

Representação decimal

x número real

$$a_0 \in \mathbb{Z}$$

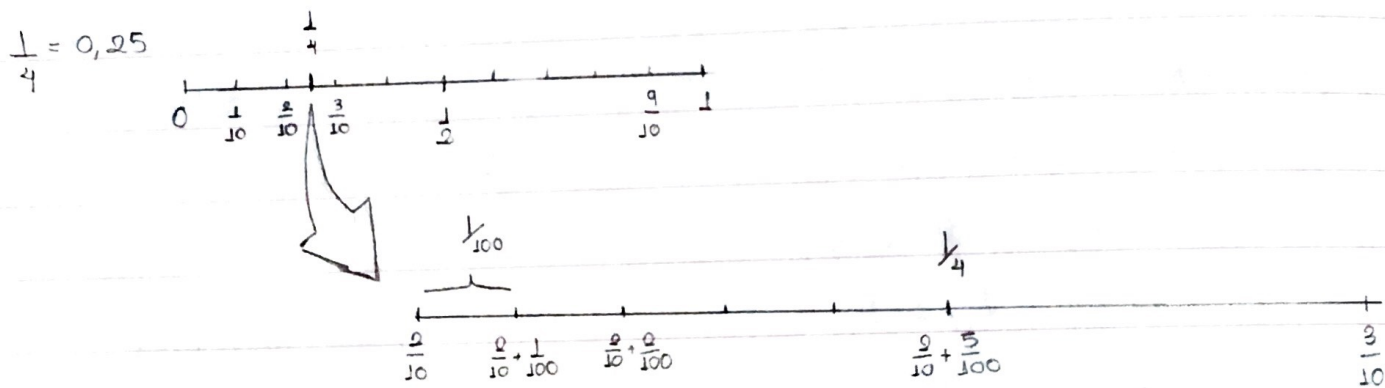
$$0 \leq a_i \leq 9 \quad \forall i=1, \dots, n$$

$$x = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n}$$

$$x = a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$$

$$1789 = 1 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$$

$$3,14159 = 3 \cdot 10^0 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{9}{10^5}$$



representação decimal de $x \in \mathbb{R}$

n_0 é o maior inteiro $\leq x$

a_1 é o maior inteiro tal que $n_0 + \frac{a_1}{10} \leq x$

$$(0 \leq a_1 \leq 9)$$

$$a_1 \dots \dots \dots n_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} \leq x$$

$$a_n \dots \dots \dots n_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} \leq x$$

$$D(x) = \left\{ n_0, n_0 + \frac{a_1}{10}, n_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2}, \dots, n_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n}{10^n}, \dots \right\}$$

$D(x)$ é limitado superiormente por x
pelo axioma de completude, $D(x)$ tem supremo

Teorema: $\sup D(x) = x$

prova: exercício (sugestão: use o teorema da aula passada)

A representação decimal de x é

$$x = n_0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_n \dots$$

n_0 é o maior inteiro $\leq x$

b_1 é o maior inteiro tal que $n_0 + \frac{b_1}{10} \leq x$

$$(0 \leq b_1 \leq 9)$$

$$b_2 \dots \dots \dots n_0 + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{100} \leq x$$

$\vdots$

$$b_n \dots \dots \dots n_0 + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \dots + \frac{b_n}{10^n} \leq x$$

$$D(x) = \left\{ n_0, n_0 + \frac{b_1}{10}, n_0 + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{100}, \dots, n_0 + \frac{b_1}{10} + \dots + \frac{b_n}{10^n}, \dots \right\}$$

A representação $D(x)$ de $x = \frac{1}{4}$ é $\frac{1}{4} = 0,2499999\dots$

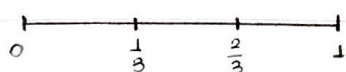
A representação anterior $D(x)$ de $x = \frac{1}{4}$ é $\frac{1}{4} = 0,2500000\dots$

Representação ternária:

$$17 = 2 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^2 + \dots + a_n \cdot 3^n$$

$17 = 122$ em representação ternária

represente $\frac{1}{4}$ em base ternária

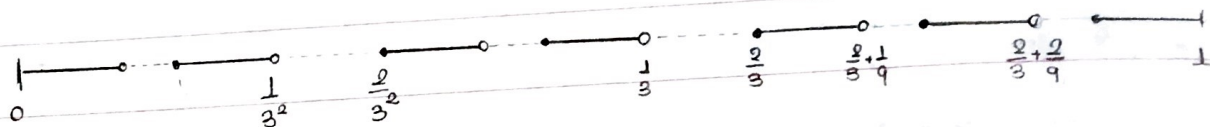


$$\frac{1}{4} = 0 \cdot 3^0 + 0 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3^2} + \dots \text{ (continue) }$$

exercício ↗

Exercício: descreva o conjunto de todos os números reais entre 0 e 1 cuja representação ternária não contém o dígito 1

tem uma parte numerável ($\frac{2}{3^n}$) e uma parte inumerável



Indução Matemática

Um conjunto indutivo é um conjunto com duas propriedades:

(a) 1 está no conjunto

(b) se x está no conjunto, $x+1$ também está

Definimos o conjunto de números naturais $\mathbb{N}$ como sendo o "menor" conjunto indutivo, isto é, $\mathbb{N}$ é a interseção de todos os subconjuntos indutivos de $\mathbb{R}$

Suponha que $P(n)$ é uma afirmação que depende de um número natural n .

Ex: $P(n): 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 \leq \frac{(n+1)^3}{3}$

$$P(1): 1^2 \leq \frac{(1+1)^3}{3} = \frac{8}{3}$$

verdade!

$$P(2): 1^2 + 2^2 \leq \frac{(2+1)^3}{3} = 9$$

$$P(3): 1^2 + 2^2 + 3^2 \leq \frac{4^3}{3} \Rightarrow 14 \leq \frac{64}{3} \approx 21, \dots$$

$S = \{x \in \mathbb{R} : P(n)\} =$ o conjunto de todos os números naturais para os quais $P(n)$ é verdadeira

Se provamos que S é um conjunto indutivo, então $S \supseteq \mathbb{N}$, isto é, a afirmação $P(n)$ vale para todos os números naturais

(a) $1 \in S$

(b) se $(k-1) \in S \Rightarrow k \in S$

$$\text{Se } (k-1) \in S \Leftrightarrow P(k-1) \text{ é verdade} \Leftrightarrow 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (k-1)^2 \leq \frac{k^3}{3} + k^2$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 \leq \frac{k^3}{3} + k^2 = \frac{k^3 + 3k^2}{3}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 \leq \frac{k^3 + 3k^2 + 3k + 1}{3} = \frac{(k+1)^3}{3}$$

Isto é, $P(k-1)$ vale $\Rightarrow P(k)$ vale

- $\mathbb{N}$ é o menor subconjunto indutivo de $\mathbb{R}$, isto é, a intersecção de todos os subconjuntos indutivos de $\mathbb{R}$
- Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é indutivo se
 - (i) $1 \in A$
 - (ii) $x \in A \Rightarrow (x+1) \in A$

$P(n)$ é uma propriedade que depende de um natural n , para provar que esta propriedade vale para todos os naturais é suficiente mostrar que o conjunto $S = \{n \in \mathbb{N}; P(n)\}$ = "o conjunto de todos os naturais para os quais vale $P(n)$ "

é um conjunto indutivo, já que, se S é indutivo, então S contém o menor conjunto indutivo $\mathbb{N}$.

Portanto, temos que provar duas coisas:

- (i) $1 \in S$
- (ii) se $k \in S \Rightarrow k+1 \in S$

Mais geralmente, se queremos provar que $P(n)$ vale para todos os naturais $n \geq n_0$, provamos:

- (i) $n_0 \in S$
- (ii) se $k \geq n_0, k \in S \Rightarrow k+1 \in S$

exemplo:

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 \leq \frac{n^3}{3} \leq 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$$

aba passada $\rightsquigarrow$ $\frac{n^3}{3}$ $\rightsquigarrow$ exercício

$$\text{Ex.: } \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

$\Updownarrow$

$$P(n): 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \quad \text{Vale para todo } n \in \mathbb{N}$$

$$\bullet P(0) = 0^2 = \frac{0^3}{3} + \frac{0^2}{2} + \frac{0}{6} \quad \checkmark$$

$$\bullet P(1) = 1^2 = \frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} + \frac{1}{6} \quad \checkmark$$

$$\bullet P(2) = 1^2 + 2^2 = \frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} + \frac{2}{6} \quad \checkmark$$

• Suponha que provamos $P(k)$, isto é, $1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k^3}{3} + \frac{k^2}{2} + \frac{k}{6}$

Queremos (usar este "fato" para) provar que $P(k+1)$ vale, isto é, queremos mostrar que

Quero $\rightarrow 1^2 + 2^2 + \dots + (k+1)^2 = \frac{(k+1)^3}{3} + \frac{(k+1)^2}{2} + \frac{(k+1)}{6}$ (b)

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k^3}{3} + \frac{k^2}{2} + \frac{k}{6} + (k+1)^2$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + (k+1)^2 = \frac{k^3}{3} + \frac{k^2}{2} + \frac{k}{6} + (k+1)^2$$

olhamos para o lado direito:

$$(a) \frac{k^3}{3} + \frac{k^2}{2} + \frac{k}{6} + k^2 + 2k + 1 = \frac{1}{6} (2k^3 + 3k^2 + k + 6k^2 + 12k + 6) =$$

$$= \frac{k^3}{3} + \frac{3k^2}{2} + \frac{13k}{6} + 1 = \frac{1}{6} (2k^3 + 9k^2 + 13k + 6)$$

$$(b) \frac{(k+1)^3}{3} + \frac{(k+1)^2}{2} + \frac{(k+1)}{6} = \frac{k^3 + 3k^2 + 3k + 1}{3} + \frac{k^2 + 2k + 1}{2} + \frac{k+1}{6} =$$

$$= \frac{k^3}{3} + k^2 + k + \frac{1}{3} + \frac{k^2}{2} + k + \frac{1}{2} + \frac{k}{6} + \frac{1}{6} = \frac{k^3}{3} + \frac{3k^2}{2} + \frac{13k}{6} + 1$$

Convergência

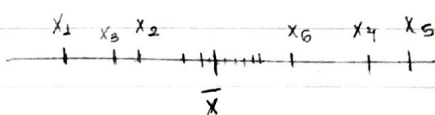
• O que é uma sequência (numérica)?

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

Uma sequência é uma função

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto f(n) = x_n$$

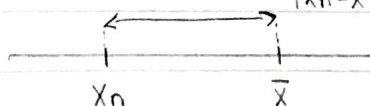


exemplo: $\frac{1}{n} \rightarrow 0$

Dizemos que a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para um número $\bar{x} \in \mathbb{R}$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \geq N \Rightarrow |x_n - \bar{x}| < \varepsilon$$

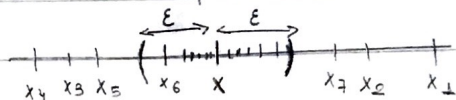
$|x_n - \bar{x}|$ é a distância entre x_n e $\bar{x}$



notação: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $\bar{x} \in \mathbb{R}$ é denotado por

- $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{x} \quad (x_n \rightarrow \bar{x})$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N, |x_n - \bar{x}| < \varepsilon$



Provemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$:
 $x_n = \frac{1}{n}$

prova: Seja $\varepsilon > 0$ um número dado. Queremos encontrar N tal que $\forall n \geq N$,

$|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$, isto é:

$$|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

quero: $\frac{1}{n} < \varepsilon \quad \forall n \geq N$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n$$

Tomando então $N = \frac{1}{\varepsilon}$, vale que $\forall n \geq N, \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$

Ex.: $x_n = \frac{n}{n+1}$

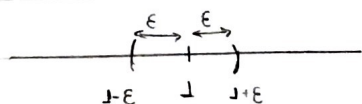
$x_1 = 0,5 \quad x_3 = 0,75 \quad x_{10} = 0,909 \dots$

$x_2 = 0,666 \quad x_4 = 0,8 \quad x_{99} = 0,99$

parece que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$:

prova: dado $\varepsilon > 0$, queremos encontrar N tal que $\forall n \geq N$

$$|x_n - 1| < \varepsilon$$



Note que $x_n < 1$ já que $n < n+1$ (portanto $x_n \notin [1, 1+\varepsilon)$)

O que queremos, na verdade, é mostrar que existe N tal que $\forall n \geq N, x_n > 1-\varepsilon$

Isto é, queremos

$$\frac{n}{n+1} > 1-\varepsilon \Leftrightarrow n > (1-\varepsilon)(n+1) \Leftrightarrow \varepsilon n + \varepsilon > 1 \Leftrightarrow \varepsilon(1+n) > 1 \Leftrightarrow n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

Quero

escolhendo

$$N > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \quad \forall n \geq N$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \Leftrightarrow \left(\frac{n}{n+1} > 1 - \varepsilon \right)$$

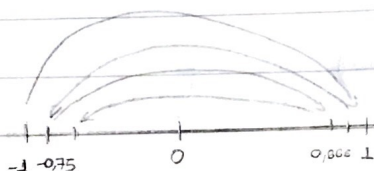
Ex.: $y_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}$

$$y_1 = -\frac{1}{2} = -0,5$$

$$y_2 = \frac{2}{3} = 0,666...$$

$$y_3 = -\frac{3}{4} = -0,75$$

$$y_4 = \frac{4}{5} = 0,8$$



não converge!

Teorema: Se uma sequência converge então seu limite é único, isto é, se

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$ e $z \neq \bar{x}$, então x_n não converge para z

negação: exercício

- Dizer que x_n converge para $\bar{x}$ é $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N$
 $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$
- Dizer que x_n não converge para $\bar{x}$ é $\exists \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N$ tal que
 $|x_n - \bar{x}| \geq \varepsilon$

Teorema: Se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência crescente e limitada superiormente então (x_n) converge e $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Analogamente para sequências decrescentes limitadas inferiormente

$$(x_n) \text{ ser crescente } x_{n+1} \geq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\sup \{x_n \in \mathbb{R}; x_n \in (x_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$$

prova: Seja $\bar{x} = \sup \{x_n\}$. Dado $\varepsilon > 0$.

quero provar que $\exists N$ tal que $\forall n \geq N \quad x_n > \bar{x} - \varepsilon$

como $\bar{x} = \sup \{x_n\}$,

$\bar{x} \geq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, e $\bar{x} - \varepsilon$ não é cota superior, isto é, existe $x_N > \bar{x} - \varepsilon$.

Como a sequência é crescente $x_n \geq x_N \quad \forall n \geq N$

portanto

$$\bar{x} - \varepsilon < x_N \leq x_n \leq \bar{x}$$

exercício: prove o outro lado

