MAT-2454 – Cálculo II
Aula 08: Exercícios, Coordenadas Polares e Próximos Passos

Alexandre Lymberopoulos

Para Escola Politécnica – USP

IME–USP — Departamento de Matemática

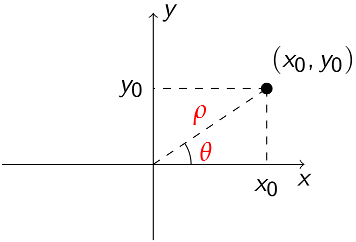
Exercícios para a próxima aula:

- Material: Lista 1 (clique aqui).
- 1.15; 1.17;
- 1.21, itens: b, d, f; 1.22;
- 2.1, itens: h, j, k, l; 2.2; 2.5 e 2.6.
- Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \frac{2xy^2}{x^2+y^4}.$$

1. Esboce uma família de curvas de nível para f.
2. Determine a imagem de f. (o gráfico de f é bastante desafiador! Veja aqui).
3. Existe alguma extensão contínua de f para todo o plano $\mathbb{R}^2$? Justifique.

- Uma alternativa às coordenadas cartesianas: determinando cada ponto através de sua distância em relação à origem ($\rho > 0$) e o ângulo ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) com o eixo Ox (poderiam ser qualquer outro ponto e uma reta que o contenha).



Relações:
$x = \rho \cos \theta$;
$y = \rho \sin \theta$.

Inversas:
$\theta = \arctan(y/x)$;
$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

- Tem singularidades!
- Se θ é constante obtemos retas (de coeficiente angular $\tan \theta$) passando pela origem.
- Se ρ é constante obtemos círculos (de raio ρ) centrados na origem.

- Relações entre ρ e θ.
- Exemplo: trajetória descrita por um ponto de uma circunferências que rola, sem deslizar, sobre outra de mesmo raio $a > 0$ (aqui!):

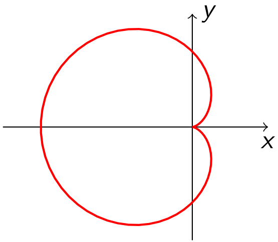
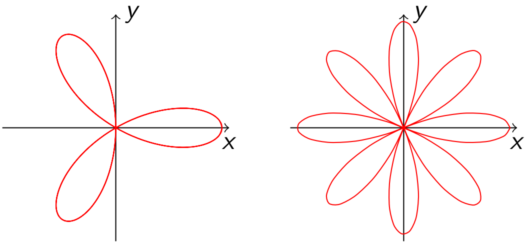


FIGURA: Uma cardioide

- Em coordenadas polares é descrita por $\rho = 2a(1 - \cos\theta)$.
- Uma parametrização é $\gamma(t) = 2a\big(\cos t(1 - \cos t), \sin t(1 - \cos t)\big)$, $t \in [0, 2\pi]$;
- Coordenadas cartesianas: $(x^2 + y^2)^2 + 4ax(x^2 + y^2) - 4a^2y^2 = 0$.

- Rosáceas de k (ou $2k$) pétalas: $\rho = a\cos(k\theta)$.



(A) $k = 3$ (B) $k = 4$

- Experimente esboçar rosáceas com $k \in \mathbb{Q}$ e depois com $k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$!
- As estradas do estado de São Paulo são numeradas usando coordenadas polares, com pólo na capital e "eixo" como o meridiano que passa ali.

- As curvas de nível indicam a “direção” no domínio em que uma função cresce ou decresce.
- Exemplo: $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ tem como curvas nível circunferências centradas na origem tais que, quanto maior o raio, menor o valor da função. Equivalentemente, quando mais perto da origem maior o valor da função.
- O valor máximo de f é atingido quando sua curva de nível igual a esse valor degenera-se a um ponto. Isso ocorre no nível $c = 1$ (qualquer corte por um plano $z = k$, $k > 1$, não intercepta o gráfico de f.
- Sob boas confições, isso é o que acontece num ponto de máximo (ou, adaptando, de mínimo).
- Desafio: utilize essa ideia para determinar os valores máximo e mínimo que $f(x,y) = xy$ assume, quando restrita ao disco $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\right\}$. O problema tem solução no domínio máximo de f?

Referências

- Aula presencial

Boa Prova!

lymber@ime.usp.br