

Métodos Numéricos

• Como computadores "entendem" números?
(representam)

- números dentro do seu celular/laptop/...

$$0, \underbrace{d_1 d_2 d_3 \dots d_k}_{\text{mantissa}} \cdot \underbrace{10^e}_{\text{Base}}, \text{ onde } 1 \leq d_1 \leq 9, 0 \leq d_j \leq 9 \quad \forall j=2, \dots, k$$

$e = \text{expoente}$

$m \leq e \leq M$, onde $m = -64$, $M = 64$, por exemplo

$k = \text{números de algarismos significativos}$

a) $0 \leq e \leq 2$ e $k = 2$

$$0, d_1 d_2 \cdot 10^{\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix}} \quad (270 \text{ números})$$

b) 1 (um) algarismo significativo

$$0, 1, 2, \dots, 9 \cdot 10^e$$

Arredondamento

$0, \dots, 4 \rightarrow 0$

$5, \dots, 9 \rightarrow \text{somar um } \overset{\text{no}}{\text{digito anterior}}$

Truncamento

Jogamos fora tudo depois do k -ésimo dígito

• Operações aritméticas com um algarismo significativo

$$2 + 3 = 5$$

$$9 + 1 = 10 = 0,1 \cdot 10^2$$

$$\underbrace{(9+3)+1}_{10+1=10} \quad \text{e} \quad \underbrace{9+(3+1)}_{9+4=13}$$

• Raízes de Equações

Seja f uma função real de uma variável real $f = f(x)$, e suponha que queremos encontrar valores de x para os quais $f(x) = 0$.

Todos valores de x são as raízes de f

a) $f(x) = x^2 - 5$

raízes são $x = \pm \sqrt{5}$

c) $h(x) = e^x$

d) $j(x) = x^6 + 17x^4 + 24x^2 + 18$

b) $g(x) = x^7 - 3x^3 + 2x^2 + 3x - 7$

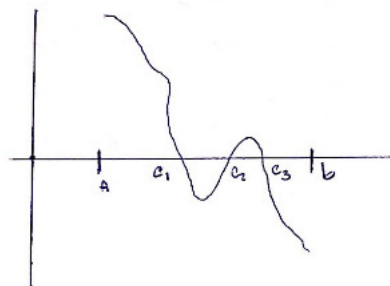
existe x tal que $g(x) = 0$?

e) $L(x) = x^2 + 1$

- Teorema de Bolzano

Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua se $f(a) \cdot f(b) < 0$, então existe

$a < c < b$, tal que $f(c) = 0$



a) $f(x) = x^2 - 5$

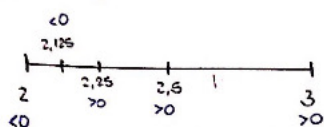
- Vamos isolar uma raiz de f

$$\left. \begin{array}{l} f(2) = -1 < 0 \\ f(3) = 4 > 0 \end{array} \right\} \text{ Pelo Teorema de Bolzano,} \\ \text{existe ao menos uma raiz em } [2, 3]$$

- $f'(x) = 2x > 0$ em $x > 0 \Rightarrow f$ é crescente em $x > 0$

portanto, f tem no máximo uma raiz positiva

Método da Bicotomia (método iterativo)



$$f(x) = x^2 - 5$$

• Começamos $x_1 = \frac{2+3}{2} = 2,5$

$$f(2,5) = \begin{cases} 1,25 > 0 \\ x = 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

• $x_2 = \frac{2+2,5}{2} = 2,25$

$$f(2,25) = 0,0625$$

(raiz entre 2 e 2,25)

• $x_3 = \frac{2+2,25}{2} = 2,125$

$$f(x_3) = -0,48$$

(raiz entre 2,125 e 2,25)

• $x_4 = \frac{2,125 + 2,25}{2}$

$$x_4 = 2,1875$$

$$f(x_4) = -0,214$$

(raiz entre 2,1875 e 2,25)

• $x_5 = \frac{2,1875 + 2,25}{2}$

$$x_5 = 2,21875$$

$$f(x_5) = -0,077$$

(raiz entre ~~2,1875~~ e 2,25)
2,21875

• Pararemos agora no novo ponto médio

$$x_6 = \frac{2,21875 + 2,25}{2} = 2,234375$$

⇒ aproximação da raiz de $f(x) = x^2 - 5$ entre 2 e 3

$$f(x_6) = -7,67 \cdot 10^{-5}$$

• Quão próximo da raiz está x_6 ?

• Isto é, qual a distância máxima que x_6 pode estar da raiz?

• Isto é, se $\bar{x}$ é a raiz exata, quão grande pode ser $|\bar{x} - x_6|$?

• Encontre uma cota superior para $|\bar{x} - x_6|$?

$$|\bar{x} - x_6| < \frac{3-2}{2^6} = \frac{1}{64} \Rightarrow |\bar{x} - x_6| < 0,015625$$

Logo $|\bar{x} - 2,234375| < 0,015625$

$$\sqrt{5} = 2,236067977...$$

obs.: $-2,2360675$

$$2,2360679$$

$$0,00169$$

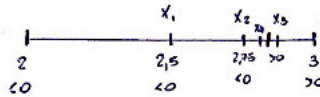
$$b) g(x) = x \cdot \ln x - 3, \quad x > 0$$

$$g(1) = -3$$

$$g(2) = -1,61...$$

$$g(3) = 0,29...$$

temos uma raiz!

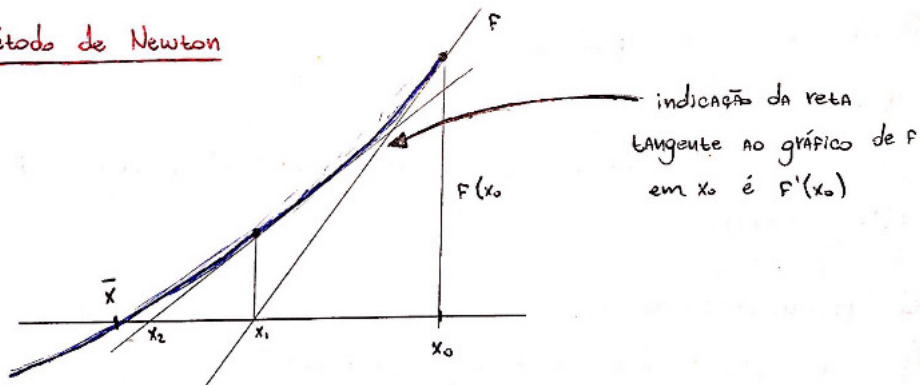


$$x_3 = \frac{2,75 + 3}{2} = 2,875$$

$$x_4 = \frac{2,875 + 2,75}{2} = 2,8125$$

$$x_5 = \frac{2,8125 + 2,875}{2} = 2,84375 \quad F(x_5) = -0,03...$$

Método de Newton



• Reta tangente passa por $(x_0, F(x_0))$ e $(x_1, 0)$ e tem inclinação $F'(x_0)$

$$\frac{F(x_0) - 0}{x_0 - x_1} = F'(x_0)$$

$$\frac{F(x_0)}{F'(x_0)} = x_0 - x_1 \Rightarrow$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$$

• Método iterativo do tipo:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \text{ onde, no Método de Newton, } \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

A) $f(x) = x^2 - 5$

$$\varphi(x) = x - \frac{x^2 - 5}{2x} = \frac{2x^2 - x^2 + 5}{2x} \Rightarrow \varphi(x) = \frac{x^2 + 5}{2x} = \frac{1}{2} \left(x + \frac{5}{x} \right)$$

$$x_0 = 3 \xrightarrow{\varphi} x_1 = \varphi(x_0) = 2,333...$$

$$\xrightarrow{\varphi} x_2 = \varphi(x_1) = 2,23609$$

$$\xrightarrow{\varphi} x_3 = \varphi(x_2) = 2,2360679$$

$$\xrightarrow{\varphi} x_4 = \varphi(x_3) = 2,2360679$$

$$\xrightarrow{\varphi} x_5 = \varphi(x_4) = 2,2360679$$

obs.:

$$\varphi_{g(x)=x^2-A} = \frac{1}{2} \left(x + \frac{A}{x} \right)$$

• $x_0, x_1 = \varphi(x_0); x_2 = \varphi(x_1); \dots; x_{n+1} = \varphi(x_n)$, onde $\varphi(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{A}{x} \right)$

$$x_{n+1} - \sqrt{A} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{A}{x_n} \right) - \sqrt{A} = \frac{1}{2} \left[\frac{x_n^2 + A - 2x_n\sqrt{A}}{x_n} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{(x_n - \sqrt{A})^2}{x_n} \right]$$

$$(x_{n+1} - \sqrt{A}) \leq \frac{1}{2\sqrt{A}} \cdot (x_n - \sqrt{A})^2$$