S T Q Q S S D __/__/__

Mas nós queremos $\bar{w} = au + bv$

Substituindo:

$$\begin{cases} \langle w - (au+bv), u \rangle = 0 \\ \langle w - (au+bv), v \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \langle u,u\rangle a + \langle u,v\rangle b = \langle u,w\rangle \Rightarrow (a,b) \\ \langle v,u\rangle a + \langle v,v\rangle b = \langle v,w\rangle \end{cases}$$

sistema normal

Voltando p/ FECHAR

Nós encontramos (a,b) que minimiza
$\|w - (au+bv)\|$

Isso é o mesmo que minimizar
$\|w - (au+bv)\|^2$

Suponha $\langle u,v\rangle = \sum_i p_i u_i v_i$

$$\|w-(au+bv)\|^2 = \langle w-(au+bv), w-(au+bv)\rangle$$
$$= \sum_i p_i(w_i - (au_i + bv_i))^2$$

lado direito — lado esquerdo

Chamamos de $Q(a,b)$ = resíduo quadrático.

23/08

- Aulas passadas

MMQ: demos um sentido p/ sistemas lineares sobredeterminados sem solução

Principal aplicação:

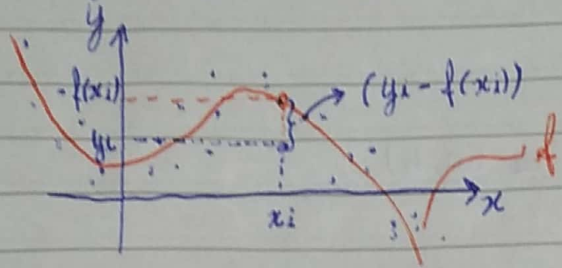
ajuste de funções e de equações (p. ex. ajuste de reta)

__/__/__

S T Q Q S S D

Suponha um conjunto de dados $i = 1, \ldots, N$ da forma (x_i, y_i)

Grandezas x e y (escalares)



Suspeita: existe uma função que relaciona y com x

Suspeita pode vir:

- de um modelo teórico
- de conclusões a posteriori, i.e. após examinar o gráfico

Aí aparece a questão: qual é a melhor função que faz isso?

qual é o critério matemático p/ decidir sobre isso?

O critério p/ MMQ será:

$\rightarrow \underbrace{(y_1, y_2, \ldots, y_N)}$ $\in \mathbb{R}^N$

chamamos $\vec{y}$ ~~vetor do $\mathbb{R}^N$~~

$\underbrace{(x_1, x_2, \ldots, x_N)}_{\vec{x}} \in \mathbb{R}^N$

$\rightarrow \underbrace{(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_N))}_{\equiv \vec{f}} \in \mathbb{R}^N$

O critério vai ser olhar p/ a distância entre $\vec{y}$ e $\vec{f}$ no $\mathbb{R}^N$.

spiral

S T Q Q S S D   __/__/__

Se no $\mathbb{R}^N$ temos um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$,

$$d(\vec{y}, \vec{f}) = \|\vec{y} - \vec{f}\| = \sqrt{\langle \vec{y} - \vec{f}, \vec{y} - \vec{f} \rangle}$$

Em particular, vamos trabalhar com

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{N} p_i u_i v_i, \quad \underline{p_i > 0}$$

$$\Downarrow$$

$$d(\vec{y}, \vec{f}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} p_i (y_i - f(x_i))^2}$$

Se são apresentadas duas funções "candidatas", f e g, a "melhor" será aquela com a menor distância a $\vec{y}$ (como acima)

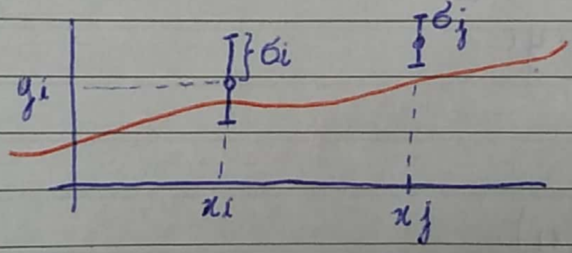
Ou seja,

f é melhor do que g se $d(\vec{f}, \vec{y}) < d(\vec{g}, \vec{y})$

Obs: Neste caso, os pesos podem surgir da variância das medidas de y

Hipótese: x_i: sem erro ou erro desprezível

$y_i \pm \sigma_i$



Mudança: em vez de olhar p/

$$y_i - f(x_i)$$

olhamos p/ a distância relativa a σ_i:

$$\frac{y_i - f(x_i)}{\sigma_i}$$

$$d(\vec{f}, \vec{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{y_i - f(x_i)}{\sigma_i}\right)^2} = \sqrt{\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2} (y_i - f(x_i))^2} \quad \leftarrow p_i$$

~ // ~

"melhor": ok, bem definido
O universo de funções é muito vasto. É preciso restringir onde vamos procurar a melhor.

parâmetros

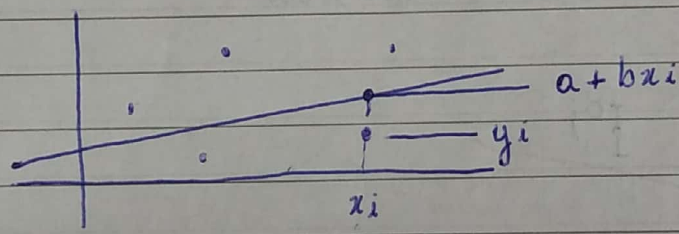
Por exemplo: Suspeitamos que f é uma reta, isto é,

$$f(x) = a + bx$$

As funções que são 'retas' são determinadas por 2 parâmetros (números), a e b.
Agora a pergunta é: qual é a melhor reta?
Na prática, qual é o par (a, b) que torna a distância de $f(x) = a + bx$ a y a menor possível?

Queremos minimizar

$$d(\vec{f}, \vec{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} p_i (y_i - \underbrace{(a + bx_i)}_{f(x_i)})^2}$$



Mas

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + bx_1 \\ \vdots \\ a + bx_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} bx_1 \\ \vdots \\ bx_N \end{pmatrix} =$$

$$= a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{u} + b \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}}_{v} \leftarrow$$ combinação linear de dois vetores

Ou seja, estamos procurando (a, b) que minimiza a distância de $\vec{y}$ a $\underline{au + bv}$.

Ou seja, caímos no mesmo problema da aula passada.
Cairíamos no mesmo problema se aplicássemos MMQ p/ o sistema

$$\begin{cases} 1 \cdot a + x_1 \cdot b = y_1 \\ 1 \cdot a + x_2 \cdot b = y_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ 1 \cdot a + x_N b = y_N \end{cases}$$

Enfim, a solução MMQ p/ esse problema será como antes:

$$\begin{cases} \langle u, u \rangle a + \langle u, v \rangle b = \langle u, y \rangle \\ \langle v, u \rangle a + \langle v, v \rangle b = \langle v, y \rangle \end{cases}$$

Notação abusiva:

$$\begin{cases} \langle 1, 1 \rangle a + \langle 1, x \rangle b = \langle 1, y \rangle \\ \langle x, 1 \rangle a + \langle x, x \rangle b = \langle x, y \rangle \end{cases}$$

$$\langle 1, 1 \rangle = \sum_i p_i \cdot 1 \cdot 1 = \sum p_i$$

(se $p_i = 1, \forall i \Rightarrow \langle 1, 1 \rangle = N$)

$\langle 1, x \rangle = \sum p_i x_i$ $\qquad$ $\langle 1, y \rangle = \sum p_i y_i$

$\langle x, x \rangle = \sum p_i x_i^2$ $\qquad$ $\langle x, y \rangle = \sum p_i x_i y_i$

Outro exemplo (s/ números)

$y = a \cos x + b \operatorname{sen} x$

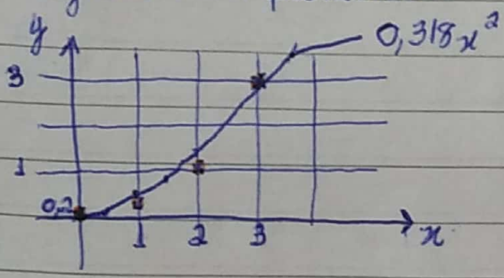
$$\begin{cases} \langle \cos x, \cos x \rangle a + \langle \cos x, \operatorname{sen} x \rangle b = \langle \cos x, y \rangle \\ \langle \operatorname{sen} x, \cos x \rangle a + \langle \operatorname{sen} x, \operatorname{sen} x \rangle b = \langle \operatorname{sen} x, y \rangle \end{cases}$$

p. ex. $\langle \operatorname{sen} x, \cos x \rangle = \sum_i (\operatorname{sen} x_i)(\cos x_i) p_i$

$$\langle \operatorname{sen} x, y \rangle = \sum_i p_i y_i \operatorname{sen} x_i$$

Exemplo

Ajuste de 1 parâmetro



x_i	y_i
0	0
1	0,2
2	1
3	3

Modelo

$y = ax^2$

Sistema:

$$\begin{cases} x_1^2 \cdot a = y_1 \\ x_2^2 \cdot a = y_2 \\ x_3^2 \cdot a = y_3 \\ x_4^2 \cdot a = y_4 \end{cases}$$

1 incógnitas
4 equações

Vamos usar pesos uniformes: $p_i = 1$

O que estamos minimizando?

$$Q(a) = \sum_i (y_i - a x_i^2)^2$$

E quem é o $\underline{a}$ que minimiza?

$$\boxed{\langle x^2, x^2 \rangle a = \langle x^2, y \rangle}$$

$$\langle x^2, x^2 \rangle = \sum_i x_i^2 x_i^2 = \sum_i x_i^4 = 98$$

$$\langle x^2, y \rangle = \sum_i y_i x_i^2 = 31,2$$

$a = \dfrac{31,2}{98} = \underline{\underline{0,318}}$ $\qquad$ $\underline{R}$: $\boxed{y \cong 0,318x^2}$

No gráfico

Obs: Deu $a = \cancel{\dfrac{\sum x_i^4}{\sum y_i x_i^2}}$ $\dfrac{\sum y_i x_i^2}{\sum x_i^4}$

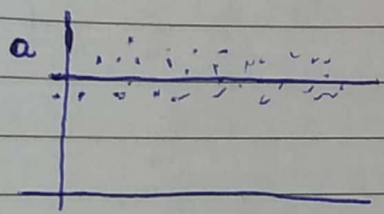
Poderia dar $a = \dfrac{\sum y_i / x_i^2}{N}$?

$N = \sum 1$ Será que existem p_i's p/ dar isso?

$$\boxed{p_i = \frac{1}{x_i^4}} \Rightarrow \langle x^2, x^2 \rangle = \sum_i \frac{1}{x_i^4} \cdot x_i^2 \cdot x_i^2 = N$$

$$\langle x^2, y \rangle = \sum_i \frac{1}{x_i^4} \cdot y_i \cdot x_i^2 = \sum \frac{y_i}{x_i^2}$$

$\boxed{\text{Sim, c/ } p_i = \frac{1}{x_i^4}}$



$a \cdot 1 = y$

$\langle 1, 1 \rangle a = \langle 1, y \rangle$