CÁLCULO II – 12 – MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Considere os seguintes problemas de otimização:

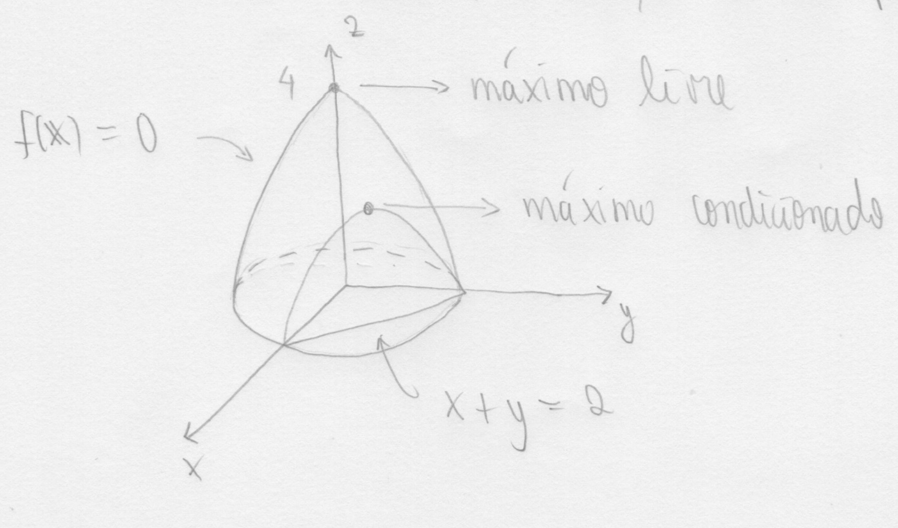
1) Determinar o máximo de $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{x} \longmapsto f(\mathbb{x}) = 4 - x^2 - y^2$

2) Determinar o máximo de $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{x} \longmapsto f(\mathbb{x}) = 4 - x^2 - y^2$

sujeita ao vínculo: $x + y = 2$

O problema (1) é um problema de otimização irrestrita, cuja solução pode ser encontrada pelos métodos desenvolvidos na aula anterior. Já o problema (2) consiste de um problema de otimização restrita, no qual procuramos pelo máximo de f em um certo subconjunto de seu domínio dado pela reta $x+y=2$. Neste contexto a solução do problema (1) é denominada máximo livre, enquanto que a do problema (2), máximo condicionado.

Geometricamente, a solução de tais problemas é:



Diferentemente do exemplo apresentado, nem sempre é trivial ou sequer factível resolver o vínculo de forma a reduzir um problema de otimização restrita a um problema de otimização irrestrita. Nesta aula, preocupamo-nos, pois, em desenvolver um método, conhecido como método dos multiplicadores de Lagrange, para lidar diretamente com uma classe de problemas de otimização restrita.

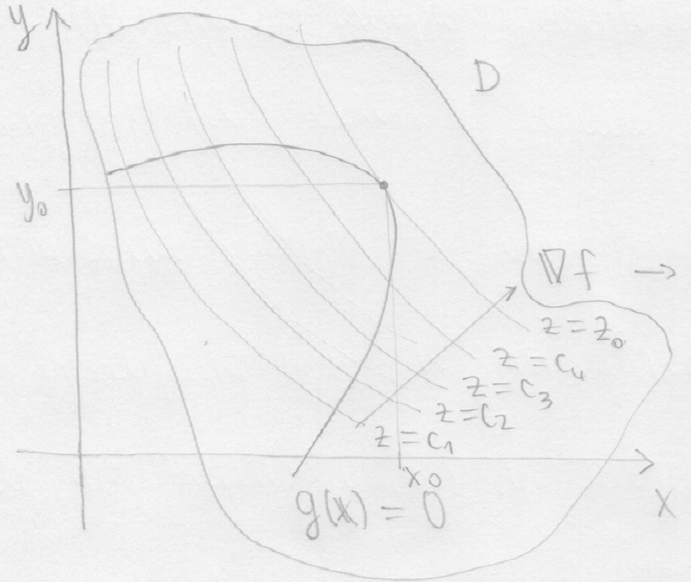
Especificamos a seguir de uma maneira matematicamente precisa o problema que desejamos resolver:

Problema 1: sejam $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, com D um conjunto aberto, f diferenciável e g de classe $\mathcal{C}^1$, e $\tilde{D} = \{\mathbf{x} \in D \mid g(\mathbf{x}) = 0\}$, para cujos pontos, i.e., $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{B}$, supomos adicionalmente que $\nabla g(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$.

Queremos determinar uma condição necessária para que um ponto $\mathbf{x}_0 \in \tilde{D}$ seja um extremo local de f em $\tilde{D}$.

Antes de enunciarmos e demonstrarmos tal teorema, apresentamos um argumento geométrico como motivação de tal resultado. Considere inicialmente as curvas de nível do campo escalar f; i.e.,

$$f(x, y) = z$$



e suponha por conveniência que $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$ e que z cresce no sentido indicado na figura, de forma que

$$c_1 < c_2 < c_3 < c_4 < z_0$$

Assim, se (x_0, y_0) for um extremo local, a reta tangente à curva de nível $f(x_0, y_0) = z_0$ deve coincidir deve coincidir com a reta tangente ao vínculo $g(x,y) = 0$. Consequentemente,

$$\nabla f(x_0) \parallel \nabla g(x_0) \Leftrightarrow \exists \lambda_0 \neq 0 \mid \nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$$

Portanto, uma condição necessária para que x_0 seja um extremo local de f em B é que exista um $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tal que

$$\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0).$$

Com isso podemos enunciar o primeiro teorema que descreve o método dos multiplicadores de Lagrange, λ.

Teorema 12.1: " Sejam $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, diferenciável e $g: D \subseteq \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R}$, com D um conjunto aberto. Se $\nabla g(x) \neq \emptyset$, $\forall x \in \tilde{D} = \{x \in D \mid g(x) = 0\}$. Então uma condição necessária para que $x_0 \in \tilde{D}$ seja um extremo local de f em $\tilde{D}$ é que exista um $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$."

Demonstração:

Suponha sem perda de generalidade que $x_0 = (x_0, y_0) \in \tilde{D}$ seja um máximo local de f em $\tilde{D}$. Logo, $\exists r \in \mathbb{R}^*_+$ tal que

$B(x_0, r) \subset D$ e $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in B(x_0, r) \cap \tilde{D}$.

Note que $x \in B(x_0, r) \cap \tilde{D} \Leftrightarrow g(x) = 0$ e $x \in B(x_0, r)$.

Agora como $g: B(x_0, r) \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R}$, $g(x_0) = 0$ e $\nabla g(x_0) \neq 0$ podemos invocar o teorema da função implícita para garantir que existem intervalos abertos $I \ni x_0$ e $J \ni y_0$ tais que $\forall x \in I$, $\exists!\, y = h(x) \in J$, que satisfaz $g(x, h(x)) = 0$ com $h: I \to J$ diferenciável. Onde supomos, também sem perda de generalidade, que $\partial_y g(x_0) \neq 0$.

Com isso podemos introduzir uma curva diferenciável γ:

parametrizada por $\mathbb{r} : I \longrightarrow B(x_0, r)$, $t \in I \mapsto \mathbb{r}(t) = (t, h(t))$

tal que $\mathbb{r}(t_0) = (x_0, y_0)$, $\mathbb{r}'(t_0) \neq 0$ e $g(\mathbb{r}(t)) = 0$, $\forall t \in I$.

Da continuidade de $\mathbb{r}$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \Rightarrow \mathbb{r}(t) \in B(x_0, r) \cap \mathring{D}.$$

Logo,

$$f(\mathbb{r}(t)) \leq f(\mathbb{r}(t_0)) \quad , \quad \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta).$$

Portanto, t_0 é máximo local de $F(t) = f(\mathbb{r}(t))$ e como $t_0 \in \mathring{I}$,

temos que $F'(t_0) = 0$, ou seja

$$0 = F'(t_0) = \nabla f(\mathbb{r}(t_0)) \cdot \mathbb{r}'(t_0) \qquad (*)$$

Por outro lado, diferenciando a relação $g(\mathbb{r}(t)) = 0$ em I

$$0 = g'(\mathbb{r}(t)) = \nabla g(\mathbb{r}(t)) \cdot \mathbb{r}'(t)$$

que em particular, demanda que,

$$\nabla g(\mathbb{r}(t_0)) \cdot \mathbb{r}'(t_0) = 0 \qquad (\#)$$

Subtraindo (#) de (*), temos que:

$$\left(\nabla f(x_0) - \nabla g(x_0)\right) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0$$

como $\mathbf{r}'(t_0) = \left(1, \partial_t h(t_0)\right) = \left(1, -\dfrac{\partial_x g(x_0)}{\partial_y g(x_0)}\right)$

a condição acima equivale a:

$$\partial_x f(x_0) = \partial_y f(x_0) \frac{\partial_x g(x_0)}{\partial_y g(x_0)}$$

Consequentemente,

$$\nabla f(x_0) = \left(\partial_y f(x_0) \frac{\partial_x g(x_0)}{\partial_y g(x_0)}, \partial_y f(x_0)\right) = \frac{\partial_y f(x_0)}{\partial_y g(x_0)} \nabla g(x_0)$$

Logo, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$. ▨

O <u>teorema 12.1</u> fornece uma condição necessária para que um ponto x_0 seja um extremo condicionado do campo escalar f, a saber,

$$\begin{cases} \nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0) \\ g(x_0) = 0 \end{cases}$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. O número real que torna o sistema acima compatível é denominado multiplicador de Lagrange. Visto de outra forma, o método proposto por Lagrange consiste, simplesmente, em introduzir a seguinte função de três variáveis:

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$$

e notar que o sistema em questão equivale à:

$$\nabla L = 0 \iff \begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ \partial_\lambda L = -g(x,y) = 0 \end{cases}$$

De forma que os extremos condicionados de f sobre a superfície definida implicitamente por $g = 0$ coincidem com os extremos livres de L. É importante ressaltar que tal método permite apenas identificar os candidatos a pontos extremos. Sua classificação deve ser feita, contudo, por outros argumentos.

Uma última observação relevante sobre o teorema 12.1 é que se acrescentarmos as hipóteses de que f é de classe $\mathcal{C}^1$, ou seja, que além de diferenciável, suas derivadas parciais são contínuas, e que $\nabla f(x_0) \neq 0$, podemos garantir que a reta tangente à curva de nível de f que passa por x_0 coincide com a reta tangente à curva definida implicitamente por $g(x) = 0$ no ponto x_0, i.e., $\lambda \neq 0$. Note, entretanto, que se $\nabla f(x_0) = 0$, não podemos fazer nenhuma afirmação sobre a coincidência das retas tangentes.

Exemplo 12.2: "Determine os extremos de $f(x) = 3x+2y$ com a restrição $x^2+y^2=1$."

Solução: Queremos estudar os extremos de f sobre $\tilde{D} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid g(x) = 0\}$ onde $g : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}$, $x \longmapsto g(x) = x^2+y^2-1$. Notando que

$$\nabla g(x) = 2x \neq 0 \quad , \forall x \in \tilde{D}$$

podemos invocar o teorema 12.1. Escrevendo a função Lagrangiana:

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = 3x+2y - \lambda(x^2+y^2-1)$$

os canditados a extremos de f sobre $\tilde{D}$ são dados por

$$\nabla L = 0 \iff \begin{cases} 3 - 2\lambda x = 0 \\ 2 + 2\lambda y = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

das duas primeiras equações (ou do fato de que $\nabla f = (3,2) \neq 0$) temos que $\lambda \neq 0$. Logo, podemos escrever que

$$x = -\frac{3}{2\lambda} \quad , \quad y = -\frac{1}{\lambda}$$

que substituídas na terceira equação fornecem:

$$\frac{9}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 1 \iff \lambda = \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$$

Logo, $\mathbb{a} = \left(-\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$, $\mathbb{b} = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$ são canditados a extremos locais.

Como $f(\mathbb{a}) < f(\mathbb{b})$ e $\tilde{D}$ é um conjunto compacto, resulta do teorema de Weierstraß que $\mathbb{a}$ é um mínimo e $\mathbb{b}$ um máximo de f em $\tilde{D}$."

É fácil generalizar o resultado do teorema 12.1 para campos escalares diferenciáveis gerais, i.e., $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável, restrito à hipersuperfície $\tilde{D} = \{x \in D \mid g(x) = 0\}$ com $g: D \subseteq \mathbb{R}^n \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}$ tal que $\nabla g(x) \neq 0$, $\forall x \in \tilde{D}$.

Teorema 12.3: " Sejam $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável e $g: D \subseteq \mathbb{R}^n \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}$, com D um conjunto aberto. Se $\nabla g(x) \neq 0$, $\forall x \in \tilde{D} = \{x \in D \mid g(x) = 0\}$. Então uma condição necessária para que $x_0 \in \tilde{D}$ seja um extremo local de f em $\tilde{D}$ é que exista um $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$."

A demonstração deste resultado é análoga a do teorema 12.1. A única diferença notável, consiste no uso da versão n-dimensional do teorema da função implícita.

Exemplo 12.4: " Deseja-se fabricar caixas retangulares com volume $V = 64\,cm^3$. Sabendo que o material empregado na confecção das caixas custa R$ 0,50 por cm^2, determine as dimensões da caixa que minimizem o custo.

Solução: O volume da caixa é dado por: $V(x,y,z) = xyz$, enquanto que a área é dada por: $A(x,y,z) = 2(xy + xz + yz)$. De forma que, o custo de fabricação é: $C(x,y,z) = 0,5\,A(x,y,z) = xy + xz + zy$.

Consequentemente, precisamos minimizar a função: $D = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x>0, y>0, z>0\}$

$$C : D \subseteq \mathbb{R}^3 \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}, \quad x \mapsto C(x,y,z) = xy + xz + zy$$

sujeita ao vínculo: $\tilde{V}(x,y,z) : D \subseteq \mathbb{R}^3 \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}, \quad x \mapsto \tilde{V}(x,y,z) = xyz - 64$

$$\tilde{V}(x,y,z) = 0.$$

Como $\nabla \tilde{V} = (yz, xz, xy) \neq 0$, $\forall x \in \tilde{D} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \tilde{V}(x,y,z) = 0\}$

podemos utilizar o teorema 12.3. Escrevendo a função lagrangiana:

$$L(x,y,z,\lambda) = C(x,y,z) - \lambda \tilde{V}(x,y,z) = xy + xz + yz - \lambda(xyz - 64)$$

temos que os candidatos a pontos extremos são dados por

$$\nabla L = 0 \iff \begin{cases} y + z - \lambda yz = 0 \\ x + z - \lambda xz = 0 \\ x + y - \lambda xy = 0 \\ -xyz + 64 = 0 \end{cases}$$

Como $\nabla C(x) = (y+z, x+z, x+y) \neq 0$, $\forall x \in D$, temos que $\lambda \neq 0$

Eliminando λ a partir das duas primeiras equações, obtemos:

$$\frac{x+z}{xz} = \frac{y+z}{yz} \Leftrightarrow xyz + yz^2 = xyz + xz^2 \Leftrightarrow x = y$$

Procedendo, similarmente, com a segunda e a terceira equações, concluímos que $y = z$. Substituindo tais resultados na última equação concluímos que:

$$x = y = z = \sqrt[3]{64} = 4.$$

Logo, o único candidato a extremo condicionado da função custo é o ponto $(4,4,4)$, cujo custo correspondente é:

$$C(4,4,4) = 48 \text{ reais.}$$

O próximo teorema fornece uma generalização do método de Lagrange para o estudo de problemas de otimização de campos escalares tridimensionais sujeitos a dois vínculos. Para demonstrá-lo empregaremos o seguinte resultado

Lema 12.5: "Sejam $u, v, w, c \in \mathbb{R}^3$ tais que

$$u \times v \neq 0, \quad u \cdot c = v \cdot c = w \cdot c = 0$$

então $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tais que $w = \lambda_1 u + \lambda_2 v$."

cuja demonstração é relegada ao leitor.

Teorema 12.6: "Sejam $f: D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, diferenciável, com D um aberto e $g, h: D \subseteq \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R}$ tais que $\nabla g(x) \times \nabla h(x) \neq 0$, $\forall x \in \tilde{D} = \{x \in D \mid g(x) = 0 \text{ e } h(x) = 0\}$. Então uma condição necessária para que $x_0 \in \tilde{D}$ seja um extremo local de f em $\tilde{D}$ é que $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla g(x_0) + \lambda_2 \nabla h(x_0)."$$

Demonstração:

Suponha sem perda de generalidade que x_0 seja um máximo local de f em $\tilde{D}$. Logo, $\exists r \in \mathbb{R}_+$ tal que a bola aberta

$$B(x_0, r) \subset D \quad \text{e} \quad f(x) \leq f(x_0), \quad \forall x \in B(x_0, r) \cap \tilde{D}.$$

O teorema da função implícita garante que existe uma curva diferenciável γ, parametrizada por

$$\mathbb{r}: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad I \text{ um intervalo aberto tal que}$$

$$\mathbb{r}(t_0) = x_0, \quad \mathbb{r}'(t_0) \neq 0 \quad \text{e} \quad \mathbb{r}(t) \in \tilde{D}, \ \forall t \in I$$

Da continuidade de $\mathbb{r}$, $\exists \delta > 0$ tal que:

$$t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \Rightarrow \mathbb{r}(t) \in B(x_0, r) \cap \tilde{D}$$

Portanto, $f(\mathbb{r}(t)) \leq f(\mathbb{r}(t_0))$, $\forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$

Logo, t_0 é um máximo local de $F(t) = f(\mathbb{r}(t))$, conseqüentemente

$$F'(t_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla f(\mathbb{r}(t_0)) \cdot \mathbb{r}'(t_0) = 0$$

Por outro lado,

$$\mathbb{r}(t) \in \tilde{D}, \ \forall t \in I \Rightarrow g(\mathbb{r}(t)) = 0, \ h(\mathbb{r}(t)) = 0, \ \forall t \in I$$

$$\Rightarrow \nabla g(\mathbb{r}(t_0)) \cdot \mathbb{r}'(t_0) = 0, \ \nabla h(\mathbb{r}(t_0)) \cdot \mathbb{r}'(t_0) = 0.$$

Finalmente, como $\mathbb{r}'(t_0) \neq \mathbb{O}$ e, por hipótese, $\nabla g(\mathbb{r}(t_0)) \times \nabla h(\mathbb{r}(t_0)) \neq \mathbb{O}$, podemos invocar o <u>lema 12.5</u> para concluir que $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\nabla f(\mathbb{r}(t_0)) = \lambda_1 \nabla g(\mathbb{r}(t_0)) + \lambda_2 \nabla h(\mathbb{r}(t_0))$$

$\blacksquare$

Similarmente aos casos anteriores, a condição necessária para que existam pontos extremos do campo escalar $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sujeitos aos vínculos $g(\mathbb{x}) = 0$ e $h(\mathbb{x}) = 0$ também pode ser expressa como um problema de otimização irrestrita através da seguinte função lagrangiana:

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = f(x,y,z) - \lambda_1 g(x,y,z) - \lambda_2 h(x,y,z)$$

pois

$$\nabla L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = 0 \iff \begin{cases} \nabla f(x) = \lambda_1 \nabla g(x) + \lambda_2 \nabla h(x) \\ g(x) = 0 \\ h(x) = 0 \end{cases}$$

De uma forma mais geral, é possível demonstrar que para um campo escalar $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, diferenciável, uma condição necessária para a existência de um extremo local sujeito aos vínculos:

$$g_i(x) = 0 \quad , \quad g_i : D \subseteq \mathbb{R}^n \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R} \; , \; 1 \leq i \leq m$$

com $m < n$ é equivalente à condição necessária para a existência de extremos locais livres da função

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1, \dots, x_n) \, ,$$

i.e.,

$$\nabla L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = 0 \, .$$

Exemplo 12.7: " Determinar o ponto de intersecção dos planos

$x+y+z=2$ e $x+3y+2z=12$ que esteja mais próximo da origem.

Solução: Precisamos encontrar o mínimo da distância:

$$d(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

que, naturalmente, corresponde ao mínimo do quadrado da distância

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$$

à origem de um ponto sobre a intersecção dos planos:

$$g(x,y,z) = x+y+z-2 = 0 \quad \text{e} \quad h(x,y,z) = x+3y+2z-12 = 0$$

Como todas as funções são C^∞ e

$$\nabla g(x) \times \nabla h(x) = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = (-1,-1,2) \neq 0$$

podemos invocar o teorema 12.6. Seja a função lagrangiana

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = f(x,y,z) - \lambda_1 g(x,y,z) - \lambda_2 h(x,y,z)$$

$$= x^2+y^2+z^2 - \lambda_1(x+y+z-2) - \lambda_2(x+3y+2z-12)$$

de forma que a condição necessária para a existência de um ponto extremo:

$$\nabla L = \mathbb{0} \iff \begin{cases} 2x - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 2y - \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0 \\ 2z - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ x + y + z = 2 \\ x + 3y + 2z = 12 \end{cases}$$

cuja solução é:

$$x = -\frac{10}{3}, \quad y = \frac{14}{3}, \quad z = \frac{2}{3}, \quad \lambda_1 = -\frac{44}{3}, \quad \lambda_2 = 8$$

Consequentemente, o único candidato à extremo condicionado de f é

$$\left(-\frac{10}{3}, \frac{14}{3}, \frac{2}{3}\right).$$ //