

PSI3211 – Circuitos I – Aula 07

Magno T. M. Silva

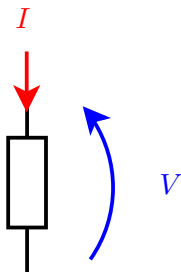
Escola Politécnica da USP

Objetivos desta aula

Ao final desta aula, você deverá estar apto a:

- ▶ analisar a resposta em frequência de circuitos simples

1.1 Corrente Contínua - CC

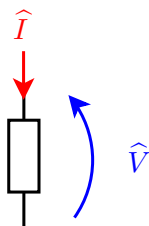


► LEI DE OHM

$$\frac{V}{I} = R$$

Resistência CC = R_{CC}

1.2 Corrente Alternada - CA



- Equivalente CA da LEI DE OHM

$$\frac{\hat{V}}{\hat{I}} = Z = R + jX$$

- Z : impedância do dispositivo
- R : componente resistivo ou dissipativo (R_{CA})
- X : componente reativo ou reatância
- R e X são funções da frequência

Exemplo: Resistor em série com um indutor ideal,
 $Z(j\omega) = R + j\omega L$

1.3 Recíprocas

Admitância

$$Y = G + jB = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} = \underbrace{\frac{R}{R^2 + X^2}}_G + j \underbrace{\frac{-X}{R^2 + X^2}}_B$$

G : componente condutivo

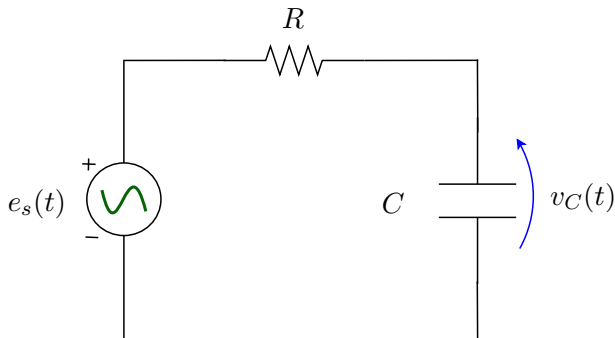
B : susceptância

CC	Resistência (R_{CC})	Condutância (G_{CC})
CA	Impedância ($Z(j\omega)$)	Admitância ($Y(j\omega)$)

2. Resposta em frequência

- ▶ Se um circuito for alimentado por um sinal senoidal, sua saída também será senoidal de mesma frequência
- ▶ A frequência da saída é a mesma da fonte, mas sua amplitude e fase podem ser alteradas
- ▶ O efeito que um circuito tem sobre a amplitude e fase do sinal de entrada para cada frequência é chamado de resposta em frequência
- ▶ Resposta em frequência é definida pela razão entre o fasor de saída e o fasor de entrada em função de ω

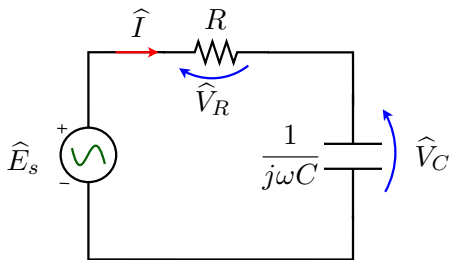
2.1 Exemplo 1: Circuito RC – passa-baixas



- ▶ Entrada: $e_s(t)$
- ▶ Saída: $v_C(t)$

2.1 Exemplo 1: Circuito RC – passa-baixas

Usando fasores e relações fasoriais



Por divisão de tensão

$$\hat{V}_C = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \hat{E}_s$$

2.1 Exemplo 1: Circuito RC – passa-baixas

$$\hat{V}_C = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} \hat{E}_s$$

Resposta em frequência

$$\frac{\hat{V}_C}{\hat{E}_s} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = F_{PB}(j\omega) \quad (\text{adimensional})$$

Módulo

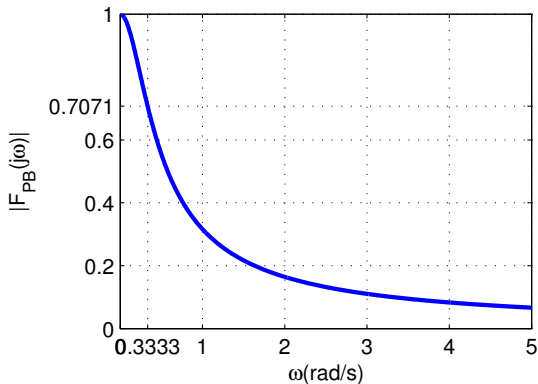
$$|F_{PB}(j\omega)| = \sqrt{\frac{1}{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

Fase

$$\phi_{PB}(\omega) = -\arctan(\omega RC)$$

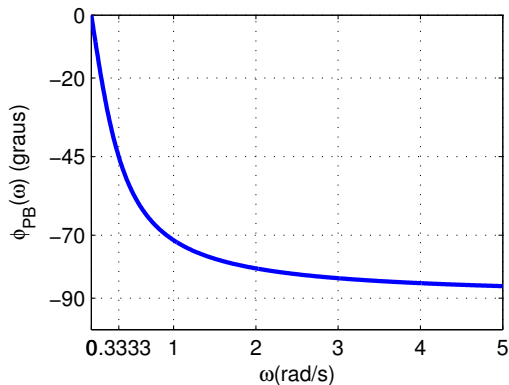
2.1 Exemplo 1: Circuito RC – passa-baixas ($R = 3 \Omega$, $C = 1 \text{ F}$)

Módulo



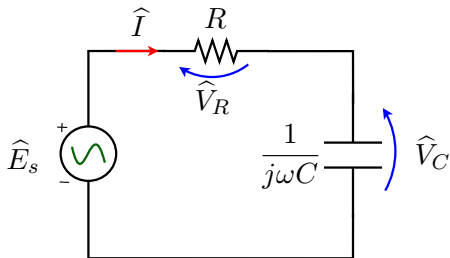
2.1 Exemplo 1: Circuito RC – passa-baixas ($R = 3 \Omega$, $C = 1 \text{ F}$)

Fase



2.2 Exemplo 2: Circuito RC – passa-altas

Vamos agora considerar a tensão do resistor como saída.



Por divisão de tensão

$$\hat{V}_R = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} \hat{E}_s$$

2.2 Exemplo 2: Circuito RC – passa-altas

$$\hat{V}_R = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} \hat{E}_s$$

Resposta em frequência

$$\frac{\hat{V}_R}{\hat{E}_s} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = F_{\text{PA}}(j\omega) \quad (\text{adimensional})$$

Módulo

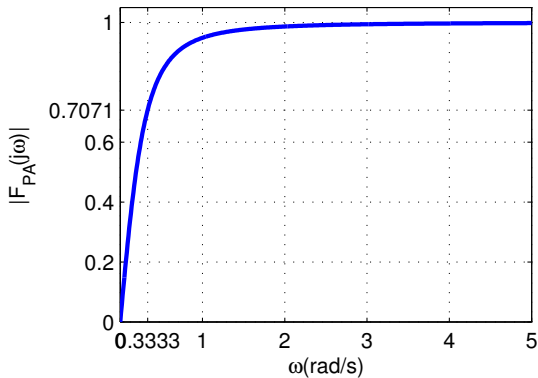
$$|F_{\text{PA}}(j\omega)| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

Fase

$$\phi_{\text{PA}}(\omega) = 90^\circ - \arctan(\omega RC)$$

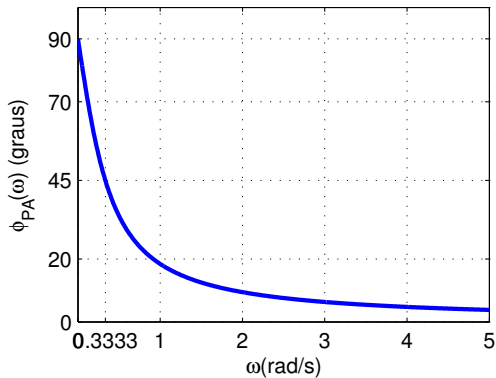
2.2 Exemplo 2: Circuito RC – passa-altas ($R = 3 \, \Omega$, $C = 1 \, \text{F}$)

Módulo



2.2 Exemplo 2: Circuito RC – passa-altas ($R = 3 \, \Omega$, $C = 1 \, \text{F}$)

Fase



2.3 Frequência de corte

- ▶ **Frequência de corte** é a frequência abaixo da qual (ou acima da qual) a potência na saída do circuito é reduzida à metade da potência na faixa de passagem
- ▶ Frequência na qual o ganho da resposta em frequência se reduz a

$$|F(j\omega_c)| = \frac{|F(j\omega)|_{\max}}{\sqrt{2}}$$

- ▶ No **Exemplo 1**

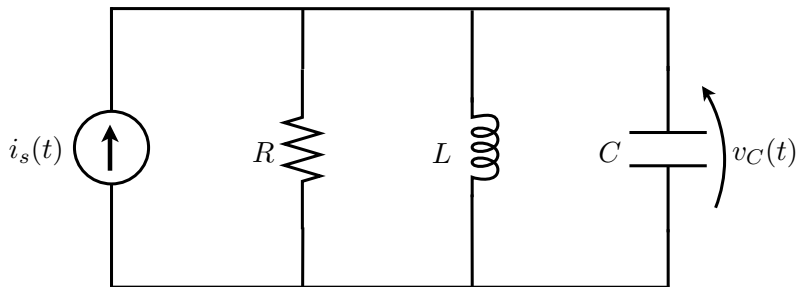
$$|F_{PB}(j\omega)|_{\max} = |F_{PB}(j0)| = 1$$

Qual a frequência ω_c na qual $|F_{PB}(j\omega_c)| = 1/\sqrt{2}$?

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \omega_c^2 R^2 C^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega_c = \frac{1}{RC}$$

- ▶ É possível mostrar que no **Exemplo 2** também vale $\omega_c = \frac{1}{RC}$ (Verifique!)

2.4 Exemplo 3: Circuito RLC – passa-faixa

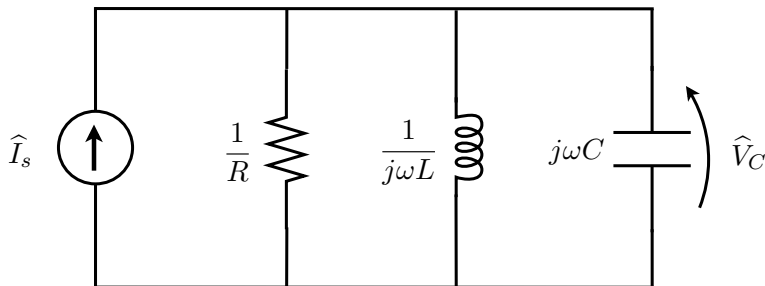


► Entrada: $i_s(t)$

► Saída: $v_C(t)$

2.4 Exemplo 3: Circuito RLC – passa-faixa

Usando fasores e admitâncias



A admitância equivalente é

$$\frac{\hat{I}_s}{\hat{V}_C} = Y(j\omega) = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C$$

2.4 Exemplo 3: Circuito RLC – passa-faixa

A admitância do circuito é

$$\frac{\widehat{I}_s}{\widehat{V}_C} = Y(j\omega) = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

e a impedância é dada por

$$Z(j\omega) = \frac{\widehat{V}_C}{\widehat{I}_s} = \frac{1}{Y(j\omega)} = \frac{1}{G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}$$

Módulo

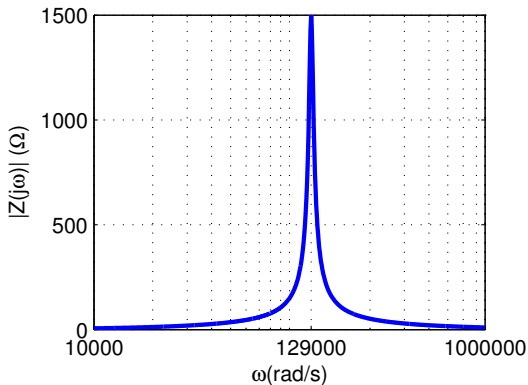
$$|Z(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}$$

Fase

$$\phi(\omega) = -\arctan \left[R \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \right]$$

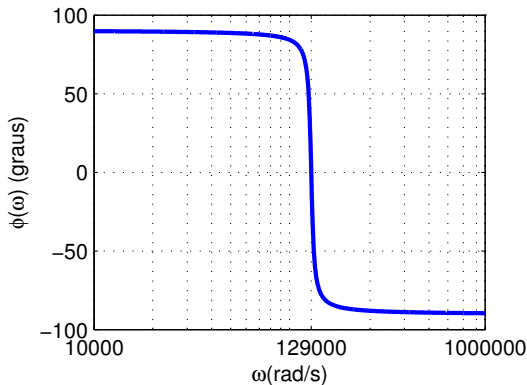
2.4 Exemplo 3: Circuito RLC – passa-faixa ($R = 1500 \, \Omega$, $C = 100 \, \text{nF}$, $L = 600 \, \mu\text{H}$)

Módulo

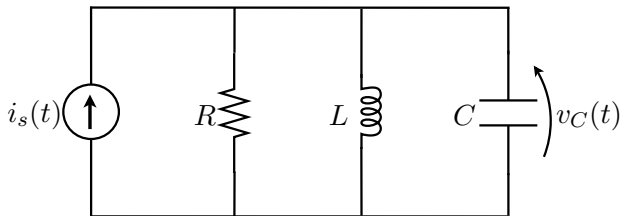


2.4 Exemplo 3: Circuito RLC – passa-faixa ($R = 1500 \, \Omega$, $C = 100 \, \text{nF}$, $L = 600 \, \mu\text{H}$)

Fase



RLC paralelo - Ressonância



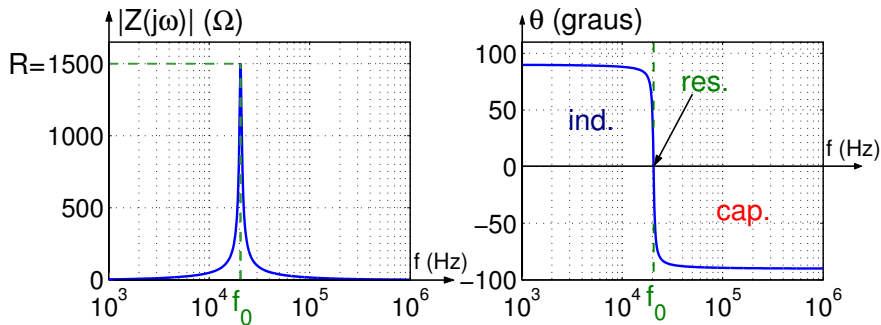
Frequência de ressonância

$$\omega_r = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

- ▶ Fase da impedância é nula
- ▶ Circuito é puramente resistivo
- ▶ Módulo da impedância é máximo (módulo da tensão é máximo) ou Módulo da admitância é mínimo (módulo da corrente é mínimo)

RLC paralelo - Ressonância

$$R = 1500 \, \Omega, \quad L = 600 \, \mu\text{H}, \quad C = 100 \, \text{nF}$$

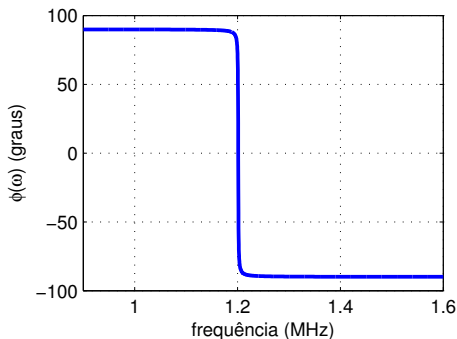
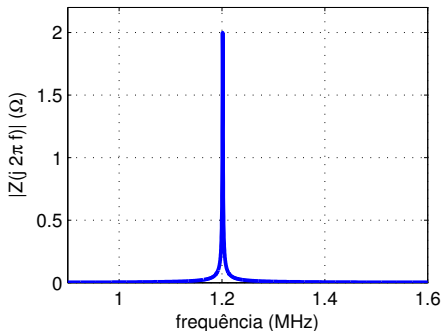


$$\text{Freq. de ressonância: } f_r = f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \approx 20,55 \, \text{kHz}$$

RLC paralelo - Ressonância

Valores típicos para sintonizar uma rádio AM

$$R = 2 \, \Omega, \quad L = 195 \, \mu\text{H}, \quad C = 90 \, \mu\text{F}$$



Freq. de ressonância:

$$f_r = f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 1,2 \, \text{MHz} = 1200\text{kHz} \text{ (Rádio CULTURA BRASIL AM)}$$

Frequência de corte

- Para o Circuito RLC paralelo

$$|Z(j\omega)|_{\max} = |Z(j\omega_0)| = R$$

Quais as frequências ω_{c1} e ω_{c2} nas quais $|Z(j\omega)| = R/\sqrt{2}$?

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{R}}} \Rightarrow$$

$$\omega_{c1} = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

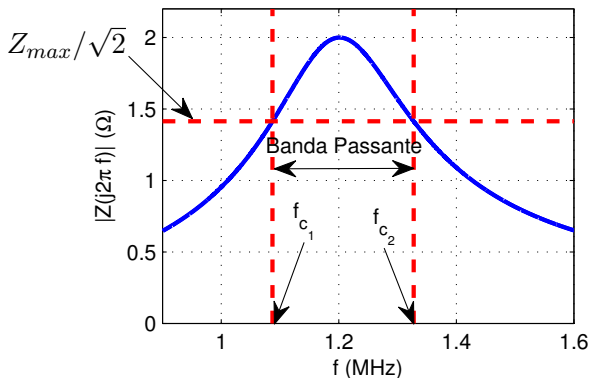
$$\omega_{c2} = +\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

- É comum definir a banda passante que neste caso vale

$$B = \omega_{c2} - \omega_{c1} = \frac{1}{RC}$$

Frequência de corte

$$R = 2 \, \Omega, \quad L = 195 \, \text{pH}, \quad C = 1,22 \, \text{nF}$$



- ▶ $Z_{\max}/\sqrt{2} = 1,4142 \, \Omega$
- ▶ $\omega_{c1} = 6,8313 \, \text{Mrad/s} \Rightarrow f_{c1} = 1,0872 \, \text{MHz}$
- ▶ $\omega_{c2} = 8,3410 \, \text{Mrad/s} \Rightarrow f_{c2} = 1,3275 \, \text{MHz}$
- ▶ $B = 1.5097 \, \text{Mrad/s} \quad (0,2403 \, \text{MHz})$

Índice de mérito

Vamos voltar ao circuito RLC paralelo.

- ▶ Esse circuito funciona como um passa-faixa com banda passante

$$B = \omega_{c2} - \omega_{c1} = \frac{1}{RC}$$

- ▶ O índice de mérito ou fator de qualidade é definido como

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{B}$$

- ▶ Para o RLC paralelo, temos

$$Q_0 = RC\omega_0$$

- ▶ Substituindo $C = 1/(\omega_0^2 L)$, chega-se a

$$Q_0 = RC\omega_0 = \frac{R}{\omega_0 L} = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

Índice de mérito

A admitância do circuito RLC paralelo pode ser escrita em função de Q_0 :

$$Y(j\omega) = G + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)$$

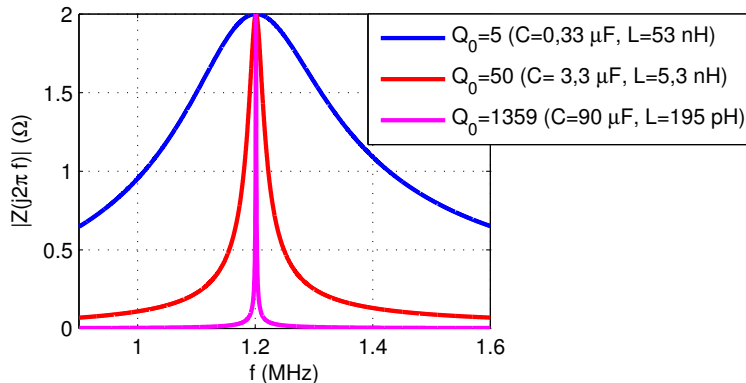
$$= G \left[1 + j \left(\frac{\omega C}{G} - \frac{R}{\omega L} \right) \right]$$

$$= G \left[1 + j \left(\frac{\omega}{\omega_0} \frac{\omega_0 C}{G} - \frac{\omega_0}{\omega} \frac{R}{\omega_0 L} \right) \right]$$

$$= G \left[1 + jQ_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]$$

Índice de mérito

Impedância do RLC paralelo em função de Q_0 , $R = 2 \Omega$ (fixo)



Q_0 alto, B estreita, alta seletividade, altamente oscilatório (tempo)

Índice de mérito

O índice de mérito também é definido como

$$Q_0 = \frac{\text{potência reativa}}{\text{potência média}}$$

Para circuitos RLC paralelo ou série vale

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{2\alpha}$$

2.5 Exercício

O módulo da resposta em frequência $F(j\omega) = \frac{\hat{V}_L}{\hat{E}_s}$ do circuito da Figura 1 está mostrado na Figura 2, o valor de L (em μH) é:

- a) 125
- b) 500
- c) 300
- d) 20
- e) 400

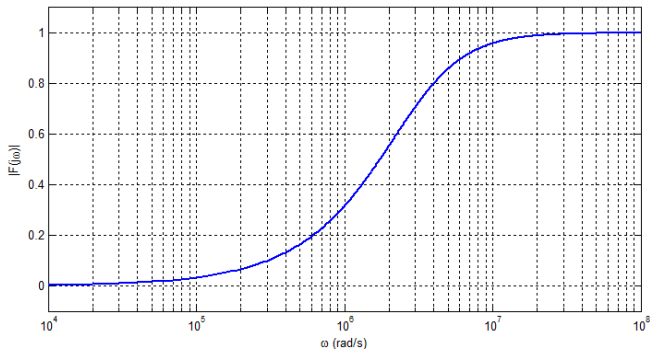
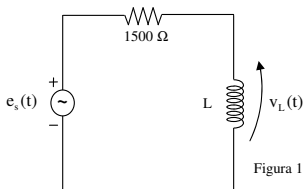


Figura 2

2.5 Exercício

Resolução:

O módulo da resposta em frequência do circuito da Figura 1 é dado por

$$|F(j\omega)| = \frac{\hat{V}_L}{\hat{E}_s} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \Rightarrow L = \sqrt{\frac{R^2 |F(j\omega)|^2}{\omega^2 (1 - |F(j\omega)|^2)}}.$$

Do gráfico do módulo da resposta em frequência obtém-se para $\omega = 4 \times 10^6 \text{ rad/s}$, $|F(j\omega)| = 0,8$. Assim,

$$L = \sqrt{\frac{1500^2 0,8^2}{16 \times 10^{12} (1 - 0,8^2)}} = 500 \text{ } \mu\text{H}.$$

2.5 Exercício

Determine a expressão da saída (tensão no indutor) para a entrada $e_s(t) = 10 \cos(6 \times 10^5 t + 30^\circ) + 10 \cos(4 \times 10^6 t - 30^\circ)$.

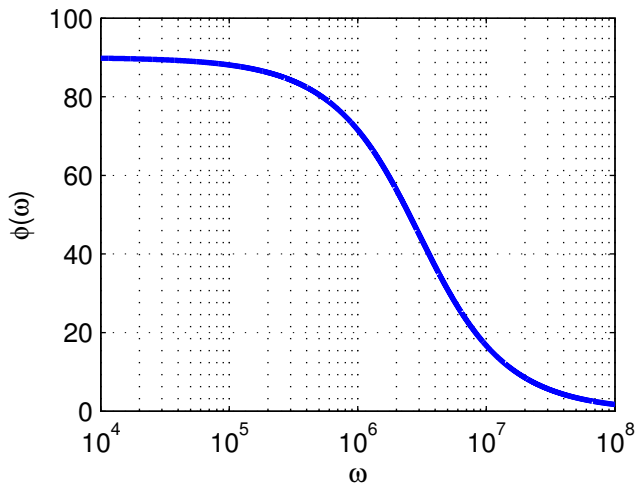
Resolução: Da resposta em frequência temos

$$\hat{I} = \frac{\hat{E}_s}{R + j\omega L} \Rightarrow \frac{\hat{V}_L}{\hat{E}_s} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L}$$

A fase da resposta em frequência vale

$$\phi(\omega) = 90^\circ - \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

2.5 Exercício – Fase da Resposta em frequência



2.5 Exercício

Determine a expressão da saída (tensão no indutor) para a entrada $e_s(t) = 10 \cos(6 \times 10^5 t + 30^\circ) + 10 \cos(4 \times 10^6 t - 30^\circ)$.

Resolução: Para o nosso problema

$$\phi(6 \times 10^5) = 90^\circ - \arctan\left(\frac{5 \times 10^{-4} \times 6 \times 10^5}{1500}\right) = 78,6901^\circ$$

$$\phi(4 \times 10^6) = 90^\circ - \arctan\left(\frac{5 \times 10^{-4} \times 4 \times 10^6}{1500}\right) = 36,8699^\circ$$

Assim

$$v_L(t) = 2 \cos(6 \times 10^5 t + 30^\circ + 78,7^\circ) + 8 \cos(4 \times 10^6 t - 30^\circ + 36,8^\circ),$$

ou seja,

$$v_L(t) = 2 \cos(6 \times 10^5 t + 108,7^\circ) + 8 \cos(4 \times 10^6 t + 6,8^\circ)$$