MAP 2320 – MÉTODOS NUMÉRICOS EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS II

2º Semestre - 2019

Prof. Dr. Luis Carlos de Castro Santos

lsantos@ime.usp.br

Combined One-Dimensional Heat Conduction Equation

$$\frac{1}{r^n}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^n k \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \dot{e}_{\text{gen}} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

$n = 0$ for a plane wall

$n = 1$ for a cylinder

$n = 2$ for a sphere

Jean-Baptiste Joseph Fourier

Boundary Conditions

- Specified Temperature Boundary Condition
- Specified Heat Flux Boundary Condition

Problema Homogêneo
C.C. de Dirichlet
homogêneas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L$$
$$u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0$$

Problema Homogêneo
C.C. de Dirichlet
não-homogêneas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L$$
$$u(0,t) = T_1,\ u(L,t) = T_2$$

Problema Homogêneo
C.C. de Neumann
homogêneas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$$


12
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

MAP2320

Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução
(Versão Preliminar)

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
http://www.mat.ufmg.br/~regi

3.1.2 Condições de Fronteira Não Homogêneas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L \\ u(0,t) = T_1,\ u(L,t) = T_2 \end{cases}$$

Observe que uma função somente de x (derivada parcial em relação a t nula), tal que a segunda derivada (em relação a x) é igual a zero satisfaz a equação do calor. Assim,

$$v(x,t) = T_1 + \left(\frac{T_2 - T_1}{L}\right) x$$

satisfaz a equação do calor e as condições de fronteira $u(0,t) = T_1$ e $u(L,t) = T_2$.

O que sugere como solução do problema inicial a função

$$u(x,t) = v(x,t) + u_0(x,t),$$

em que $u_0(x,t)$ é a solução do problema com ı condições homogêneas, ou seja, $$u(x,t) = T_1 + \left(\frac{T_2 - T_1}{L}\right)x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}.$$

Para satisfazer a condição inicial $u(x,0) = f(x)$, precisamos que

$$f(x) = T_1 + \left(\frac{T_2 - T_1}{L}\right)x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

ou ainda,

$$f(x) - T_1 - \left(\frac{T_2 - T_1}{L}\right)x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Esta é a série de Fourier de senos de $f(x) - T_1 - \left(\frac{T_2-T_1}{L}\right)x$. Assim, pelo Corolário 2.5 na página 184, se a função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes, então os coeficientes da série de Fourier de senos de $f(x) - T_1 - \left(\frac{T_2-T_1}{L}\right)x$ são dados por

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L \Big[\underbrace{f(x) - T_1 - \left(\frac{T_2 - T_1}{L}\right)x}_{g(x)}\Big] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \; n = 1, 2, 3 \ldots$$

Observe que

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = T_1 + \left(\frac{T_2 - T_1}{L}\right)x, \quad \text{para } x \in [0,L]$$

ou seja, quando t tende a mais infinito, a solução $u(x,t)$ tende a solução

$$v(x,t) = T_1 + \left(\frac{T_2 - T_1}{L}\right)x$$

chamada **solução estacionária** ou **solução de equilíbrio**. Observe que a solução estacionária é solução do problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L \\ u(0,t) = T_1,\ u(L,t) = T_2 \end{cases}$$

Exemplo 3.2. Vamos considerar uma barra de 40 cm de comprimento, isolada nos lados, com coeficiente $\alpha = 1$, com as extremidades mantidas a temperaturas de 10° C e 30° C e tal que a temperatura inicial é dada por

$$f(x) = \begin{cases} 10 + 2x, & \text{se } 0 \le x < 20 \\ 70 - x, & \text{se } 20 \le x \le 40 \end{cases}$$

Temos que resolver o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < 40 \\ u(0,t) = 10,\ u(40,t) = 30 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,t) = 10 + \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}t}$$

em que c_n são os coeficientes da série de senos de

$$g(x) = f(x) - 10 - \frac{x}{2} = \begin{cases} \frac{3}{2}x, & \text{se } 0 \le x < 20 \\ 60 - \frac{3}{2}x, & \text{se } 20 \le x \le 40 \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{20}\int_0^{40} g(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{40}dx = 2\left(\frac{3}{2}b_n(f^{(1)}_{0,1/2},40) + 60b_n(f^{(0)}_{1/2,1},40) - \frac{3}{2}b_n(f^{(1)}_{1/2,1},40)\right)\\
&= \frac{120}{n^2\pi^2}\left(-s\cos s + \mathrm{sen}\,s\right)\Big|_0^{n\pi/2} - \frac{120}{n\pi}\cos s\Big|_{n\pi/2}^{n\pi} - \frac{120}{n^2\pi^2}\left(-s\cos s + \mathrm{sen}\,s\right)\Big|_{n\pi/2}^{n\pi}\\
&= \frac{240}{n^2\pi^2}\left(-\frac{n\pi}{2}\cos(n\pi/2) + \mathrm{sen}(n\pi/2)\right) + \frac{120}{n\pi}\cos(n\pi/2)\\
&= \frac{240\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2},\ n = 1,2,3\ldots
\end{aligned}$$

Portanto a solução é dada por

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= 10 + \frac{x}{2} + \frac{240}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n^2} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}t} \\
&= 10 + \frac{x}{2} + \frac{240}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{40} e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{1600}t}
\end{aligned}
$$

Observe que

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 10 + \frac{x}{2}, \quad \text{para } x \in [0, L]$$

ou seja, quando t tende a mais infinito a solução tende a solução estacionária

$$v(x,t) = 10 + \frac{x}{2}.$$

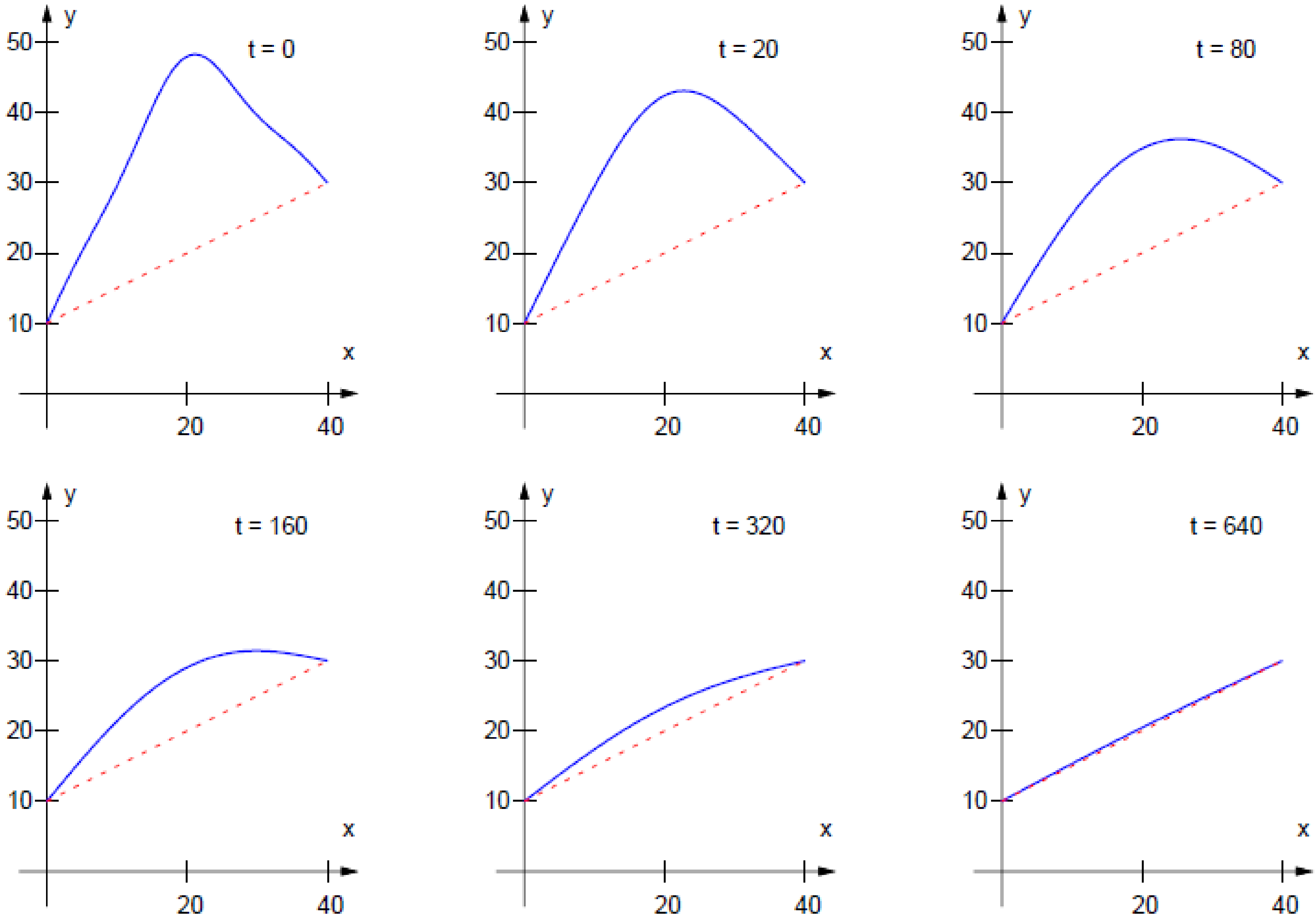


Figura 3.2 – Solução, $u(x,t)$, do PVIF do Exemplo 3.2 tomando apenas 3 termos não nulos da série.

Exercícios

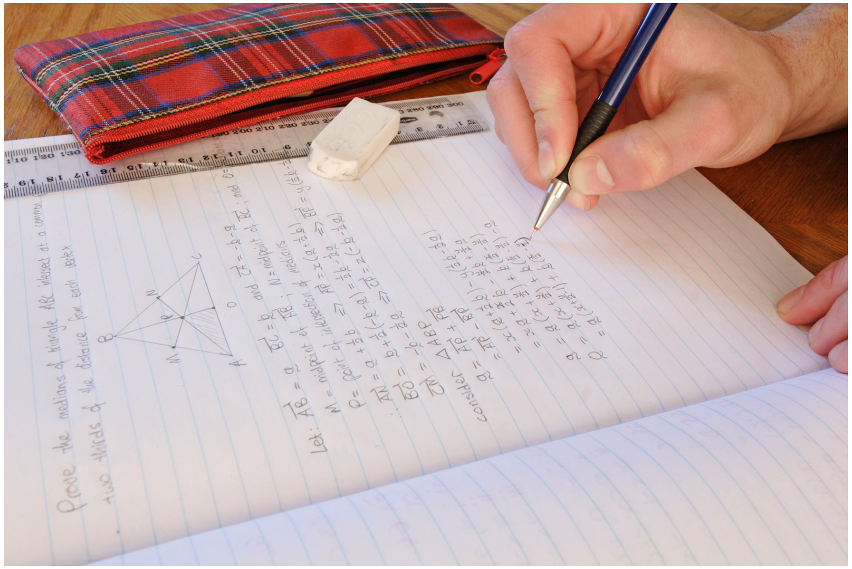
1.2. Encontre a temperatura $u(x,t)$ em uma barra de metal com 40 cm de comprimento, isolada dos lados e que está inicialmente a uma temperatura uniforme de 20° C, supondo que $\alpha = 1$ e que suas extremidades são mantidas a temperatura de 0° C e 60° C respectivamente. Qual a temperatura estacionária?

Problema Homogêneo
C.C. de Dirichlet
não-homogêneas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L$$

$$u(0,t) = T_1,\ u(L,t) = T_2$$



L = 40 cm
f(x) = 20 °C
T_1 = 0°C
T_2 = 60°C

Problema Homogêneo
C.C. de Dirichlet
homogêneas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L$$
$$u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0$$

Problema Homogêneo
C.C. de Dirichlet
não-homogêneas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L$$
$$u(0,t) = T_1,\ u(L,t) = T_2$$

Problema Homogêneo
C.C. de Neumann
homogêneas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$$

MAP2320

Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução (Versão Preliminar)

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
http://www.mat.ufmg.br/~regi

3.2 Barra Isolada nas Extremidades

Vamos determinar a temperatura em função da posição e do tempo, $u(x,t)$ em uma barra isolada dos lados, de comprimento L, sendo conhecidos a distribuição de temperatura inicial, $f(x)$, e sabendo que as extremidades são mantidas também isoladas, ou seja, vamos resolver o problema de valor inicial e de fronteira (PVIF)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \end{cases}$$

Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de t, ou seja,

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Calculando-se as derivadas parciais temos que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = X(x)T'(t) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t).$$

Substituindo-se na equação diferencial obtemos

$$X(x)T'(t) = \alpha^2 X''(x)T(t).$$

Dividindo-se por $\alpha^2 X(x)T(t)$ obtemos

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'(t)}{T(t)}.$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de t. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições de fronteira:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X'(0) = 0,\ X'(L) = 0 & (3.6) \\ T'(t) - \alpha^2 \lambda T(t) = 0 & (3.7) \end{cases}$$

As condições $X'(0) = X'(L) = 0$ decorrem do fato de que a barra está isolada nas extremidades, ou seja,

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = X'(0)T(t) \quad \text{e} \quad 0 = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = X'(L)T(t).$$

A equação $X''(x) - \lambda X(x) = 0$ pode ter como soluções,

Se $\lambda > 0$ **:** $X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\,x}$.

Se $\lambda = 0$ **:** $X(x) = c_1 + c_2 x$.

Se $\lambda < 0$ **:** $X(x) = c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda} x) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda} x)$.

As condições de fronteira $X'(0) = 0$ e $X'(L) = 0$ implicam que

Se $\lambda > 0$ **:**

Substituindo-se $x = 0$ e $X' = 0$ em $X'(x) = \sqrt{\lambda}(c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} - c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x})$, obtemos que $0 = c_1 - c_2$, ou seja, $c_2 = c_1$. Logo

$$X(x) = c_1(e^{\sqrt{\lambda}x} + e^{-\sqrt{\lambda}x}).$$

Agora substituindo-se $x = L$ e $X' = 0$ obtemos $\sqrt{\lambda}c_1(e^{\sqrt{\lambda}L} - e^{-\sqrt{\lambda}L})$. Logo, se $c_1 \neq 0$, então

$$e^{\sqrt{\lambda}L} = -e^{-\sqrt{\lambda}L}$$

o que não é possível se $\lambda > 0$.

Se $\lambda = 0$ **:**

Substituindo-se $x = 0$ e $X' = 0$ em $X'(x) = c_2$, obtemos que $c_2 = 0$. Logo

$$X(x) = c_1.$$

Se $\lambda < 0$:

Substituindo-se $x = 0$ e $X' = 0$ em

$$X'(x) = \sqrt{-\lambda}(c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) - c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x)),$$

obtemos que $c_1 = 0$. Logo

$$X(x) = c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x). \tag{3.8}$$

Agora substituindo-se $x = L$ e $X' = 0$ em

$$X'(x) = \sqrt{-\lambda}c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x),$$

obtemos

$$c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}L) = 0.$$

Logo, se $c_2 \neq 0$, então $\sqrt{-\lambda}L = n\pi$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$. Logo

$$\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Portanto o problema de valores de fronteira (3.6) tem solução não nula somente se

$$\lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

Substituindo-se estes valores de λ em (3.8) vemos que o problema de valores de fronteira (3.6) tem soluções fundamentais

$$X_0 = 1 \quad \text{e} \quad X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{L}, \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Substituindo-se $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ na equação diferencial (3.7) obtemos

$$T'(t) + \frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} T(t) = 0$$

que tem como solução fundamental

$$T_n(t) = c_2 e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}, \text{ para } n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Logo o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0. \end{cases}$$

tem soluções fundamentais

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \cos\frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Combinações lineares das soluções fundamentais são também solução (verifique!),

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{N} c_n u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{N} c_n \cos\frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

Mas uma solução deste tipo não necessariamente satisfaz a condição inicial $u(x,0) = f(x)$, para uma função $f(x)$ mais geral. Vamos supor que a solução do problema de valor inicial e de fronteira seja uma série da forma

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}. \tag{3.9}$$

Para satisfazer a condição inicial $u(x,0) = f(x)$, temos que ter

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{L}.$$

Esta é a série de Fourier de cossenos de $f(x)$. Assim, pelo Corolário 2.4 na página 181, se a função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$c_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx, \;\; c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \; n = 1, 2, 3 \ldots \tag{3.10}$$

Exemplo 3.3. Vamos considerar uma barra de 40 cm de comprimento, isolada nos lados, com coeficiente $\alpha = 1$ e as extremidades também isoladas, ou seja,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(40,t) = 0$$

e tal que a temperatura inicial é dada por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \le x < 20 \\ 40 - x, & \text{se } 20 \le x \le 40 \end{cases}$$

Temos que resolver o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t} \\ u(x,0) = f(x), \; 0 < x < 40 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \; \dfrac{\partial u}{\partial x}(40,t) = 0 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}t}$$

em que c_n são os coeficientes da série de cossenos de $f(x)$, ou seja,

a_n (erro de digitação)

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{40}\int_0^{40} f(x)dx = 10, \\
c_n &= \frac{1}{20}\int_0^{40} f(x)\cos\frac{n\pi x}{40}dx \\
&= 2\left(b_n(f^{(1)}_{0,1/2}, 40) + 40\, b_n(f^{(0)}_{1/2,1}, 40) - b_n(f^{(1)}_{1/2,1}, 40)\right) \\
&= \frac{80}{n^2\pi^2}(s \operatorname{sen} s + \cos s)\Big|_0^{n\pi/2} + \frac{80}{n\pi}\operatorname{sen} s\Big|_{n\pi/2}^{n\pi} - \frac{80}{n^2\pi^2}(s \operatorname{sen} s + \cos s)\Big|_{n\pi/2}^{n\pi} \\
&= \frac{160}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{80}{n^2\pi^2} - \frac{80}{n^2\pi^2}\cos n\pi \\
&= 80\frac{2\cos\frac{n\pi}{2} - 1 - (-1)^n}{n^2\pi^2}, \; n = 1, 2, 3\ldots
\end{aligned}$$

Entretanto alguns termos são nulos:

$$c_{2k+1} = 0$$

$$c_{2k} = 80\frac{2\cos k\pi - 2}{(2k)^2\pi^2} = 40\frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi^2}$$

e

$$c_{2\cdot 2l} = 0$$

$$c_{2(2l+1)} = 40\frac{-2}{(2l+1)^2\pi^2} = -\frac{80}{(2l+1)^2\pi^2}.$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(x,t) &= 10 + \frac{80}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cos\frac{n\pi}{2} - 1 - (-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{40}e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}t} \\ &= 10 + \frac{40}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{20}e^{-\frac{n^2\pi^2}{400}t} \\ &= 10 - \frac{80}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{20}e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{400}t} \end{aligned}$$

Observe que a solução tende a $v(x,t) = 10$, quando t tende a mais infinito, que é a solução estacionária.

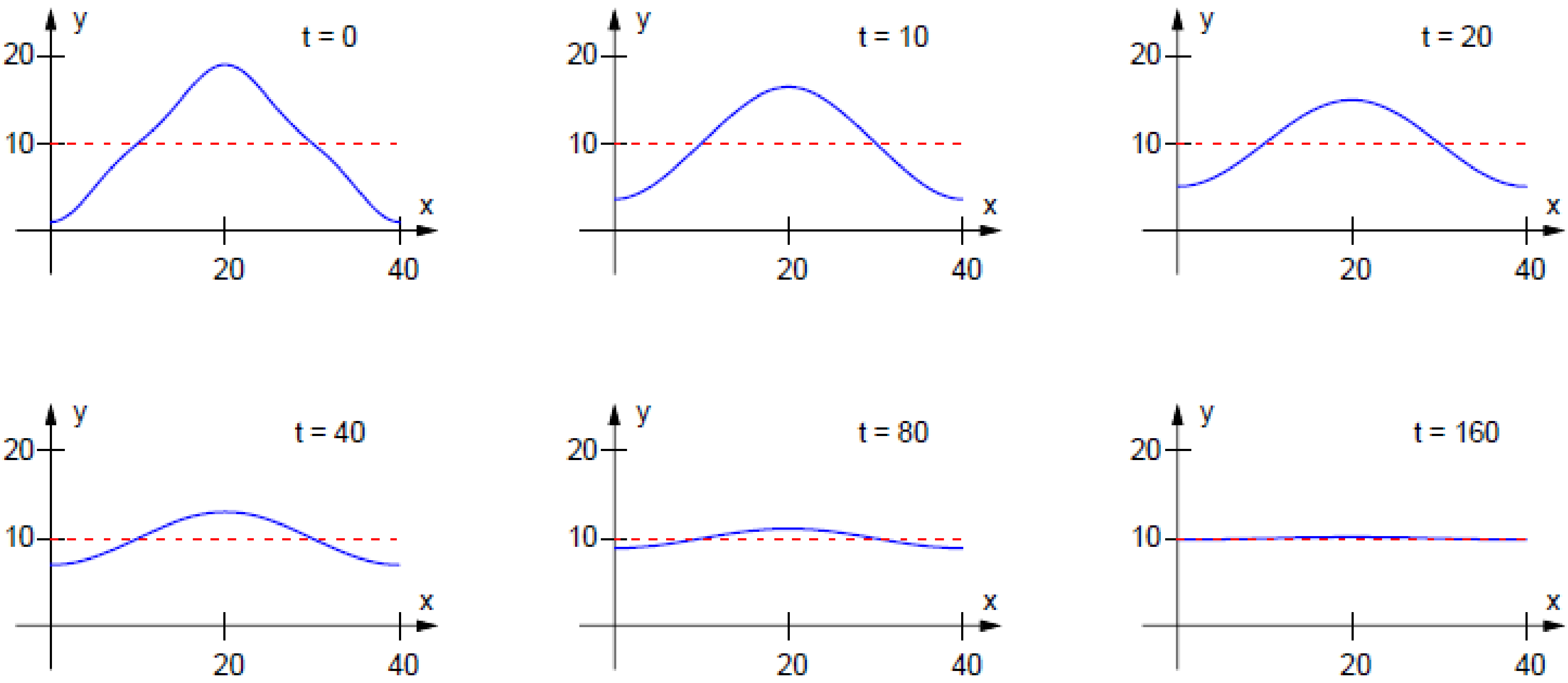


Figura 3.3 – Solução, $u(x,t)$, do PVIF do Exemplo 3.3 tomando apenas 3 termos não nulos da série.

Exercícios (respostas na página 321)

2.1. Considere uma barra com 40 cm de comprimento , $\alpha = 1$, isolada dos lados e que está inicialmente a temperatura dada por $u(x, 0) = 3x/2$, $0 \leq x \leq 40$ e que as extremidades estão isoladas.

(a) Determine $u(x, t)$.

(b) Qual a temperatura estacionária?

Coeficientes das Séries de Fourier de Funções Elementares		
$f : [-L, L] \to \mathbb{R}, -1 \leq c < d \leq 1$	$a_n(f, L) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt$	$b_n(f, L) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}dt$
$f_{c,d}^{(0)}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in [cL, dL] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$a_0(f_{c,d}^{(0)}, L) = d - c$ $a_n(f_{c,d}^{(0)}, L) = \frac{1}{n\pi}\,\mathrm{sen}\,s\Big\|_{n\pi c}^{n\pi d}$	$b_n(f_{c,d}^{(0)}, L) = -\frac{1}{n\pi}\cos s\Big\|_{n\pi c}^{n\pi d}$
$f_{c,d}^{(1)}(t) = \begin{cases} t, & \text{se } t \in [cL, dL] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$a_0(f_{c,d}^{(1)}, L) = \frac{L}{2}(d^2 - c^2)$ $a_n(f_{c,d}^{(1)}, L) =$ $\frac{L}{n^2\pi^2}\left(s\,\mathrm{sen}\,s + \cos s\right)\Big\|_{n\pi c}^{n\pi d}$	$b_n(f_{c,d}^{(1)}, L) =$ $\frac{L}{n^2\pi^2}\left(-s\cos s + \mathrm{sen}\,s\right)\Big\|_{n\pi c}^{n\pi d}$
$f_{c,d}^{(2)}(t) = \begin{cases} t^2, & \text{se } t \in [cL, dL] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$a_0(f_{c,d}^{(2)}, L) = \frac{L^2}{3}(d^3 - c^3)$ $a_n(f_{c,d}^{(2)}, L) =$ $\frac{L^2}{n^3\pi^3}\left((s^2 - 2)\,\mathrm{sen}\,s + 2s\cos s\right)\Big\|_{n\pi c}^{n\pi d}$	$b_n(f_{c,d}^{(2)}, L) =$ $\frac{L^2}{n^3\pi^3}\left(2s\,\mathrm{sen}\,s + (2 - s^2)\cos s\right)\Big\|_{n\pi c}^{n\pi d}$

MAP 2320 – MÉTODOS NUMÉRICOS EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS II

2º Semestre - 2019

Roteiro do curso

- Introdução
- Séries de Fourier
- Método de Diferenças Finitas
- **Equação do calor transiente (parabólica)**
- Equação de Poisson (elíptica)
- Equação da onda (hiperbólica)