LISTA 2 MEC.EST 2NDO SEMESTRE 2019

Probabilidades — Lista 2. Entrega 12 de setembro

Exercício 1. **Mariuska:** A informação I é dada por

> Uma urna contém K urnas menores, numeradas $\alpha = 1....K$. O conteúdo das urnas é conhecido, i.e. $q_{\alpha,i}$ é o número de bolas do tipo i na urna α. Podemos pensar um caso simples onde há duas urnas pequenas, uma com 2 bolas, uma preta e outra branca; a outra com duas bolas uma azul e outra vermelha. Uma urna menor é escolhida e as duas bolas são extraidas mas sua cor não é revelada. João leva uma bola para Marte e Maria leva a outra bola para a lua.

Ambos João e Maria sabem I. Condicionado em I, qual é a probabilidade de $X_M = V$ (bola de Maria é vermelha)? Qual a probabilidade que seja preta?
Maria olha a sua bola e efetivamente é vermelha. Mas João não sabe este resultado. Qual é a probabilidade que João atribui à sua bola (que ainda não foi revelada)? Este problema é bem simples. Comparem a probabilidade $P(X_J|I_J)$ que João atribui a sua bola ser azul com $P(X_J|I_M)$ que Maria atribui à bola de João ser azul. Notem que a probabilidade só pode ser caclulada depois de ter o condicionante claramente especificado.

Exercício 2. Considere um problema de "urnas"onde há cartas em lugar de bolas. Suponha que ninguém sabe fazer maço. Um baralho de 52 cartas é formado por cartas numeradas de 1 a 13 de 4 naipes (a)Três cartas são selecionadas de um baralho sem reposição. Encontre a probabilidade de não tirar um coração.
(b) Um jogador recebe 5 cartas. Qual é a probabilidade que três tenham o mesmo número?

Exercício 3. (a) A variável aleatória X é distribuida uniformemente no intervalo $0 \leq x < 2\pi$. Fora desse intervalo a densidade de probabilidade é zero. A variável Y toma valores no intervalo $-1 \leq y \leq 1$ está relacionada com X por $Y = \sin X$. Encontre a densidade de probabilidade de y.
(b)A variável X tem densidade de probabilidade dada pela função $f(x)$. A variável Y é definida pela transformação $Y = f(X)$. Qual é a densidade de probabilidade de Y?
(c) Em Física 1 (ou antes) foi calculado o alcance $A(\theta, v_0)$ de um projétil, sob a ação de um campo gravitacional g uniforme num terreno plano, como função do ângulo de lançamento e da velocidade inicial de módulo v_0. Encontre a probabilidade de A, $P(A|I_1)$ sob a informação $I_1 : v_0$ é conhecido e θ é uniforme entre θ_1 e θ_2.
(d) $P(A|I_2)$ o mesmo do anterior onde I_2: θ é conhecido e v_0 é uniforme entre v_1 e v_2.
(e) $P(A|I_3)$ o mesmo do anterior onde I_3: θ é uniforme entre θ_1 e θ_2 e v_0 é uniforme entre v_1 e v_2.

Exercício 4. Uma variável tem distribuição normal

$$P(x|\mu,\sigma) = N \exp -\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2$$

(1) Encontre a normalização $N(\sigma)$
(2) Encontre os valores esperados $\mathbb{E}(x|\mu,\sigma)$ e $\mathbb{E}(x^2|\mu,\sigma)$.
(3) Encontre uma expressão para os momentos centrais $\mathbb{E}[(x-\mu)^k]$ de uma distribuição gaussiana com média μ e desvio padrão σ, para k inteiro positivo.
(4) Para diferentes valores de $\mu = 0,3$ e $\sigma = 1,4$, desenhe a função $\phi(x|\mu,\sigma)$, a distribuição cumulativa de x, definida por

$$\phi(x|\mu,\sigma) = \int_{-\infty}^{x} P(x'|\mu,\sigma)dx'$$

(o esboço deve ser feito à mão)

Exercício 5. Limites da binomial -Gaussiana

(1) Considere uma distribuição binomial $P(m|pN)$ com parâmetro p. Mostre que para valores grandes de N a distribuição é bem aproximada por uma gaussiana. Calcule a média e variancia como função de N.

(2) Mostre que se N for considerado uma variável real t e $x = 2m - N$, a gaussiana satisfaz a equação de difusão para $p = 1/2$:

$$\frac{\partial \rho(x;t)}{\partial t} = \frac{D}{2}\frac{\partial^2 \rho(x;t)}{\partial x^2},$$

e tente encontrar a equação para $p \neq 1/2$.

Exercício 6. Limites da binomial: Poisson

(1) Faça o limite $N \to \infty$ e $p \to 0$ com $\lambda = p/N$ fixo para obter a distribuição de Poisson.

(2) Encontre a normalização e

(3) os dois primeiros momentos.