GROSSI, Esther Pillar (Org.). Por que ainda há quem não aprende? A teoria. Petrópolis: Vozes, 2003.

# Criança pode aprender frações. E gosta!

*Terezinha Nunes*

Hoje vou responder a um desafio que muitas pessoas já me fizeram, quando falava sobre a aprendizagem da Matemática, a respeito da riqueza dos conhecimentos da vida diária. Há um exemplo que gosto de dar, e vou repeti-lo porque é um dos meus exemplos prediletos. Trata-se de uma conta de subtrair que um menino tenta fazer no papel, numa situação simulada de uma loja, na época em que a moeda era o cruzeiro. Pedi que o menino imaginasse que eu fui à sua loja comprar um lápis: "O lápis custa 35 cruzeiros e vou lhe dar uma nota de 200, quanto é que você vai me dar de troco?" Esse menino colocou no papel 200 menos 35. Depois ele fez: "*Cinco para chegar em zero* — aí ele olhou para mim — *não falta nada, até passou, zero. Três para chegar em zero já passou também, zero. Dois menos nada, porque embaixo do dois não tinha nada, dois*". Ele ficou olhando aquele resultado no papel e eu disse: "Qual é o resultado?" E ele disse: "*Está errado*". E eu disse: "Como é que você sabe?" Ele disse: "*Ora, a senhora vem na minha loja, compra um lápis de 35, dá uma nota de 200 e eu lhe dou a nota de volta? Não pode ser, está errado*". E eu disse: "Então, não posso comprar o lápis?" Aí ele colocou de novo 200 menos 35, tudo alinhado, direito, passou o traço. Ele viu que aquele negócio de 5 para chegar em zero não tinha dado certo, pensou em fazer diferente, mas como a professora ensinou que não pode tirar o maior do menor, o que se faz? Tira o menor do maior. Então ele fez cinco menos zero, cinco. Três menos zero três. Dois menos nada, dois. Ele disse: "*Errado de novo*". E eu disse: "E por que está errado?" E ele disse: "*Olha, agora a senhora vem na minha loja, compra um lápis de 35, dá uma nota de 200, eu lhe dou 200 e ainda lhe dou mais 35 em cima?*" E eu disse: "Ronaldo, então não dá para comprar um lápis na sua loja?" Ele disse: "*Não, espera aí*". Agora ele fêz a conta de cabeça. "*Duzentos menos trinta, 170, menos 5...*" E brinquei com ele: "Não vai me dar um desconto?" Ele disse: "*Não, 165*".

Esse exemplo é muito interessante, pois mostra qual é o desafio que me apresentam. Sempre que eu falava na idéia de usar o conhecimento das pessoas e trabalhar a representação desse conhecimento na escola para que o conhecimento avançasse mais como uma nova maneira de representar, muitas professoras me perguntavam: "*Terezinha, e as frações?. Fração é um bicho de sete cabeças, não tem na vida diária, não podemos usar conhecimentos de frações da vida diária*". Por isso é que resolvi aceitar esse desafio, pesquisar a origem do conceito de frações na vida diária e colocar esse tema para discussão: Será que toda criança pode aprender frações?

Em 14 anos que passei em Recife, não tive oportunidade de pesquisar sobre as frações na vida diária; comecei a aprender um pouco com um mestre de obras, mas não fui em frente. Hoje estou tentando responder a esse desafio: será que toda criança pode aprender frações ou será que fração é realmente um bicho de sete cabeças?

Quero dividir com vocês a experiência que tenho tido nesse trabalho de frações com crianças de 8 anos, na Inglaterra. Tenho certeza de que, no Brasil, as crianças com 8 anos, apesar de todas as diferenças, vão passar por caminhos muito semelhantes.



Como eu aprendi frações? Por que é que eu achava, como todos afirmavam, que fração era um bicho de sete cabeças? A forma pela qual eu aprendi frações foi planejada há 50 anos. O primeiro objetivo do ensino era ensinar a nomear e escrever frações, saber o que é um quarto, o que é um terço, o que é um quinto, e escrever o nome da fração. E era esse o meu nó. Eu não sabia como pesquisar frações porque o meu conceito de frações vinha desse ensino. Eu achava que para pensar em fração tinha de escrever um número em cima, o numerador, passar um traço e escrever outro número embaixo, o denominador. Ao invés de tentar identificar o raciocínio que dá base à compreensão da fração, eu pensava no número escrito no papel com tracinho. Ao fazer isso, não encontrava fração na vida diária, não sabia qual era o conhecimento que se tem na vida diária, porque esses números não aparecem no dia-a-dia. Quando descobri outro caminho, comecei a me interessar de novo por frações.

Depois desse primeiro passo, quando aprendi a identificar as frações, aprendi a escrevê-las. Se você dividiu um chocolate em quatro pedaços, o denominador vai ser esse, o número de pedaços em que o todo foi dividido. E se eu comer um pedaço, comi um quarto. Assim, aprendi a escrever um tracinho, o 4 embaixo, o 1 em cima. O próximo objetivo era aprender as equivalências entre frações. Para aprender a equivalência de frações, minha professora fazia assim: "Agora, se você cortar todos os pedaços no meio, já não é mais um quarto, agora são dois oitavos, porque o chocolate está dividido em oito". Então, eu via perceptualmente que a área de um quarto era a mesma área de dois oitavos. Não era uma questão de raciocínio, mas de percepção, o que me levava por um caminho absolutamente tortuoso para compreender a fração. A fração não é um valor absoluto e essa representação me mostrava que era um valor absoluto, porque o fato de um quarto e dois oitavos serem do mesmo tamanho me convencia de que eram a mesma coisa. Mas, vejam que interessante: um terço de 15 e um terço de 18; todos os dois são um terço e de tamanhos diferentes. O interessante da fração não é o tamanho absoluto, mas, na realidade, é uma relação entre uma parte e um todo; por isso, o mesmo número, um terço, é diferente se ele for relacionado a diferentes todos. Vejam, a minha professora, com a maior boa vontade, queria me convencer que o mais importante da fração era alguma coisa perceptual e absoluta, quando na realidade o mais importante na fração é uma relação.

Depois do ensino de equivalência aprendíamos a fazer contas com frações, por meio de regras, e as regras nada tinham a ver com os desenhos das frações. A regra que aprendíamos dizia que, para somar frações, somam-se os números em cima do tracinho, mas não se somam os números de baixo, se estes forem iguais. E se os números de baixo forem diferentes? Aí vocês já estão vendo como é o problema das regras. Eram muitas as regras que tínhamos de aprender. Eu gostava muito de aprender frações, era muito obediente; as regras que me ensinassem, eu as aprendia.

Mas, quais são as conseqüências desse ensino tradicional de frações? A primeira coisa é que se aprende e se esquece. Se perguntarmos para a maioria das pessoas como é que se divide uma fração pela outra, a resposta é que não sabem mais, já esqueceram. Se souberem fazer a divisão, passando o número de baixo do tracinho para cima e o de cima para baixo e depois multiplicando, não sabem por que a divisão se faz desse jeito. Essa é uma aprendizagem que se esquece; quem não se esquece de como fazer a conta, se esquece do por que fazer assim. A transferência de um modelo perceptual de frações para um modelo conceitual, para um raciocínio sobre frações



seria muito complexa; teríamos de pensar muito para conseguirmos fazer essa transferência.

Quais são os erros comuns que aparecem entre jovens nos estudos sobre as dificuldades das frações? Note-se que esses estudos não são feitos só no Brasil, em estudos internacionais aparecem esses mesmos erros, muito comuns em lugares onde as pessoas tiveram um ensino igual ao meu, porque esse ensino existia há 50 anos e existe hoje também.

Um exemplo: os alunos pensam que um terço é uma fração menor que um quarto, porque se quatro é maior que três, então, um quarto deve ser maior do que um terço. Quando se fala em ensinar frações de outro jeito, um argumento que aparece sempre é que não é possível partir do conhecimento informal de fração dos alunos, porque na realidade não se usa muito fração na prática. Na realidade, vou tentar mostrar exatamente o contrário, que usamos muito o raciocínio de frações na prática, o que não usamos é a formalização, a escrita de frações. Eu gostaria de afirmar que é possível aproveitar o conhecimento diário do aluno e reconstruir esse conhecimento na escola, passar por um processo de metacognição, para que o aluno tome consciência do que ele sabe. Como ontem dizia Gérard Vergnaud, a diferença entre saber fazer e compreender é que o aluno toma consciência do que sabe fazer e reconstrói esse conhecimento em um nível diferente.

As idéias que vou discutir com vocês não são minhas originalmente, partiram de um trabalho do Instituto Freudenthal, na Holanda. O principal proponente dessas idéias foi Leen Streefland, grande pesquisador, infelizmente já falecido. A idéia de Leen Streefland era de que a base conceitual do ensino das frações está na divisão. Para entendermos frações, temos de pensar em divisão. É interessante que eu esteja falando exatamente sobre esse tema seguindo a palestra de

Esther, que já vem insistindo na importância de se construir o conceito de divisão. Vou falar no papel da escola na construção desse conceito, ou seja, como a escola, trabalhando o conceito de divisão, pode levar a uma noção de fração. O ensino poderia ser facilitado se trabalhássemos com base na compreensão do conceito, e não na escrita da fração, se não partíssemos daquela idéia de fração como um número em cima de um tracinho e outro número embaixo. De onde partir então? Vou levantar três idéias que são fundamentais no trabalho com frações dentro dessa perspectiva.

Primeira idéia: é possível trabalhar frações desde o primeiro dia de aula, a partir da resolução de problemas. Desde o primeiro dia, não se diz ao aluno o que ele deve fazer, ele já deve começar resolvendo problemas e pensando. A atividade cognitiva do aluno vai estar engajada desde o primeiro dia de aula de frações. Espero que vocês todos experimentem alguma coisa na sala de aula e se apaixonem, da mesma maneira que eu, apaixonada que estou vendo as crianças raciocinarem para resolver as questões.

Segunda idéia: proporcionar a reflexão sobre a comparação de frações e equivalências não como uma regra que a professora está ensinando, não como uma comparação perceptual, mas como uma comparação conceitual, que vai interessar às crianças. Nessa abordagem elas querem saber se as duas frações são equivalentes. E vou mostrar alguns exemplos disso.

A terceira idéia é que esse ensino vai fortalecer as relações entre os conceitos de divisão, multiplicação e parte/todo. Todo ensino que fortalece as conexões entre conceitos diferentes proporciona uma evolução conceitual.

Repito, essas idéias partiram de Leen Strefland. O que vou dizer a vocês, que ele não disse, foi o que eu observei. Ele



sugere que comecemos com um problema assim, que apresento aqui já adaptado ao nosso trabalho: a professora da 3ª série trouxe uma sacola com 20 bolinhos para distribuir entre os alunos, e hoje vieram 30 alunos à aula. As crianças vão trabalhar em pequenos grupos, discutir suas respostas, e depois apresentá-las à classe.

A primeira pergunta é: ela vai poder dar um bolinho para cada um? As crianças facilmente compreendem que não.

Segunda questão: ela pode dar meio bolinho para cada um? Pode, mas vai sobrar. Ela pode dar meio bolinho, mas aí já começamos a colocar outro problema, porque as crianças falam que não se deve jogar o resto fora.

Terceiro problema : se ela fosse dar um bolinho para cada um, de quantos bolinhos ela iria precisar? Está se fazendo aqui uma comparação entre o número de objetos a serem distribuídos, a serem compartilhados, e o número de pessoas que vão recebê-los. Essa perguntas são fáceis, muito fáceis, mas as crianças estão começando a se sensibilizar para esse campo conceitual.

Vejam como o próximo problema é interessante. Vocês verão que começamos com uma questão muito simples, mas uma questão de frações. Dois meninos e três meninas têm uma torta igual. As meninas vão repartir a torta delas igualmente. Os meninos também vão repartir a torta deles igualmente. São três meninas repartindo uma torta e dois meninos repartindo uma outra torta. Quando eles terminarem de repartir e forem comer seus pedaçoes de torta, cada menina vai comer a mesma quantidade de torta que cada menino? Essa questão também é fácil; a partir de mais ou menos 6 anos as crianças já sabem que não, que as meninas vão ganhar pedaços menores.

Qual é a fração que os meninos vão comer? A professora então ensina que uma torta dividida por dois, escreve-se $1 \div 2$ ou $\frac{1}{2}$ e que essa fração chama-se meio ou metade. Qual é a fração que as meninas vão comer? É interessante que a professora leve os alunos a escrever $1 \div 3$ e pergunte como se pode escrever de outra maneira e ensine o termo – um terço.

Vocês estão vendo que já estamos começando a resolver problemas de frações, mas comparamos a fração sem precisar falar em fração, porque sabemos que entre 1 repartido em 2 e 1 repartido em 3, quem estiver no grupo de 3 vai sair perdendo. A criança já pensa: "Neste grupo eu não entro". Eu pergunto: este já não é um raciocínio com frações? Elas já não estão comparando um terço com um meio sem precisar saber o nome da fração? Já estão começando a pensar sobre frações e, o mais importante, a utilizar seu raciocínio da vida diária para resolver problemas sobre frações.

Ao começarmos a falar sobre esses problemas, podemos iniciar a ensinar às crianças qual é o número, ensinando a notação daquilo que é objeto de seu raciocínio. E sabem como ensinamos? Falamos: "Estes aqui vão ganhar uma torta dividida por dois. Escrevemos 1 dividido por 2. É assim que se escreve. Aqueles vão ganhar uma torta dividida por três". Vejam como a notação está entrando como parte do raciocínio. Quem aprendeu fração assim vai achar que um quarto é maior do que um terço? Não vai, porque já está ligando a notação de fração à idéia de divisão.

Agora vou mostrar outra figura e queria que vocês fizessem um exercício rapidinho e depois me dissessem como resolveram o problema. Tenho dois chocolates para repartir entre cinco crianças. Quanto cada uma vai ganhar? Já sabem a resposta?



***Platéia*** - *Dois quintos.*

***Terezinha Nunes*** - Dois quintos. Como você fez?

***Platéia*** - *Dois divididos por cinco*

***Terezinha Nunes*** – Dividiu cada barra em cinco partes e deu uma parte para cada criança. Vejam como vem a noção de dois quintos: divide-se cada barra em 5 partes e dá-se uma parte para cada criança. Assim, a criança já sabe que vai ser 1 dividido por 5. Vamos dizer a ela que isso se chama "um quinto". A outra barra também vai ser dividida por 5. Nesse caso também vai ser 1 dividido por 5, que se chama "um quinto". Não temos que ensinar regras para ela. Perguntamos: "Quantos quintos cada um vai receber?" Há dificuldade em responder isso? Se você sabe que cada criança vai ganhar um quinto de um chocolate mais um quinto do outro chocolate, quantos quintos são? Dois quintos. Como se escreve "dois quintos"? A notação coloca claramente a idéia de divisão: dois chocolates repartidos entre cinco crianças, $2 \div 5$ ou $\frac{2}{5}$.

Vejam bem que, mais à frente, a criança não vai precisar fazer desenho. Quando eu fizer essa pergunta, ela dirá "dois quintos", que é o mesmo que 2 dividido por 5. Não precisará fazer desenho, não precisará fazer conta. Ela vai chegar lá sozinha. Ou melhor, sozinha, não; mas com todas essas questões e ela vai chegar a essas notações por meio da divisão. Ela vai desenvolver a compreensão das notações e, assim, chegar a várias notações fracionárias.

O próximo exemplo é muito interessante. Eu o usarei para mostrar a vocês alguns aspectos do raciocínio das crianças que surgem nessas questões. O problema é distribuir o chocolate de forma que todos ganhem a mesma quantidade. Há três chocolates para serem divididos entre quatro crianças.

Antes de dar exemplos de como as crianças pensam, vou perguntar a vocês se já notaram algumas diferenças entre este ensino e o ensino que eu recebi? Notaram algumas coisas que vocês querem comentar? Nesta forma de ensinar, utilizando a compreensão que a criança tem da divisão, começa-se com situações-problema, com resolução de problemas, e não com a professora dizendo: "*Corte em tantas partes. Pinte tantas. Agora, conte as partes pintadas; esse número vai ficar em cima do tracinho; chama-se numerador*". No ensino a partir da divisão não há uma formalização inicial, antes da resolução de problemas. A notação aparece como resultado do raciocínio. Vai-se apresentando a idéia da divisão, discutindo as comparações entre frações, e essa discussão leva ao mesmo tempo à ordenação de frações e à equivalência.

Outra diferença que quero salientar entre as duas formas de ensinar é conceitual. No ensino a partir da divisão entram duas variáveis: o número de chocolates e o número de crianças. No ensino tradicional, o que ocorre? Trabalha-se com parte/todo: em quantos pedaços foi dividido o todo, quantos pedaços eu comi. com uma só variável.

A deputada Esther Grossi já vem chamando a atenção para a questão dos campos conceituais. Para formar um conceito operacional, é preciso estabelecer relações entre números. No ensino tradicional de frações, com a *pizza*, não há relações entre números, mas duas contagens: uma contagem das partes que você comeu e uma contagem das partes em que você tinha dividido a *pizza*. É outra concepção. Estamos passando por um caminho conceitual diferente, em que se está estabelecendo uma relação entre duas variáveis.

A próxima situação é uma daquelas também recomendadas por Leen Streefland. Ele escolhe as situações cuidadosamente, porque dão margem a várias respostas: o problema em que há 3 chocolates para serem divididos entre 4 crianças. Uma das soluções que aparece é a divisão de cada chocolate



em 4 pedaços. Partem-se os 3 chocolates em 4, tira-se de cada chocolate um pedaço para cada criança, dá-se 3 pedaços para cada uma. As crianças já vão fazer a notação de um quarto, mais um quarto, mais um quarto. Quantos quartos serão? Elas já sabem que são três quartos, porque a pergunta é: "São quantos quartos?". É como se perguntasse, por exemplo, quantas bolinhas são. À medida que as crianças resolvem os problemas da sua maneira, o professor vai oferecendo notações para aqueles problemas.

É interessante que, como observei, aparecem vários tipos de notações. Algumas crianças escrevem $\frac{3}{4}$, outras escrevem 3 $\frac{1}{4}$, um número ao lado do outro. Nesse caso, temos que considerar com as crianças qual é a diferença entre as duas notações. Quando as crianças escrevem assim, o que elas estão pensando, na realidade, é três vezes um quarto, o que é uma idéia correta. Mas vamos ter de lhes mostrar que, se elas escreverem assim, vamos ler "3 chocolates, mais um quarto". Elas começam também a pensar nos detalhes da notação.

Mas essa não é a única solução que aparece.

No próximo *slide*, vou mostrar outra solução. Há crianças que, em vez de dividirem todos os chocolates em quatro, vão dividir os três chocolates ao meio. Elas dão metade para um, metade para outro, metade para outro, e metade para outro. Usaram dois chocolates, distribuíram quatro metades, e sobra um chocolate. Elas dividem o último chocolate em quatro e distribuem um quarto para cada um. Ao escreverem quanto cada um ganhou, escrevem $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$. Surgem duas respostas diferentes para o problema. Algumas dividiram os três chocolates em quatro, distribuíram os quartos, e cada um ganhou $\frac{3}{4}$. Vejam o problema da equivalência surgindo espontaneamente. As próprias crianças vão começar a questionar. "*Eu fiz assim, ela fez assim?*" Esse é um bom momento para perguntarmos às crianças: "A divisão está certa? Está justa? Está todo mundo ganhando a mesma coisa? É a mesma coisa dar $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ ou dar $\frac{3}{4}$ para cada um?" Em vez de nós tentarmos provar a equivalência para a criança, é ela que vai provar a equivalência para a professora. Há crianças que vão dizer: "*É tudo a mesma coisa, porque a metade é a mesma coisa que se eu tivesse dividido em quatro e tirado dois pedaços*". Elas mesmas vão construir esses argumentos.

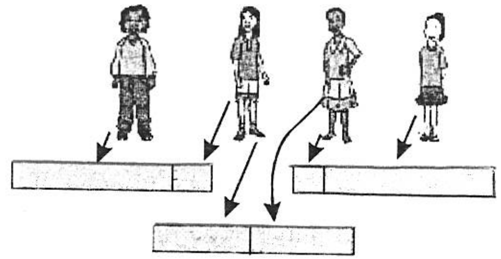
O que os alunos podem descobrir nesse processo de resolução de problemas é que o número fracionário é diferente, porque não basta olhar para ele, como se faz com o número inteiro. Nós olhamos para o 2 e para o 3 e já sabemos que são dois números diferentes. Mas olhamos para o número fracionário e não sabemos se as quantidades são as mesmas, porque dois quartos e um meio são escritos de maneira diferente, mas têm valor igual. Elas mesmas, então, começam a perceber isso. Há criança que chega a explicitar isso: "*Olha, escrevi deste jeito, ele escreveu daquele jeito e é tudo a mesma coisa.*" Eu fico de queixo caído com o que as crianças descobrem nesse processo.

Vou mostrar mais alguns exemplos dessa descoberta no próximo *slide*.

Isso tudo foi trabalhado em grupos de quatro ou cinco alunos. Quando não surgiam duas soluções diferentes no mesmo grupo, nós perguntávamos se havia outro jeito de fazer a distribuição, porque o que nós queríamos é que eles comparassem soluções diferentes, o que geralmente acontecia.

No problema de três chocolates divididos entre quatro crianças, um aluno usou o desenho que apresentamos e tentou resolver o problema dos chocolates no olhômetro. Ele dividiu os chocolates mais ou menos e distribuiu como indicado na figura com as setinhas: "Dou este para um, este para outro, este para outro. Juntando estes três pedacinhos, dou para o quarto. Então, são quatro porções". Ele olhou bem e respondeu: "Três quartos ou dois terços".





Confesso que, na primeira vez que me aconteceu isso, fiquei sem saber como iria mostrar para aqueles meninos que dois terços e três quartos não eram a mesma coisa. Eu disse que tentaríamos descobrir se três quartos e dois terços são a mesma coisa analisando como se pode distribuir os chocolates, e dei tempo para eles pensarem.

Vejam a solução interessantíssima de uma das crianças. Anna tinha chegado à sua resposta dividindo os três chocolates em quatro partes e dando um pedaço para cada criança. Ela então dividiu os três chocolates em terços, o que dá nove terços. Deu dois terços para cada um e sobrou um pedaço. Ela disse: "Não é igual, porque, quando eu dou três quartos para cada um, distribuo todo o chocolate, mas quando dou dois terços para cada um, sobra um pedaço. Então, não pode ser a mesma coisa. Se fosse a mesma coisa, a soma de três quartos tinha que ser igual à soma de dois terços". Vejam que raciocínio sofisticado e interessante. Foi a criança, que só tem 8 anos, que fez tudo sozinha. Acontecem coisas impressionantes quando estimulamos as crianças a pensar.

O exemplo da Anna também é interessante porque o que ela descobre e faz, ela consegue explicar. Nem sempre é assim. Às vezes, a criança descobre uma solução e não consegue explicá-la para os outros. Por isso, temos de saber um pouco sobre o que vai acontecer, para poder ajudá-la na hora dessa explicação, porque nem sempre a criança consegue explicar o que sabe demonstrar para ela mesma.

Vamos ver mais um problema. Há 2 chocolates para serem repartidos entre 3 crianças. Quanto cada uma vai ganhar? Mesmo quando as crianças sabem responder de imediato que é 2 dividido por 3 ou dois terços, ainda assim elas querem desenvolver todos os raciocínios possíveis em torno dessa questão. O raciocínio mais simples é este: cada chocolate é dividido em três. De cada chocolate a criança recebe um terço. Então, a cota dela é de dois terços. Podemos sempre discutir a questão da notação.

Mas apareceu outra solução, pois há sempre uma criança que encontra algo diferente. Esta fez assim: "Eu vou dividir dois chocolates ao meio. Cada criança recebe uma metade. Sobra uma metade, que eu vou dividir em três partes". Parece até que estou inventando, que criança não sabe pensar desse jeito. Por isso, estou dizendo: vão para a sala de aula experimentar. Mas isso não acontece em um dia; estou falando sobre um programa de ensino, em que as crianças estão resolvendo problemas e pensando sobre essas dificuldades.

Esta solução foi muito interessante, porque da resolução dessa criança nós podemos fazer várias discussões. Ela sabia, na prática, quanto cada um ganhava: "Cada um recebe a metade, mais um pedaço daquele". Perguntamos a ela: "Quanto é esse pedaço? Que fração é esse pedaço?" Se tudo tem uma representação matemática, precisamos representar esse pedaço; precisamos saber como vai ser o nome desse pedaço.



Esse foi um problema que causou às crianças muita dificuldade, porque elas não tinham, ainda, neste momento, muito clara a idéia de que é necessário saber reconstruir o todo para saber qual é o nome dessa parte. Por isso, a intervenção didática aqui precisa ajudar a criança a pensar na relação parte-todo. Simplesmente perguntamos à criança: "Quantos daqueles pedacinhos você precisa para fazer um todo?" É isso que vai dizer a ela qual o nome daquela fração.

E isso não é óbvio para as crianças. Elas começam a pensar, primeiro, que na metade havia três pedacinhos. Há criança que vai dizer: "*Quatro*". Outra vai responder: "*Quatro, não, porque este é de outro tamanho*". Elas mesmas vão discutindo entre si. Apareceram dois caminhos diferentes. Um deles foi o de uma criança que disse: "*Se em uma metade há três, na outra metade também há três. Então, vão ser seis*". O outro foi de uma criança que disse: "*Se cortasse tudo, até o final, iria ficar com seis*".

Aparecem raciocínios diferentes, mas as crianças chegam a dizer que — vejam que coisa interessante, pois esse era o quinto dia de aula — um meio mais um sexto é a mesma coisa que dois terços. Que coisa complicada, não é? Vamos começar, então, a explorar essas idéias: um sexto, com relação a dois terços, como é? Elas mesmas querem saber as respostas dessas equivalências.

Vamos ver outro exemplo. Houve um aluno que dividiu tudo em sextos e os distribuiu. Ele tinha quatro sextos, e os outros tinham dois terços. Eles se perguntaram, então, se dois terços e quatro sextos eram a mesma coisa. Nessa discussão apareceu um raciocínio que achei interessantíssimo. Vejam como as crianças estão agora usando a relação entre parte e todo para responder às questões. Uma criança diz que um terço, mais um terço, mais um terço dá um chocolate. Dois sextos, mais dois sextos, mais dois sextos dá um chocolate. Então têm de ser a mesma coisa, porque se tomou a mesma parte três vezes e deu o mesmo todo que da outra vez. O menino que encontrou essa resposta não explicou muito claramente o que queria dizer. Ele escreveu a soma, indicando que $1/3 + 1/3 + 1/3$ dá um chocolate e $2/6 + 2/6 + 2/6$ também dá um chocolate e disse: "*Eu coloquei aqui, professora, mas não sei explicar por que isso significa que os dois são a mesma coisa*". Para ele, a prova pelo raciocínio era suficiente, e não precisava dizer mais nada.

Uma das conquistas que vimos no processo de aprendizagem dessa forma de ensino é que estamos usando o conhecimento intuitivo da divisão, por parte dos alunos, como base da construção do conceito de fração.

Além disso, constatamos que estabelecemos a conexão entre fração, divisão, multiplicação e razão, porque, na realidade, dois chocolates divididos por três crianças é uma razão de dois para três. A equivalência de fração torna-se uma questão que as próprias crianças querem resolver. Por fim, percebemos que incentivamos as conexões com situações problemas.

Gostaria de mostrar mais alguns exemplos de problemas, sem apresentar respostas de crianças, para não ficar muito longa a apresentação.

Um problema que usamos foi: A professora levou os alunos a uma *pizzaria*. Cada aluno vai comer um terço de *pizza*. A professora comprou 8 *pizzas*. Quantos alunos há na classe? Vai-se partir da idéia de que cada aluno vai ganhar um terço e há 8 *pizzas*. Vai-se fazer a volta, da fração para o todo. Se se partiu da divisão para a fração, agora se parte da fração para o número de alunos.



Uma sugestão de Leen Streefland é que compliquemos a situação e digamos: "Na *pizzaria* não há mesas para 24 pessoas. Nem todos podem se sentar à volta da mesma mesa. É preciso distribuir os alunos em mesas diferentes e ver quantas pizzas vão ser colocadas em cada mesa". Isso provoca discussões muito interessantes, porque se se põem duas *pizzas* em uma mesa, tem-se de colocar o número certo de alunos, para que a divisão seja correta.

Lembrem-se de que estou apenas apresentando exemplos, há muitas coisas que podemos fazer explorando o conceito de frações.

Vejam outro tipo de problema, mais avançado, que usamos mais tarde, quando as crianças já exploraram mais o conceito. Na segunda-feira, misturam-se três litros de tinta branca com três de tinta vermelha e, na terça-feira, dois com dois. A cor vai ficar a mesma? Que fração da mistura foi feita com branco? As crianças começam a usar a idéia de fração em situações mais complexas e comparar representações em outras situações. Um criança diz que é metade branco, metade vermelho nos dois dias. Outra criança diz que é $3/6$ branco e $3/6$ vermelho. Mas aparecem erros também na representação – por exemplo, uma criança disse que era $3/3$ branco e $3/3$ vermelho e isso provoca análises interessantes da notação de fração.

Quero finalisar dizendo que a nossa intenção inicial nessa pesquisa era fazer uma comparação entre duas classes: uma que tivesse recebido o ensino de frações desta maneira e outra que tivesse recebido o ensino tradicional. No entanto, tornou-se impossível fazer essa comparação, porque os alunos submetidos a esse ensino de frações a partir da divisão se motivavam, se envolviam, discutiam, enquanto os outros, que estudavam pelo mesmo método pelo qual eu aprendi, estavam todos a bocejar; não havia motivação, ninguém se envolvia.

Por isso não foi possível, de fato, fazer um estudo comparativo da aprendizagem pelos dois métodos. A comparação seria muito artificial, porque em um grupo as crianças se envolviam, resolviam problemas etc. e no outro grupo elas não tinham esse tipo de participação. Mas considerando-se os raciocínios que surgem na sala de aula, quem de vocês já ensinou frações deve estar percebendo que os raciocínios são completamente diferentes.

Este é o final da história, hoje. Quando encontrei um caminho para explorar os conceitos que a criança desenvolve na vida diária e sua utilização no ensino de frações, encontrei uma resposta ao desafio que me faziam antes. Toda criança pode aprender frações? Hoje estou convicta de que sim. Todo o mundo pode aprender frações e todo mundo gosta de aprender frações, quando pode utilizar seu próprio raciocínio.

---

*A mineira Terezinha Nunes é professora de Psicologia na Universidade de Oxford-Brookes, depois de ter passado pela Universidade de Londres e pela Universidade Federal de Pernambuco. É autora de "Na Vida 10, na Escola Zero", "Dificuldades na Aprendizagem da Leitura: Teoria e Prática", "Crianças Fazendo Matemática" e "Aprender Pensando", entre outros.*