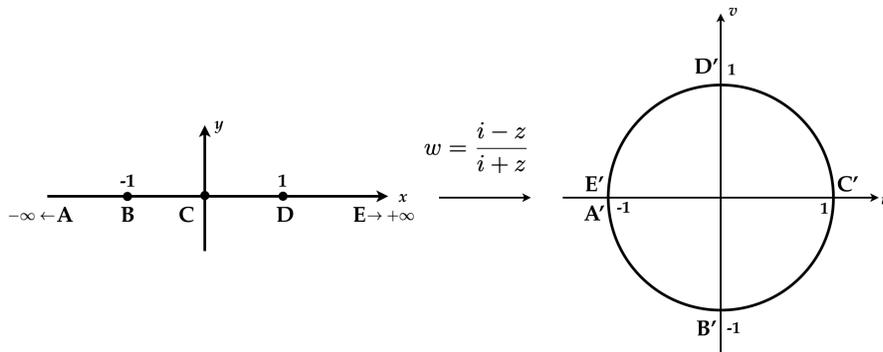
A função w acima tem uma singularidade em $z = -i$. No semi-plano $y \geq 0$, $f(z)$ é analítica e $f'(z) \neq 0$. Logo, $f(z) = \frac{i-z}{i+z}$ é conforme em $y \geq 0$.

Em particular, a transformação leva o eixo x ($y = 0$) na imagem

$$w = \frac{i-x}{i+x} \implies |w| = 1,$$

ou seja, a transformação mapeia o eixo x do plano- z num círculo unitário no plano- w . Sobre esse círculo

$$w = \frac{i-x}{i+x} = \frac{1-x^2+2ix}{1+x^2} \implies \phi = \arg(w) = \operatorname{atan} \left(\frac{2x}{1-x^2} \right)$$



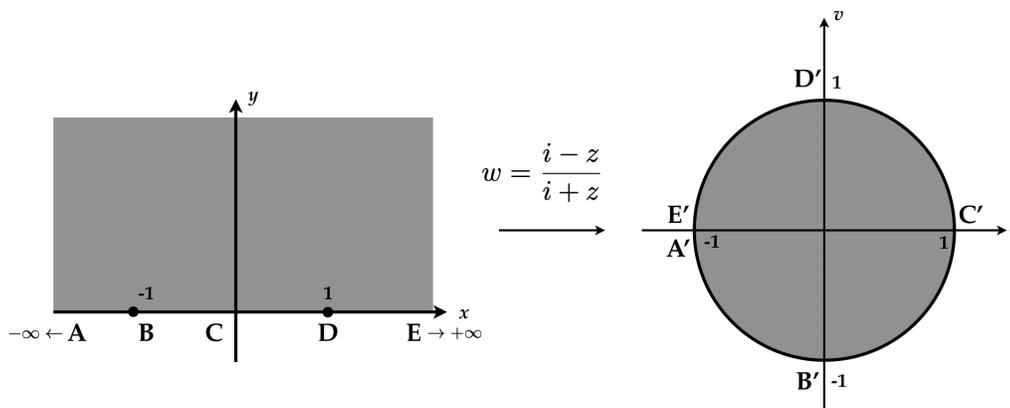
Já para a região $y > 0$

$$w = \frac{i-x-iy}{i+x+iy} \implies |w|^2 = 1 - \frac{4y}{x^2 + (1+y)^2} \leq 1$$

Logo, a função

$$w = \frac{i-z}{i+z}$$

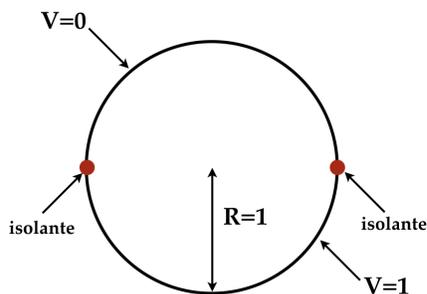
mapeia o semi-plano $y \geq 0$ no disco $|w| \leq 1$, levando o eixo x no círculo $|w| = 1$ e todas as retas perpendiculares a esse eixo nos raios do disco.



6 Aplicações a problemas de condições de contorno

Vimos na seção 4 que as partes real (u) e imaginária (v) de uma função analítica $f(z)$ são harmônicas, isto é, são soluções da equação de Laplace em duas dimensões. Dessa forma, u e v são soluções de problemas de eletrostática. Na prática, o que temos é o problema inverso: temos um problema de eletrostática em que certas condições de contorno devem ser satisfeitas e queremos determinar qual função (u ou v) satisfaz tais condições.

Problema: Um cilindro oco longo de raio unitário é feito de uma chapa delgada de material condutor. O cilindro é cortado em duas partes iguais ao longo de um dos diâmetros da seção transversal circular. As duas partes são então separadas por uma faixa fina de material isolante, sendo a parte superior mantida a potencial $V = 0$ e a parte inferior a $V = 1$ em unidades arbitrárias. Queremos determinar o potencial eletrostático $V(x, y)$ em toda a região interior ao cilindro e esboçar as linhas de campo elétrico \mathbf{E} nessa mesma região.



O problema matemático se resume a encontrar uma função harmônica $V(x, y)$ satisfazendo a equação de Laplace no interior do cilindro e as condições de contorno $V = 0$ na parte superior do cilindro e $V = 1$ na parte inferior. No plano xy é difícil de determinar quais possíveis funções harmônicas satisfazem tais condições. Um mapeamento via transformações conformes pode nos auxiliar nesta tarefa.

Se visualizarmos o plano xy como a imagem do plano w de acordo com a transformação

conforme

$$z = \frac{i - w}{i + w}, \quad (12)$$

o mapeamento entre os dois planos é o da figura 3.

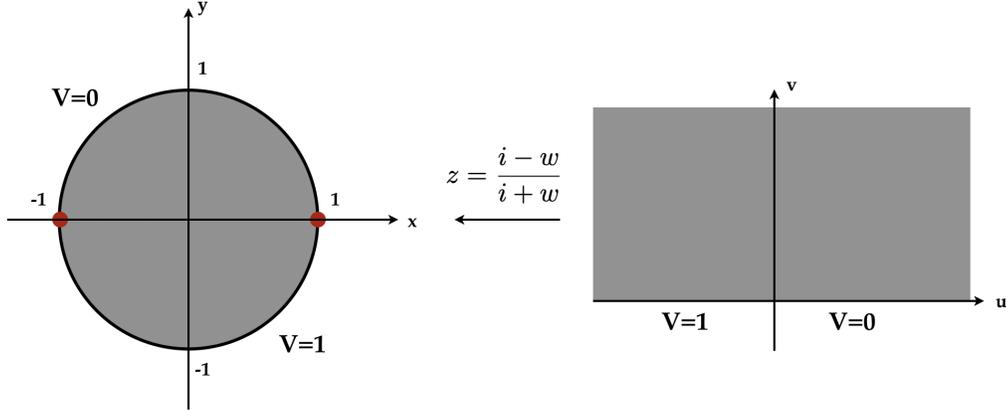


Figura 3: A região de interesse do problema eletrostático é a imagem da região $v \geq 0$ via mapeamento conforme $z = (i - w)/(i + w)$.

Sendo assim, o problema equivalente no plano- w possui as condições de contorno

$$V(u, v) = 0 \quad (u \geq 0) \quad \text{e} \quad V(u, v) = 1 \quad (u < 0)$$

Vimos anteriormente que na região $v \geq 0$, o ramo principal da função $\log(w)$ é tal que

$$f(w) = u + iv = \frac{1}{\pi} \log(w) = \frac{1}{\pi} \ln|w| + i \frac{\phi}{\pi} \quad (0 \leq \phi \leq \pi).$$

Portanto, a parte imaginária de $f(w) = \frac{1}{\pi} \log(w)$, que é harmônica, satisfaz exatamente as condições de contorno do problema eletrostático após o mapeamento para o plano- w . Então

$$V(u, v) = \frac{1}{\pi} \operatorname{atan} \left(\frac{v}{u} \right),$$

bastando agora retornar ao plano xy original. A inversa da transformação 12 é

$$w = i \frac{1 - z}{1 + z}, \quad (13)$$

de forma que

$$w = i \left(\frac{1 - x - iy}{1 + x + iy} \right) = \frac{2y + i(1 - x^2 - y^2)}{(1 + x)^2 + y^2},$$

e, portanto, a solução final para o potencial na região cilíndrica de interesse é dada por

$$V(x, y) = \frac{1}{\pi} \operatorname{atan} \left(\frac{1 - x^2 - y^2}{2y} \right). \quad (14)$$

As linhas equipotenciais, por sua vez, são descritas por

$$V(x, y) = c = \frac{1}{\pi} \operatorname{atan} \left(\frac{1 - x^2 - y^2}{2y} \right), \quad (15)$$

e, então

$$x^2 + y^2 + 2y \tan(\pi c) = 1 \implies x^2 + [y + \tan(\pi c)]^2 = 1 + \tan^2(\pi c)$$

e, dessa forma, tais equipotenciais são arcos de círculos com raio

$$r_c = \sqrt{1 + \tan^2(\pi c)}$$

centrados em

$$(x_c, y_c) = (0, -\tan(\pi c)).$$

Perceba que os pontos $(x, y) = (\pm 1, 0)$ pertencem a todas as equipotenciais. Em particular, a equipotencial $V = 0$ é um arco de círculo centrado em $(0, 0)$ com raio 1, bem como a equipotencial $V = 1$. Já para a equipotencial $V = 1/2$, a equação para o círculo se degenera numa reta, já que $r_c \rightarrow \infty$ e corresponde ao diâmetro da seção circular ligando as fitas isolantes.

A função harmônica conjugada a $V(x, y)$ neste problema é

$$U(x, y) = \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{|1 - z|}{|1 + z|} \right) = \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{[(1 - x)^2 + y^2]^{1/2}}{[(1 + x)^2 + y^2]^{1/2}} \right), \quad (16)$$

cujas curvas de nível $U(x, y) = d$, de acordo com o teorema 4.1, são perpendiculares às equipotenciais 15 e devem, portanto, corresponder às linhas de campo elétrico \mathbf{E} . Essas linhas também satisfazem equações de círculos

$$(x - \tilde{x}_d)^2 + (y - \tilde{y}_d)^2 = \tilde{r}_d^2$$

onde

$$(\tilde{x}_d, \tilde{y}_d) = \left(\frac{1 + e^{2\pi d}}{1 - e^{2\pi d}}, 0 \right) \quad \text{e} \quad \tilde{r}_d = \sqrt{\left(\frac{1 + e^{2\pi d}}{1 - e^{2\pi d}} \right)^2 - 1}$$

A figura 4 mostra algumas curvas equipotenciais de V interiores à tubulação em azul, bem como algumas linhas de campo elétrico. As equipotenciais associadas às condições de contorno do problema também são mostradas em preto. Perceba a ortogonalidade das linhas de campo elétrico com a superfície do tubo.

Exercício: Generalize os resultados desta seção para um cilindro de raio R em que a parte inferior é mantida a um potencial V_0 .

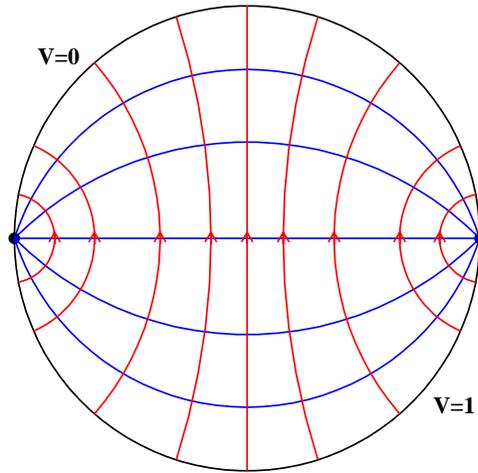


Figura 4: Linhas equipotenciais (azul) e de campo elétrico (vermelho) interiores à tubulação cilíndrica.

Referências

- [1] *Variáveis Complexas e suas Aplicações*, Ruel V. Churchill, McGraw-Hill.