NOTAS SOBRE A REALIZAÇÃO DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

PEDRO ALADAR TONELLI

Sumário

1. Preliminares

Lembramos que, por definição, a função de transferência $T(s)$ é a transformada de Laplace da função resposta ao impulso. Desta forma $T(s)$ é uma matriz de dimensão $p\times m$, cujas componentes $T_{ij}(s)$ são funções holomorfas e tais que $\overline{T_{ij}(s)} = T_{ij}(\bar{s})$.

Achar uma realização de $T(s)$ significa encontrar matrizes A, B, C de dimensões apropriadas tal que

$$T(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

2. Desenvolvimento em torno do infinito

Uma função holomorfa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tem um zero no infinito quando $\lim_{s\to 0} f(1/s) = 0$. Neste caso a teoria de funções analíticas nos garante que podemos expressar a função como um **desenvolvimento em torno do infinito**:

$$f(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{s^k}$$

para $\|s\| > M$.

Isto pode ser feito para expressar $(sI - A)^{-1}$ para qualquer matriz quadrada A. Neste caso temos

$$(sI - A)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^{k-1}}{s^k}$$

Vamos admitir que $T(s)$ também tenha um zero no infinito, e que suas componentes $T_{ij}(s)$ sejam funções racionais. [1] Então também teremos

$$T(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{W_{k-1}}{s^k} \tag{1}$$

e para resolver o problema de realização teremos que achar as matrizes A, B, C tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{W_{k-1}}{s^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{CA^{k-1}B}{s^k} \tag{2}$$

3. Construção de A, B e C

Em primeiro lugar notemos que existe um polinómio $P(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n$ tal que $P(s)T(s)$ seja uma matriz com todas as componentes polinomiais. Então quando fizermos os cálculos de

$$P(s).(\sum_{k=1}^{infty} \frac{W_{k-1}}{s^k}$$

os coeficientes de $1/s^k$ terão de ser zero. Isso nos trará restrições aos W_k.

Por exemplo: como o coeficiente de $1/s$ deve ser zero teremos que

$$a_n W_0 + a_{n-1} W_1 + \cdots + a_1 W_{n-1} + W_n = 0$$

de onde é fácil concluir que:

$$W_{n+r} = -a_n W_r - a_{n-1} W_{1+r} - \cdots - a_1 W_{n-1+r}$$

Então para construir a realização usamos só as matrizes $W_0, \ldots, W_{n-1}$, e podemos fazer desse jeito:

$$C = \begin{pmatrix} I_{p\times p} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$B = \begin{pmatrix} W_0 \\ \vdots \\ W_{n-1} \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I_{p\times p} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & I_{p\times p} \\ -a_n I_{p\times p} & -a_{n-1} I_{p\times p} & \cdots & -a_1 I_{p\times p} \end{pmatrix} \tag{5}$$

[1] Isto é uma condição necessária para ser uma função de transferência, mas não vamos fazer a prova.

4. Técnicas para a construção da realização

Dada a matriz $T(s)$, a primeira coisa que fazemos é fazer o desenvolvimento em torno do infinito de $T(s)$ para obtermos as componentes W_i. De forma geral a primeira tentativa é comparar a forma de cada uma das componentes de $T(s)$ com o desenvolvimento da série geométrica.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Para encontrar o polinômio $p(s)$ (e o número n) tomamos os denominadores $q_{ij}(s)$ de cada componente $T_{ij}(s)$ e achamos $p(s) = \text{mmc}(q_{ij}(s)$.

Um exemplo. seja

$$T(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s-1} \\ \\ \frac{2}{s+2} \end{pmatrix} \tag{6}$$

neste caso temos que $p(s) = s^2 + s - 2$. Para obter o desenvolvimento em série fazemos primeiro:

$$\frac{1}{s-1} = \frac{1}{s}\frac{1}{1-\frac{1}{s}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{s^k}$$

agora

$$\frac{2}{s+2} = \frac{2}{s}\frac{1}{1-(-\frac{2}{s})} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{2^k}{s^k}$$

Então temos:

$$a_1 = 1 \text{ e } a_2 = -2 \tag{7}$$

$$W_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ e } W_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Concluindo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

5. Realização da função resposta ao impulso

Vou incluir aqui a parte sobre realização da resposta ao impulso para a aula de quarta-feira ficar completa.

Seja $\Psi(t)$ uma curva no espaço das matrizes $p \times m$ que satisfaz as seguintes condições:

(1) $\Psi(t)$ é de classe $\mathcal{C}^1$.

(2) Existem $H : [0,\infty) \to \mathbb{M}_{p\times n}$ de classe $\mathcal{C}^1$ e $G : [0,\infty)\mathbb{M}_{n\times m}$ tal que $\Psi(t - s) = H(t)G(s)$ para todo $t > s$.

(3) existe um $T > 0$ tal que $Q = \int_0^T G(s)G^t(s)ds$ é invertível.

Neste caso existe uma realização pois

$$\phi(t,s) = \Psi(t-s) = H(t)G(s) \implies \tag{12}$$

$$0 = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial s} = \dot{H}(t)G(s) + H(t)\dot{G}(s) \tag{13}$$

Multiplicando a equação acima por $G^t(s)$ e integrando de 0 a T e usando a hipótese (3) obtemos a equação diferencial

$$\dot{H}(t) = -H(t)\int_0^T \dot{G}(s)G^t(s)dsQ^{-1} \tag{14}$$

$$\text{fazendo } A = -\dot{G}(s)G^t(s)dsQ^{-1} \tag{15}$$

$$\text{temos } \dot{H}(t) = H(t)A \tag{16}$$

(17)

para $t > T$.. A solução da equação acima é:

$$H(t) = H(T)\mathrm{e}^{(t-T)A} \tag{18}$$

Agora podemos escrever, para todo $r \in [0\infty)$

$$\Psi(r) = \Psi(T + r - T) = H(T + r)G(T) = H(T)\mathrm{e}^{rA}G(T) \tag{19}$$

Que fornece a realização A como definida acima, $B = G(T)$ e $C = H(T)$.

6. Um exemplo

Tomemos $\Psi(t) = t$. Então temos (por exemplo)

$$\Psi(t-s) = t - s = \begin{pmatrix} -1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix}$$

Neste caso, tomando $T = 1$

$$Q = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$A = -\int_0^1 \begin{pmatrix} s & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ds \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1/3 \end{pmatrix} 12 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$$